１２９「日本数学オリンピック問題を解いてみた（３）」

１９９５年 第５回 日本数学オリンピック予選（第１問）

1. 次の等式を満たす数 a を求めよ．

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$$

ただし，$\sqrt[3]{x}$ は 3 乗すれば x になるような実数を表すものとする．

$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$ と表記すると、

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ は $\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\left(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)$ と表せる。

$a^{\frac{1}{3}}=\dfrac{\left(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{3}}}$ と変形して両辺を３乗すると、$a=\dfrac{\left(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)^3}{\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}$ この分子を計算して、

$$\left(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)^3=1-2+4-3\cdot1^2\cdot2^{\frac{1}{3}}+3\cdot1\cdot2^{\frac{2}{3}}+3\cdot1^2\cdot2^{\frac{2}{3}}+3\cdot1\cdot2^{\frac{4}{3}}+3\cdot2^{\frac{2}{3}}\cdot2^{\frac{2}{3}}-3\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{4}{3}}-6\cdot1\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{2}{3}}$$

$$=1-2+4-12-3\cdot2^{\frac{1}{3}}+6\cdot2^{\frac{2}{3}}+6\cdot2^{\frac{4}{3}}-3\cdot2^{\frac{5}{3}}=-9+3\cdot2^{\frac{1}{3}}\left(-1+2\cdot2^{\frac{1}{3}}+2\cdot2^{\frac{3}{3}}-1\cdot2^{\frac{4}{3}}\right)$$

$=-9+3\cdot2^{\frac{1}{3}}\left[3+2^{\frac{1}{3}}\left(2-2^{\frac{3}{3}}\right)\right]=-9+9\cdot2^{\frac{2}{3}}=9\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)$　となるから、

$a=\dfrac{\left(1-2^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{2}{3}}\right)^3}{\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\dfrac{9\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=9$ 従って、$\underline{\underline{a=9}}$

１９９５年 第５回 日本数学オリンピック予選（第３問）

3. 鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O とし，線分 OA, BC の中点をそれぞれ M, N とする．$\angle B=4\angle OMN$, $\angle C=6\angle OMN$ とするとき $\angle OMN$ を求めよ．

