１３１「日本数学オリンピック問題を解いてみた（４）」

１９９８年 第８回 日本数学オリンピック予選（第１０問）

10. x, y, z **が正の実数を動くとき** $\dfrac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ **の最大値を求めよ.**

$f(x,y,z)=\dfrac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ とおく。この $f(x,y,z)$ の微分ができれば解ける問題。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2y^2z(x^6+y^6+z^6)-6x^5\cdot x^3y^2z}{(x^6+y^6+z^6)^2}=\frac{3x^2y^2z(-x^6+y^6+z^6)}{(x^6+y^6+z^6)^2} \qquad \text{------------------------ ①}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^3yz(x^6+y^6+z^6)-6y^5\cdot x^3y^2z}{(x^6+y^6+z^6)^2}=\frac{2x^3yz(x^6-2y^6+z^6)}{(x^6+y^6+z^6)^2} \qquad \text{------------------------ ②}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x^3y^2(x^6+y^6+z^6)-6z^5\cdot x^3y^2z}{(x^6+y^6+z^6)^2}=\frac{x^3y^2(x^6+y^6-5z^6)}{(x^6+y^6+z^6)^2} \qquad \text{------------------------ ③}$$

①②③を解く、

①②より、$y^6=2z^6$，②③より、$x^6=3z^6$，これを$f(x,y,z)$ に入れて、

$$f(x,y,z)=f\left(\sqrt[6]{3}z,\sqrt[6]{2}z,z\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\,z^3\right)\left(\sqrt[3]{2}z^2\right)z}{3z^6+2z^6+z^6}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}\,z^6}{6z^6}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{6}}}$$

x,y,z は正の実数であるから、これが求める最大値である。

１９９９年 第９回 日本数学オリンピック予選（第４問）

4. 一辺の長さが 1 の立方体 *ABCD-EFGH* **を，対角線** *AG* **を含む平面で切断するとき，切り口の面積の最小値を求めよ.**

図１のように、対角線ＡＧを含む面を考え、辺ＢＣ，ＥＨと交わる点をＰ，Ｑとする。$\mathrm{BP}=x$ とおき、四角形ＡＰＧＱの面積が最小となる x を求める。

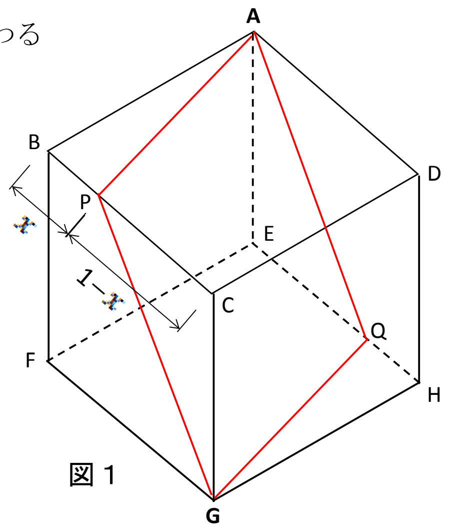


図１

$PC=1-x$ だから、

$AP=\sqrt{1+x^2}$，$GP=\sqrt{1+(1-x)^2}$ より、四角形ＡＰＧＱは図２に示すような平行四辺形である。

よって、∠ＰＡＱを θ とすると求める平行四辺形の面積は、

$\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}\,\sin\theta$ となる。------------------------ ①

平行四辺形ＡＰＧＱの対角線の長さは、

$AG=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$PQ=\sqrt{1^2+1^2+(1-2x)^2}=\sqrt{4x^2-4x+3}$ であるから、

余弦定理より

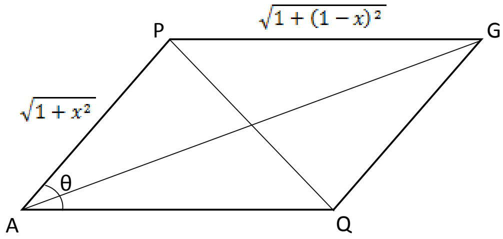


図２

$$\cos\theta=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+\left(\sqrt{1+(1-x)^2}\right)^2-\left(\sqrt{4x^2-4x+3}\right)^2}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}$$