図１　三角形ＡＢＣにおいて、３辺の長さをａ，ｂ，ｃ、外接円の半径をＲとする。

題意より、∠ＡＢＣ＝$4x$，∠ＡＣＢ＝$6x$，ＯＭ＝ＡＭ＝$\dfrac{R}{2}$，ＢＮ＝ＣＮ＝$\dfrac{a}{2}$ である。

求める∠OMN$=x$とする。

∠ＢＡＣ$=\pi-(4x+6x)=\pi-10x$

∠ＡＯＢ$=2\times$∠ＡＣＢ$=12x$

∠ＢＯＮ$=$∠ＢＡＣ$=\pi-10x$

以上から∠MON$=2\pi-($∠ＡＯＢ$+$∠ＢＯＮ$)$

$=2\pi-[12x+(\pi-10x)]=\pi-2x$

◿OMNにおいて、

∠ONM$=\pi-($∠MON$+$∠ONM$)$

$=\pi-[(\pi-2x)+x]=x$ だから、

◿OMNは二等辺三角形である。

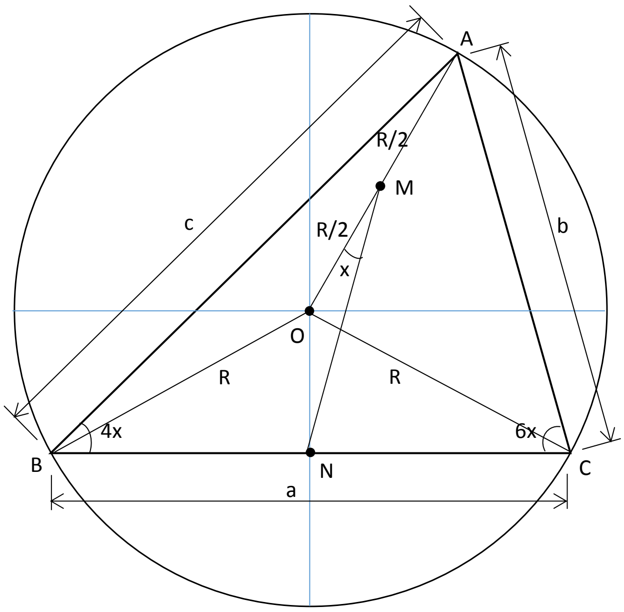


図１

よって、ON$=\dfrac{R}{2}$ である。

一方、ON$=R\cos$∠ＢＯＮ$=R\cos(\pi-10x)$

だから、$R\cos(\pi-10x)=\dfrac{R}{2}$ が成り立つ。

これを解いて、$\pi-10x=\dfrac{\pi}{3}$ から、$x=\dfrac{\pi}{15}(12^\circ)$ これが求める解である。

∠ONMを求めれば簡単に解にたどり着いたところ、最初それに気付かず、余弦定理を用いて強引に x を求めた。それは ◿OMNにおいて、

MN$=\dfrac{\sqrt{-a^2+b^2+c^2+R^2}}{2}$，ON$=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$，OM$=\dfrac{R}{2}$ であるから、余弦定理より、

$$\cos x=\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-a^2+b^2+c^2+R^2}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2}{2\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{\sqrt{-a^2+b^2+c^2+R^2}}{2}}=\frac{b^2+c^2-2R^2}{2R\sqrt{-a^2+b^2+c^2+R^2}}$$

ここで正弦定理により、$a=2R\sin(\pi-10x)=2R\sin 10x$，$b=2R\sin 4x$，$c=2R\sin 6x$ だから、

$$\cos x=\frac{(2R\sin 4x)^2+(2R\sin 6x)^2-2R^2}{2R\sqrt{-(2R\sin 10x)^2+(2R\sin 4x)^2+(2R\sin 6x)^2+R^2}}$$

$$=\frac{2\sin^2 4x+2\sin^2 6x-1}{\sqrt{-4\sin^2 10x+4\sin^2 4x+4\sin^2 6x+1}}$$ 非常に難しい方程式だが、これを解くと、

$x=\dfrac{2\pi}{15}(24^\circ)$，$\dfrac{\pi}{15}(12^\circ)$，$\dfrac{2\pi}{45}(8^\circ)$ が得られる。∠ＡＣＢ$=6x$ が鋭角でなければならないので

24° は不適、さらに∠ＢＡＣ$=\pi-10x$ が鋭角でなければならないので、8° も不適である。

よって、$\dfrac{\pi}{15}(12^\circ)$ が導かれる。

１９９５年 第５回 日本数学オリンピック予選（第１０問）

10. 座標空間において，空間図形 S を

$$S=\{(x,y,z)|x^2-4y^2+z^2-12xy=20\}$$

によって定める．平面 $2x+3y+z=3$ の上で，S とこの平面との交わりによって囲まれる部分の面積を求めよ．

$z=3-(2x+3y)$ をＳに代入すると、

$x^2-4y^2+[3-(2x+3y)]^2-12xy=20$ となり、これは平面 $z=3-(2x+3y)$ 上の図形をＸ－Ｙ平面に投影した図形を表している。上式を展開して整理すると、$5x^2+5y^2-12x-18y-11=0$

この式を平方完成すると、

$$5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{36}{5}+5\left(y-\frac{9}{5}\right)^2-\frac{81}{5}-11=0 \text{ から、} \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{9}{5}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{43}}{5}\right)^2 \quad \text{-------------①}$$

①はＸ－Ｙ平面上における半径 $\frac{2\sqrt{43}}{5}$ の円の方程式であり、

よって、この円の面積は $\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{43}}{5}\right)^2=\frac{172}{25}\pi$ である。

$2x+3y+z=3$ は、図１に示すようにＸ，Ｙ，Ｚ軸と $\frac{3}{2}$，1，3 で交わる平面で、Ｘ－Ｙ平面となす角度を θ とすると、$cos\,\theta=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{13}}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ である。

以上より $2x+3y+z=3$ 上の面積をＡとすると、

$$\text{A}\cos\theta=\frac{172}{25}\pi \text{ から、}$$

$$\text{A}=\frac{172}{25}\pi\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\underline{\underline{\frac{172\sqrt{14}}{25}\pi}}$$

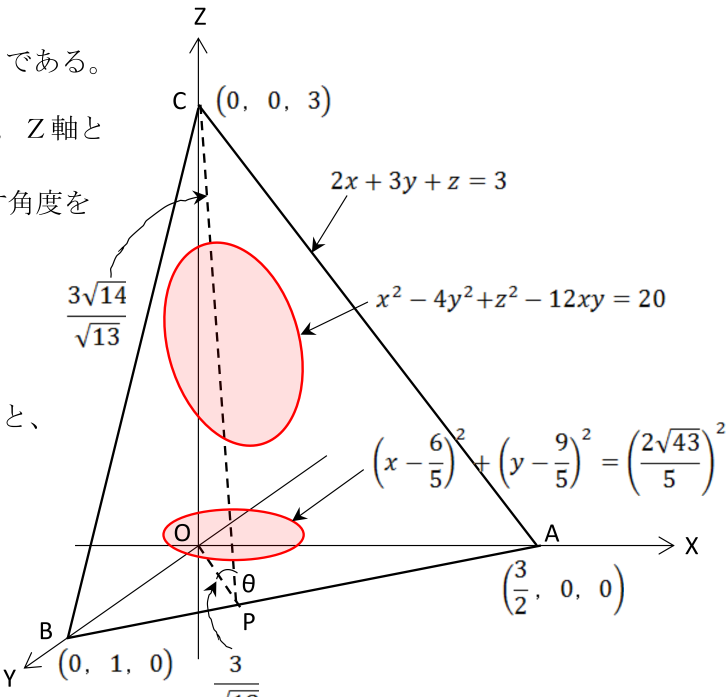
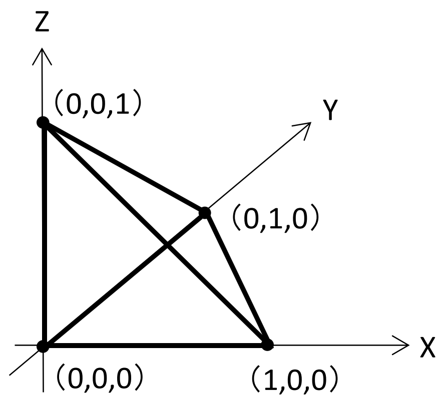


図１

１９９６年 第６回 日本数学オリンピック予選（第１問）

1. xyz-空間内の 4 点 (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) を頂点とする四面体に内接する球の半径を求めよ.



内接球の半径を r とすると、四面体のすべての面からの距離が r に等しい。４つの面の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3，S_4 とすると、四面体の体積Ｖは、

$$V=\frac{1}{3}(S_1 r+S_2 r+S_3 r+S_4 r)=\frac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=\frac{1}{2},\ S_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、

$$V=\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{6}r$$

一方、$V=\frac{1}{2}\cdot 1^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ と計算されるので、$\frac{1}{6}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}r$ より、$r=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

１９９７年 第７回 日本数学オリンピック予選（第３問）

3. xyz-空間のある平面上に多角形がある．この多角形を xy-平面に正射影したものの面積が 13, yz-平面に正射影したものの面積が 6, zx-平面に正射影したものの面積が 18 のとき，この多角形の面積を求めよ．

まず、多角形が $XY-$平面，$YZ-$平面，$ZX-$平面 のそれぞれと成す角度を求める。
それぞれの成す角度を α，β，γ とする。
求める多角形の面積を x とすると、題意より
$x\cos\alpha=13$，$x\cos\beta=6$，$x\cos\gamma=18$ である。
図１に示すように、多角形が X軸，Y軸，Z軸 と交わる点をそれぞれａ，ｂ，ｃ とする。
多角計が $XY-$平面 と交わる角度は、図２に示すように直線 ａ，ｂ に対して原点Ｏから下ろした垂線の足をＰとしたとき、$\tan\alpha=\frac{c}{OP}$ と表せる。