$=\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}$ ，　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}\right)^2}$ これを①に入れて、

平行四辺形ＡＰＧＱの面積は次の式で表される。

$$\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}\sqrt{1-\left(\frac{x(1-x)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}\right)^2}=\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-2x+2}\sqrt{\frac{2(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}}$$

$=\sqrt{2(x^2-x+1)}$ これを最小にする x は、√内の x^2-x+1 を微分して０とおき、

$2x-1=0$ より $x=\dfrac{1}{2}$ 、これはちょうどＰがＢＣ間の真ん中にある場合である。

このときＡＰＧＱは１辺 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のひし形で、２辺のなす角のうち狭角は、$\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ となる θ である。

以上より、面積の最小値は、$\sqrt{2\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1\right]}=\underline{\underline{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}}$

１９９９年 第９回 日本数学オリンピック予選（第６問）

6. ３辺の長さがそれぞれ $AB=4$, $BC=6$, $AC=5$ の三角形 ABC の辺 BC 上に点 P をとり, P より２辺 AB, AC へ下ろした垂線の足をそれぞれ M, N とする. M, N 間の距離を最小にするような P の位置を P_0 としたとき BP_0 の長さを求めよ

図１に示すように ∠Ｂ＝β，∠Ｃ＝γ，ＢＰ＝x とすると、∠ＭＰＮ＝$\beta+\gamma$ だから、MNの長さは余弦定理を用いて、

$MN=\sqrt{(PM)^2+(PN)^2-2PM\cdot PN\cdot\cos(\beta+\gamma)}$ と表せる。

$PM=x\sin\beta$，$PN=(6-x)\sin\gamma$　から、

$MN=\sqrt{(x\sin\beta)^2+[(6-x)\sin\gamma]^2-2x\sin\beta\cdot(6-x)\sin\gamma\cdot\cos(\beta+\gamma)}$ 、

$\sin\beta$，$\sin\gamma$ は定数だから、MN は x の関数である。

$f(x)=\sqrt{(x\,sin\,\beta)^2+[(6-x)\,sin\,\gamma]^2-2x\,sin\,\beta\cdot(6-x)\,sin\,\gamma\cdot cos(\beta+\gamma)}$ とおき展開して整理すると、

$f(x)=\sqrt{[\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos(\beta+\gamma)]x^2-12[\sin^2\gamma+sin\,\beta\,sin\,\gamma\cos(\beta+\gamma)]x+36\,sin^2\gamma}$

$\cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha$ として書き直すと、

$f(x)=\sqrt{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\cos\alpha)x^2-12(\sin^2\gamma-sin\,\beta\,sin\,\gamma\cos\alpha)x+36\,sin^2\gamma}$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{2(sin^2\beta+sin^2\gamma-2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha)x-12(sin^2\gamma-sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha)}{2\sqrt{(sin^2\beta+sin^2\gamma-2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha)x^2-12(sin^2\gamma-sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha)x+36\,sin^2\gamma}}$$

$\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}=0$ を解いて、$x=\dfrac{6(sin^2\gamma-sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha)}{sin^2\beta+sin^2\gamma-2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha}$

余弦定理より、 ------------------------- ①

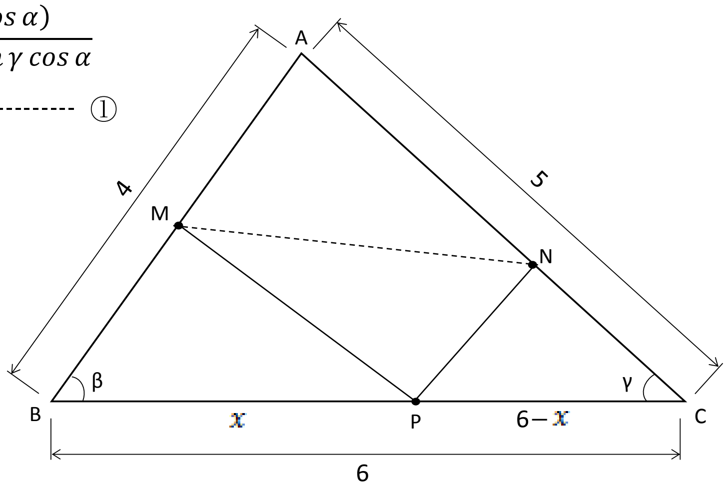


図 1

$cos\,\beta=\dfrac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4}=\dfrac{9}{16}$

$cos\,\gamma=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{3}{4}$ だから、

$sin\,\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{9}{16}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

$sin\,\gamma=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ さらに、$cos\,\alpha=-cos(\beta+\gamma)$

$=-cos\,\beta\,cos\,\gamma+sin\,\beta\,sin\,\gamma=-\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{5\sqrt{7}}{16}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1}{8}$, $sin\,\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

以上を整理して

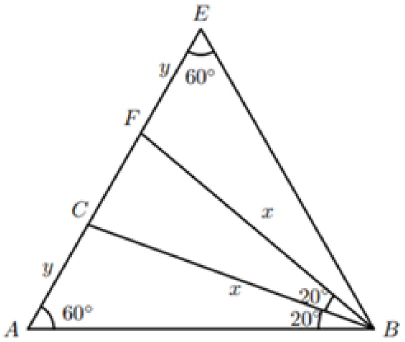
$sin\,\alpha=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$	$cos\,\alpha=\dfrac{1}{8}$
$sin\,\beta=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$	$cos\,\beta=\dfrac{9}{16}$
$sin\,\gamma=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$	$cos\,\gamma=\dfrac{3}{4}$

① 式に入れて、

$$BP=x=\frac{6(sin^2\gamma-sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha)}{sin^2\beta+sin^2\gamma-2\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,\alpha}=\frac{6\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2-\frac{5\sqrt{7}}{16}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1}{8}\right]}{\left(\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2-2\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1}{8}}=\underline{\underline{\frac{9}{4}}}\ (2.25)$$

１９９９年 第９回 日本数学オリンピック予選（第８問）

8. 三角形 ABC で, $\angle A = 60°$, $\angle B = 20°$, $AB = 1$ のとき, $\dfrac{1}{AC} - BC$ の値を求めよ.



$\dfrac{1}{AC} - BC = \dfrac{1}{y} - x$ を求めればよい。

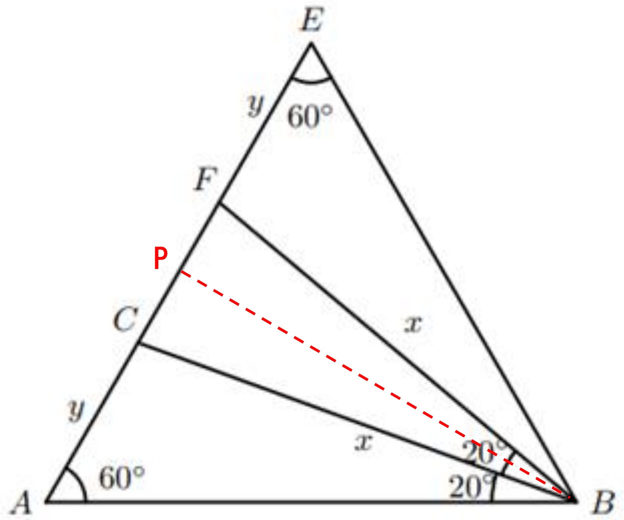
図１において、∠ＣＢＦの２等分線が辺ＡＥと交わる
∠ＡＢＰは３０°なので、

$AP = \dfrac{1}{2}$, $BP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

∠ＣＢＰは１０°なので、

$x\,sin\,10° = CP = \dfrac{1}{2} - y$ ------------------------ ①

$x\,cos\,10° = BP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ------------------------ ②



また、$x\,sin\,20° = y\,sin\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ である。