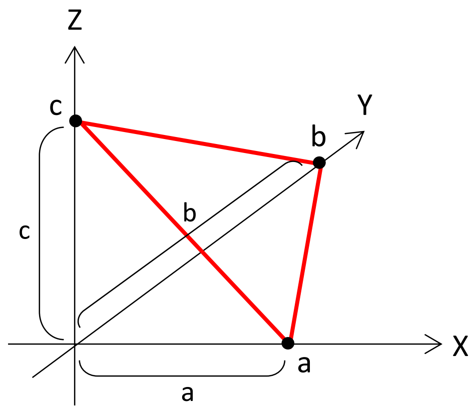


図１

$$OP=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{から、}\ \tan\alpha=c\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(c\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)^2}}$$

$= \dfrac{ab}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$　同様に、

$$\cos\beta = \frac{bc}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$\cos\gamma = \frac{ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

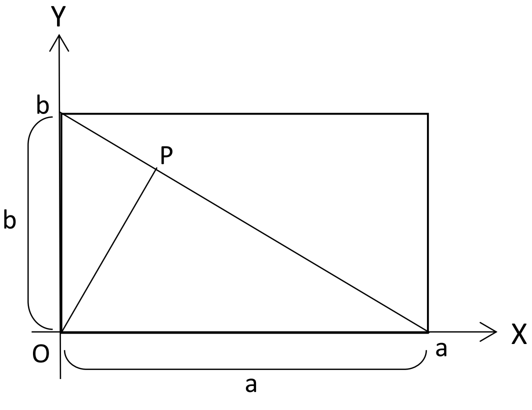


図２

以上より、

$x\cdot\dfrac{ab}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=13$ --------------①　　$x\cdot\dfrac{bc}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=6$ --------------②

$x\cdot\dfrac{ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=18$ --------------③ が成りたつ。

$\dfrac{②}{①}$ より、$a=\dfrac{13}{6}c$, $\dfrac{①}{③}$ より、$b=\dfrac{13}{18}c$、これを①に代入すると、

$$x\cdot\frac{\left(\frac{13}{6}c\right)^2\left(\frac{13}{18}c\right)^2}{\left(\frac{13}{6}c\right)^2\left(\frac{13}{18}c\right)^2+\left(\frac{13}{18}c\right)^2c^2+\left(\frac{13}{6}c\right)^2c^2}=13$$

c は消去され、$x=\sqrt{13^2+6^2+18^2}=\underline{\underline{23}}$ が得られる。

１９９７年 第７回 日本数学オリンピック予選（第５問）

5. 三角形 ABC において $BC=6, CA=5, AB=4$ である．辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E を，三角形 ADE の外接円が BC に接するようにとる．この条件をみたしながら D, E が AB, AC 上を動くとき，線分 DE の長さの最小値を求めよ．

　図１において、∠Aをα，ＤＥの長さをx，◿ＡＤＥの外接円の

半径をＲとすると、正弦定理より $x=\dfrac{2R}{\sin\alpha}$ --------------①

α は定数だから、ＤＥ $=x$ の長さは外接円の半径に比例する。従って、その最小値はＲが最小の時の値に一致する。

　Ｒが最小となるのは、図２に示すように◿ＡＤＥの外接円が、点Ａから辺ＢＣに下ろした垂線の足Ｐを通る場合である。

ＢＰの長さを y とすると、$\sqrt{4^2-y^2}=\sqrt{5^2-(6-y)^2}$

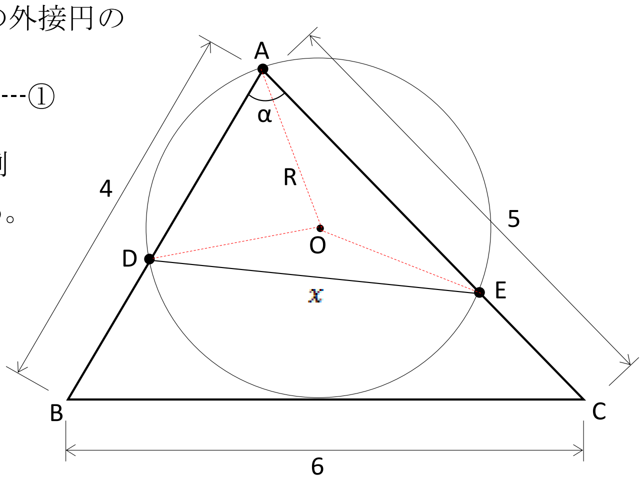


図１

これを解いて $y=\dfrac{9}{4}$ より、$2R=\dfrac{9}{4}$ である。

従って①より、

$x=\dfrac{\frac{9}{4}}{\sin\alpha}$，余弦定理より $\cos\alpha=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{63}}{8}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ であるから、