上式を２倍角の公式 $sin\,20° = 2\,sin\,10°\,cos\,10°$ で変形して①②を入れると、

$2x\,sin\,10°\,cos\,10° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \;\rightarrow\; 2x\left(\dfrac{\frac{1}{2} - y}{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2x}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ から、 $1 - 2y = xy$ を得る。

両辺を y で割って、$\dfrac{1}{y} - 2 = x$ より、$\dfrac{1}{y} - x = \underline{\underline{2}}$ これが求める $\dfrac{1}{AC} - BC$ である。

（検 算）

$sin\,20° = 0.3420$, $cos\,20° = 0.9397$ の数値を使って実際に x, y を求めると、

$x = 0.8794$, y $= 0.3473$ が得られる。

この数値で $\dfrac{1}{y} - x$ を計算すると、 $\dfrac{1}{0.3473} - 0.8794 = 2$ となり正しいことが確認できる。

１９９１年 第１回 日本数学オリンピック予選（第７問）

7. 次の式を満たす正整数 n の存在が知られている.

$$133^5+110^5+84^5+27^5=n^5$$

この n の値を決定せよ.

１９９１年の予選問題。一旦諦めた問題に再度挑戦した。

それぞれの数値を５乗した時、一位の数がどうなるか計算すると、

$133^5\to3^5\to3$，$110^5\to0^5\to0$，$84^5\to4^5\to4$，$27^5\to7^5\to7$となり、すべて一位の数に一致する。

従って、n の一位の数は、$3+0+4+7=24$ から、4 になることが分かる。

n は $133<n<200$ の範囲にあると考えられるので、$133^5+110^5+84^5+27^5$ について下３けた程度までの数値がわかれば、n が推定できるはずである。・

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ を用いて、

$133^5=(100+33)^5=100^5+5\cdot100^4\cdot33+10\cdot100^3\cdot33^2+10\cdot100^2\cdot33^3+5\cdot100\cdot33^4+33^5$

上式の第１～第４項については、百位以下の数値は０なので、第５項と第６項のみを考えればよい。

第５項の百位以下は、 $5\cdot100\cdot33^4\to\ 5\cdot100\cdot3^4\to500$

第６項の百位以下は、 $33^5=(30+3)^5=30^5+5\cdot30^4\cdot3+10\cdot30^3\cdot3^2+10\cdot30^2\cdot3^3+5\cdot30\cdot3^4+3^5$

第１～４項の百位以下の数値は０なので、$33^5\to5\cdot30\cdot3^4+3^5\to150+243=393$

よって、133^5 の百位以下は、$133^5\to500+393=893$ となる。同様の方法で、110^5，84^5，27^5 につて百位以下の数値を求めると、$110^5\to000$，$84^5\to424$，$27^5\to907$ となる。以上を整理すると、

	百位以下の数
133^5	893
110^5	000
84^5	424
27^5	907
$133^5+110^5+84^5+27^5$	224

一方 n については、一位の数値は４だから「〇〇４」と書くことができ、$133<n<200$ を考慮すると、$n=144$，154，164，174，184，194 に絞られる。上と同様の方法で百位以下の数を求めると、

	百位以下の数
144^5	224
154^5	024
164^5	824
174^5	624
184^5	424
194^5	224

となり、下３けたが一致するのは、144^5と194^5 である。

　両者の桁数を比較する。

194^5を200^5 として桁数を求めると、32×10^{10}，133^5を150^5 として桁数を求めると $\fallingdotseq 8 \times 10^{10}$ となり、$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 \ll 194^5$ であることになり、n は 194 よりずっと小さくなければならない。

　従って $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = \underline{\underline{144^5}}$ である。

（検 算）

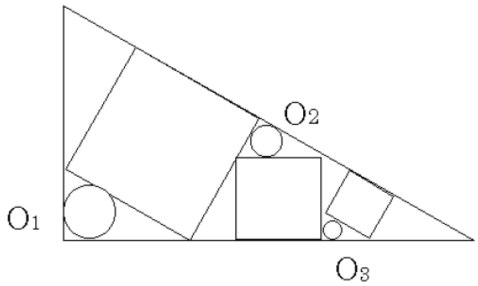
$133^5 = 41615795893$，$110^5 = 16105100000$，$84^5 = 4182119424$，$27^5 = 14348907$ から、

$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = 61917364224$

$144^5 = 61917364224$ となり一致する。

２０００年 第１０回 日本数学オリンピック予選（第１問）

１．下図のように 直角三角形内に３つの正方形と３つの円 Ｏ$_1$，Ｏ$_2$，Ｏ$_3$があり、各円はそれぞれを含む小直角三角形の内接円であり、Ｏ$_1$，Ｏ$_3$の直径の長さはそれぞれ９，４ である．円Ｏ$_2$の直径の長さを求めよ．



なお，この図は1853年に佐々木 萬蔵が陸奥の国（現在の岩手県）三陸綾里八幡神社に奉納した算額から取ったものである．

図１のとおり、直角三角形ＡＢＣに含まれる３つの正方形の一辺をそれぞれａ，ｂ，ｃ、３つの円Ｏ$_1$，Ｏ$_2$，Ｏ$_3$の半径をそれぞれｒ$_1$，ｒ$_2$，ｒ$_3$、∠ＡＣＢをθとすると、

$r_1 = \dfrac{9}{2}$，$r_3 = \dfrac{4}{2} = 2$ である。

三角形の面積Ｓ，内接円の半径ｒとサブペリメータｓ（三辺の合計の１／２）の間には $S = rs$ という関係があるので、これを円Ｏ$_1$に外接する三角形に適用する。

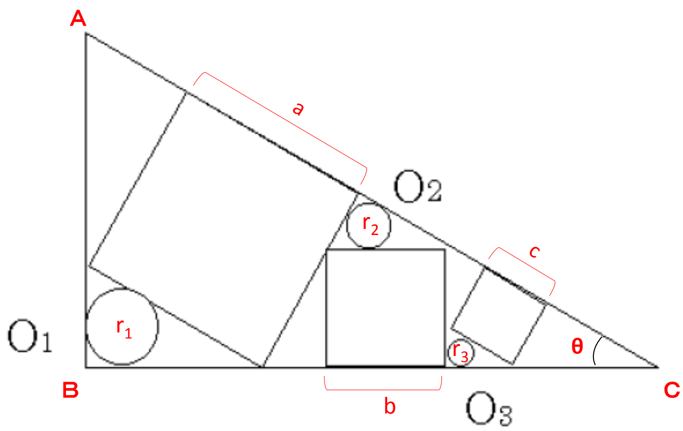


図１

当該三角形の面積をS_1，サブペリメータをs_1とすると、$S_1 = r_1 s_1$から次式が成り立つ。

$S_1 = \dfrac{1}{2} a\,sin\,\theta \cdot a\,cos\,\theta$，$s_1 = \dfrac{a + a\,sin\,\theta + a\,cos\,\theta}{2}$ から、$r_1 = a\dfrac{sin\,\theta\,cos\,\theta}{1 + sin\,\theta + cos\,\theta} = \dfrac{9}{2}$ --------------- ①

この関係は円O_2，O_3に外接する三角形にも適用できるので、それぞれ「の三角形の面積をS_2，S_3、サブペリメータをs_2，s_3とすると、$S_2 = r_2 s_2$，$S_3 = r_3 s_3$ から②③が成り立つ。

$r_2 = b\dfrac{sin\,\theta\,cos\,\theta}{1 + sin\,\theta + cos\,\theta}$，$r_3 = c\dfrac{sin\,\theta\,cos\,\theta}{1 + sin\,\theta + cos\,\theta} = 2$ ----------------------- ②③

一辺ｃの正方形を含んだ三角形について次式が成り立つ。

$c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) sin\,\theta = b$ ----------------------- ④

同様に、一辺ｃ及びｂの正方形を含んだ三角形について次式が成り立つ。

$\left[c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) + b\,cos\,\theta\right] tan\,\theta = a$ ----------------------- ⑤