$x=\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{8}{3\sqrt{7}}=\underline{\underline{\dfrac{6}{\sqrt{7}}}}$

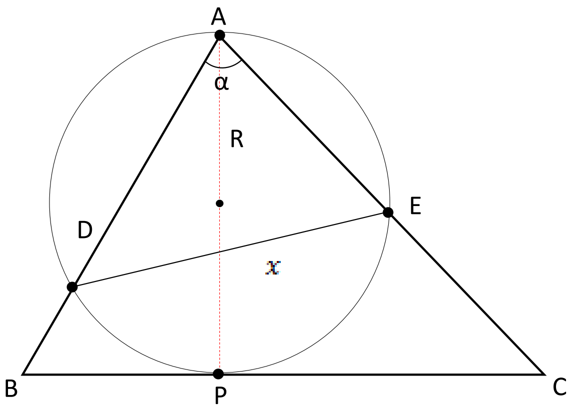


図２

１９９７年 第７回 日本数学オリンピック予選（第８問）

8. $f(x)$ **は** 5 **次多項式で,** 5 **次方程式** $f(x)+1=0$ **は** $x=-1$ **を** 3 **重根にもち,** $f(x)-1=0$ **は** $x=1$ **を** 3 **重根にもつ.** $f(x)$ **を求めよ.**

題意より、5次方程式 $f(x)+1=0$ を$(x+1)^3$ で割ったとき、その商は２次式になるので、それを $a_1x^2+b_1x+c_1$ とする。また、5次方程式 $f(x)-1=0$ を$(x-1)^3$ で割ったとき、その商も２次式になるので、それを $a_2x^2+b_2x+c_2$ とする。以上を式で表すと次の①②となる。

$\dfrac{f(x)+1}{(x+1)^3}=a_1x^2+b_1x+c_1$ ----------------------------------①

$\dfrac{f(x)-1}{(x-1)^3}=a_2x^2+b_2x+c_2$ ----------------------------------②

① ②を展開して整理すると、

① $f(x)=\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\left(x^3+3x^2+3x+1\right)-1$

$=a_1x^5+(3a_1+b_1)x^4+(3a_1+3b_1+c_1)x^3+(a_1+3b_1+3c_1)x^2+(b_1+3c_1)x+(c_1-1)$

----------------③

② $f(x)=(a_2x^2+b_2x+c_2)(x^3-3x^2+3x-1)-1$

$=a_2x^5+(-3a_2+b_2)x^4+(3a_2-3b_2+c_2)x^3+(-a_2+3b_2-3c_2)x^2+(-b_2+3c_2)x+(-c_2+1)$

----------------④

それぞれの各項は等しいので、

$a_1=a_2$ ----------------------------------⑤

$3a_1+b_1=-3a_2+b_2$ ----------------------------------⑥

$3a_1+3b_1+c_1=3a_2-3b_2+c_2$ ----------------------------------⑦

$a_1+3b_1+3c_1=-a_2+3b_2-3c_2$ ----------------------------------⑧

$b_1 + 3c_1 = -b_2 + 3c_2$ ------------------------------------⑨

$c_1 - 1 = -c_2 + 1$ ------------------------------------⑩

⑤ ～ ⑩を解いて、

$$a_1 = \frac{3}{8},\ a_2 = \frac{3}{8},\ b_1 = -\frac{9}{8},\ b_2 = \frac{9}{8},\ c_1 = 1,\ c_2 = 1$$

これを③④に入れると、いずれも次式となり一致し、$a_1 \sim c_2$ は正しいことが確認された。

$$f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{10}{8}x^3 + \frac{15}{8}x$$

よって求める５次多項式は、

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{8}\left(3x^5 - 10x^3 + 15x\right)}}$$ である。

$f(x) + 1 = \frac{1}{8}\left(3x^5 - 10x^3 + 15x\right) + 1 = 0$ より、$\frac{1}{8}\left(3x^5 - 10x^3 + 15x + 8\right) = 0$