さらに、三角形ＡＢＣについて次の２式が成り立つ。

$\left[c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) + b\,cos\,\theta + a(1 + tan\,\theta)\right] sin\,\theta = a\left(sin\,\theta + \dfrac{1}{cos\,\theta}\right)$ ----------------------- ⑥

$c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) + b(1 + tan\,\theta) + a\,cos\,\theta = \left[c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) + b\cos\theta + a(1 + tan\,\theta)\right] cos\,\theta$

------------ ⑦

① ～ ⑦は未知数ａ，ｂ，ｃ，ｒ$_2$，θに関する式であり、①～⑦から

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{9}{4}$，$ac = b^2$，$a = b\left(sin\,\theta + \dfrac{1}{cos\,\theta}\right)$，$r_2 = 2\dfrac{b}{c}$ が導かれる。これら４式から、

$r_2 = 3$ が求められ、O_2の直径が６であることが導かれる。

以下、題意には含まれないが、三角形の形を求めると次のとおりとなる。

これまでの計算より、$b = \dfrac{2}{3}a$，$c = \dfrac{4}{9}a$，$sin\,\theta + \dfrac{1}{cos\,\theta} = \dfrac{3}{2}$ なので、これから三角形の大きさが決定される。

$sin\,\theta + \dfrac{1}{cos\,\theta} = \dfrac{3}{2}$ を変形して $sin\,\theta + \dfrac{1}{\sqrt{1 - sin^2\,\theta}} = \dfrac{3}{2}$、これは$sin\,\theta$に関する４次方程式となり、

これを解いて、$sin\,\theta = 0.40584$ から、$\theta = 0.4179(rad) = 23.94°$ が得られる。

よって①より、$a = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{sin\,\theta\,cos\,\theta}{1 + sin\,\theta + cos\,\theta} = 28.14$，$b = \dfrac{2}{3}a = 18.76$，$c = \dfrac{4}{9}a = 12.51$

$a = 28.14$，$b = 18.76$，$c = 12.51$，$\theta = 0.4179(rad)$を⑥に入れて、

辺ＡＣの長さ、$c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) + b\,cos\,\theta + a(1 + tan\,\theta) = 104.02$

辺ＡＢの長さ、$\left[c\left(\dfrac{1}{tan\,\theta} + 1 + tan\,\theta\right) + b\,cos\,\theta + a(1 + tan\,\theta)\right] sin\,\theta = 42.22$

辺ＢＣの長さ、$\left[c\left(\frac{1}{tan\,\theta}+1+tan\,\theta\right)+b\cos\theta+a(1+tan\,\theta)\right]\cos\theta=95.07$

以上より、３辺の長さ 104.02，42.22，95.07，∠ＡＣＢ 23.94°，∠ＢＡＣ 66.06° の直角三角形であり、かなり大きな三角形ということが分かる。

２０００年 第１０回 日本数学オリンピック予選（第２問）

２．３ａ＋５ｂ (ただし, a, b は 0 以上の整数) の形で表わせない自然数の最大値を求めよ.

$a=0$、または $b=0$ とすると、$3a$，$5b$ であるから３及び５の倍数はすべて表すことができる。
$b=1$ のとき、$3a+5=3(a+1)+2$ から、３で割ると２余るすべての自然数を表すことができる。
$b=2$ のとき、$3a+10=3(a+3)+1$ から、３で割ると１余るすべての自然数を表すことができる。
従って、$a=1$，$b=1$ のとき表せる、８以上のすべての自然数を表すことができる。
また、$a=0$，$b=0$ のとき３と５、$a=2$，$b=0$ のとき６が表せるので、表すことのできない数は１，２，４，７だけである。以上より、表せない自然数の最大値は７である。

第１０回 予選（第１問）“算額”の問題は、三角関数を用いて比較的容易に解くことができるが、江戸時代に出題された問題であり、その時代にどのような方法で解いたのか非常に興味深い。
大円，中円，小円の直径がそれぞれ９，６，４と整数になるだけでも素晴らしい発見と言える。
（２０２２．０６．１３）