$\rightarrow \frac{1}{8}(x+1)^3(3x^2 - 9x + 8) = 0$

$f(x) - 1 = \frac{1}{8}\left(3x^5 - 10x^3 + 15x\right) - 1 = 0$ より、$\frac{1}{8}\left(3x^5 - 10x^3 + 15x - 8\right) = 0$

$\rightarrow \frac{1}{8}(x-1)^3(3x^2 + 9x + 8) = 0$

となり、題意と一致することが確認された。

１９９７年 第７回 日本数学オリンピック予選（第１１問）

11. **四面体** $ABCD$ **の対辺どうしの長さが等しく**, $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ **のとき, この四面体の外接球の直径はいくらか.**

この四面体が等面四面体で、直方体に含まれることを知っていれば、この問題は非常に簡単に解くことができる。ここでは、そのことを知らないものとして解いてみた。

⊿ＡＢＣが水平面上にあるとして、まずその頂点Ｄを求める。

図１のように、四面体ＡＢＣＤの点Ｂを原点とするＸ－Ｙ－Ｚ空間を考える。Ｚ軸は点Ｂから鉛直上とする。

ＢＣ＝ａ，ＣＡ＝ｂ，ＡＢ＝ｃ、とすると題意より、ＤＡ＝ａ，ＤＢ＝ｂ，ＤＣ＝ｃである。

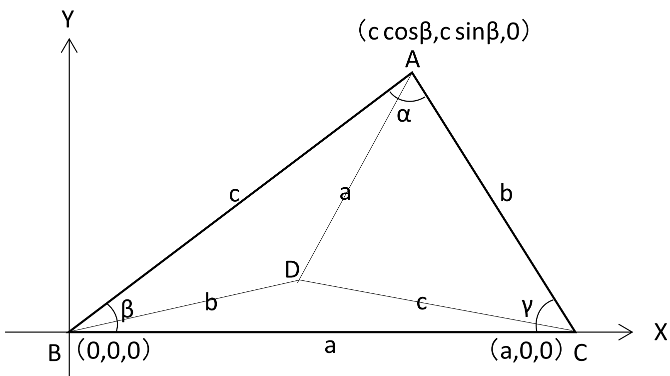


図１

∠ＣＡＢ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＢＣＡ＝γとすると、点Ｄは点Ａ，Ｂ，Ｃからそれぞれａ，ｂ，ｃの距離にあるので次式が成り立つ。

$x^2+y^2+z^2=b^2$ -----------------------------------①

$(x-a)^2+y^2+z^2=c^2$ -----------------------------------②

$(x-c\cos\beta)^2+(y-c\sin\beta)^2+z^2=a^2$ -----------------------------------③

①②③を解いて、

$x=b\cos\gamma$，$y=b\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}$，$z=\dfrac{2b}{\sin\beta}\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ --------------------④

が得られる。

　また、図２に示すように、⊿Ａ′ＢＣ，⊿Ｂ′ＡＣ，⊿Ｃ′ＡＢを、それぞれ⊿ＡＢＣに相似であるようにとると、⊿Ａ′Ｂ′Ｃ′は四面体ＡＢＣＤを展開した図形となっている。

Ｃ′から辺ＡＢへの垂線の足をＰ，Ｂ′から辺ＡＣへの垂線の足をＱ，Ａ′から辺ＢＣへの垂線の足をＲとすると、辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡのところで折り曲げれば、点Ｃ′，Ｂ′，Ａ′はそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒを中心に円弧を描き点Ｄに重なる。このことからＤの座標を求めることもできる。

（図２では、頂点Ｄが⊿ＡＢＣ内にあるが、実際は辺ＢＣの下に位置している）

各点の座標は、ａ，ｂ，ｃ，α，β，γを用いて次のように表される。

Ａ$(c\cos\beta, c\sin\beta, 0)$，Ｂ$(0,0,0)$，Ｃ$(a,0,0)$

Ａ′$(b\cos\gamma, -b\sin\gamma, 0)$，Ｂ′$(a+c\cos\beta, c\sin\beta, 0)$，Ｃ′$(c\cos\beta-a, c\sin\beta, 0)$

Ｐ$(b\cos\alpha\cos\beta, b\cos\alpha\sin\beta, 0)$，Ｑ$(a-c\cos\alpha\cos\gamma, c\sin\alpha\sin\gamma, 0)$，Ｒ$(b\cos\gamma, 0,0)$

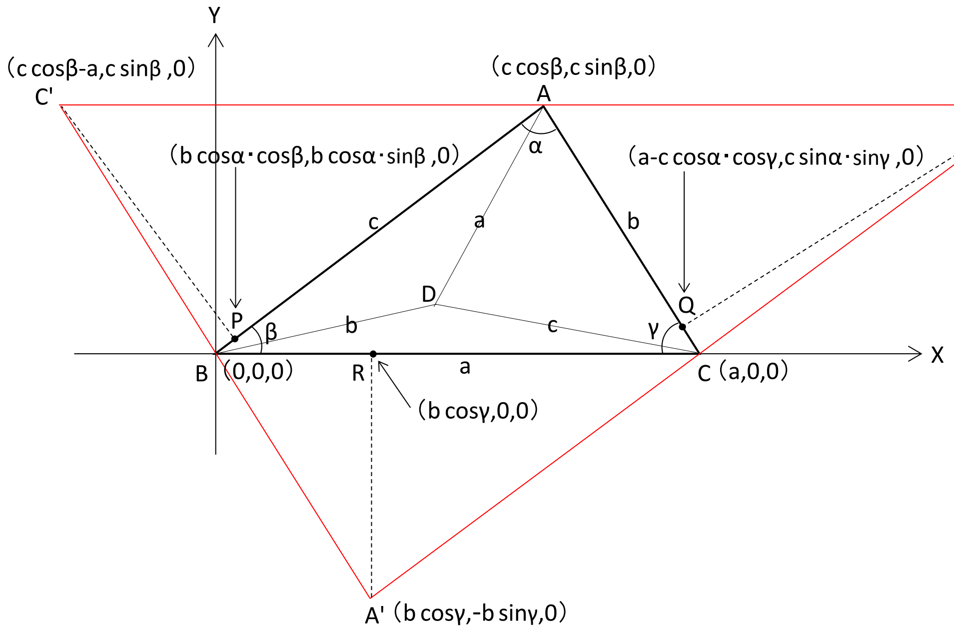


図２

点ＤのＸ座標はＡ′のＸ座標に等しいので、$x=b\cos\gamma$

点ＤのＹ座標は直線Ａ′Ｒと直線Ｃ′Ｐとの交点だから、

$y - c\,sin\,\beta = -\,tan\,\beta(x + b\,cos\,\gamma)$ に $x = b\cos\gamma$ を代入して $y = b\dfrac{cos\,\alpha - cos\,\beta\,cos\,\gamma}{sin\,\beta}$ が得られる。

点ＤのＺ座標は直線Ａ′Ｒを辺ＢＣを軸に回転したとき、そのＹ座標が $b\dfrac{cos\,\alpha - cos\,\beta\,cos\,\gamma}{sin\,\beta}$ となる点の高さを求めればいいので、

$$z = \sqrt{(b\,sin\,\gamma)^2 - \left(b\frac{cos\,\alpha - cos\,\beta\,cos\,\gamma}{sin\,\beta}\right)^2} = \frac{2b}{sin\,\beta}\sqrt{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma}$$ となり④と一致する。

ＡＢＣＤの座標が求められたので、四面体の外接球の中心は、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄから等距離にある点を求めればよい。外接球の半径をＲとすると、次の⑤～⑦が成り立つ。

点Ａについて　$(x - c\cos\beta)^2 + (y - c\sin\beta)^2 + z^2 = R^2$　---------------------⑤

点Ｂについて　$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$　---------------------⑥

点Ｃについて　$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$　---------------------⑦

点Ｄについて　$(x - b\cos\gamma)^2 + \left(y - b\dfrac{cos\,\alpha - cos\,\beta\,cos\,\gamma}{sin\,\beta}\right)^2 + \left(z - \dfrac{2b}{sin\,\beta}\sqrt{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma}\right)^2 = R^2$

-----------⑧

⑥－⑦より、$x = \dfrac{a}{2}$

⑤－⑥より、$y = \dfrac{b\cos\alpha}{2sin\,\beta}$

⑥－⑧より、

$$(2b\cos\gamma)x + \left(2b\frac{cos\,\alpha - cos\,\beta\,cos\,\gamma}{sin\,\beta}\right)y + \left(2\frac{2b}{sin\,\beta}\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right)z = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\cos\alpha}{2sin\,\beta}\right)^2 + z^2$$

この式に、今求めた $x = \dfrac{a}{2}$，$y = \dfrac{b\cos\alpha}{2sin\,\beta}$ を入れて z を求めると、

$z = \dfrac{b\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2sin\,\beta}$ が求められる。（途中計算省略）

$x = \dfrac{a}{2}$，$y = \dfrac{b\cos\alpha}{2sin\,\beta}$，$z = \dfrac{b\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2sin\,\beta}$ を⑥に入れて計算すると、

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\,cos\,\alpha}{2sin\,\beta}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma}}{2sin\,\beta}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4\,sin^2\,\beta}(cos^2\,\alpha + cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{8\,sin^2\,\beta}(cos^2\,\alpha + sin^2\,\beta - cos^2\,\gamma) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{8\,sin^2\,\beta}(2\,cos\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2\,cos\,\alpha\,sin\,\gamma}{4sin\,\beta} = \frac{a^2}{4} + \frac{bc\,cos\,\alpha}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$$

以上より、$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$　従って、求める外接球の直径は $\underline{\underline{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}}}$ である。

（別解）

　問題の四面体は等面四面体で、図３に示すように直方体に含まれる。３辺ａ，ｂ，ｃの直方体を考え、四面体の各辺を$\underline{\mathrm{A}}$，$\underline{\mathrm{B}}$，$\underline{\mathrm{C}}$とすると、

$\underline{\mathrm{A}}=\sqrt{a^2+b^2}$，$\underline{\mathrm{B}}=\sqrt{c^2+a^2}$，$\underline{\mathrm{C}}=\sqrt{b^2+c^2}$

図３のとおりＸＹＺ軸をとると、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの座標は

Ａ$(0,b,c)$，Ｂ$(0,0,0)$，Ｃ$(a,b,0)$，Ｄ$(a,0,c)$ と表せる。

Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄから距離Ｒにある点は、

$x^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

$x^2+y^2+z^2=R^2$

$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2$

$(x-a)^2+y^2+(z-c)^2=R^2$

これを解いて、$x=\dfrac{a}{2}$，$y=\dfrac{b}{2}$，$z=\dfrac{c}{2}$

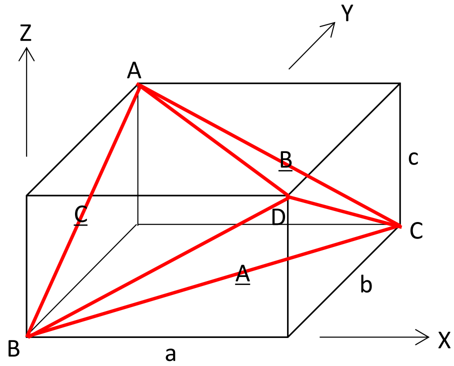


図３

よって、$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2=R^2$ より、$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$ が求められる。

これを$\underline{\mathrm{A}}$，$\underline{\mathrm{B}}$，$\underline{\mathrm{C}}$で表せばよいので、$\underline{\mathrm{A}}^2=a^2+b^2$，$\underline{\mathrm{B}}^2=c^2+a^2$，$\underline{\mathrm{C}}^2=b^2+c^2$ から、

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(\underline{A}^2+\underline{B}^2+\underline{C}^2)}$$

$\underline{\mathrm{A}}$＝ａ，$\underline{\mathrm{B}}$＝ｂ，$\underline{\mathrm{C}}$＝ｃに対応させると、

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$ が導かれる。

　１９９７年 予選第１１問は、問題の四面体が直方体の対向する面の対角線がそれぞれねじれの位置にある直線で形成される図形（等面四面体）であることを知らなければ非常に難しい問題となる。今回のように複雑な計算となり、とても時間内に解くことはできないと思われる。

　このような問題を短時間で解くためには、多くの公式，定理や法則などの知識を持っていることが不可欠である。（２０２２．０５．２０）