１３２「日本数学オリンピック問題を解いてみた（５）」

２０００年 第１０回 日本数学オリンピック予選（第３問）

3．平面上に点Oを通る直線 l と，一辺の長さ1 の正三角形OAB がある．ただし，辺ABと l は交点を持たないとする．頂点A, B から l に下ろした垂線と l との交点をそれぞれ A',B' とするとき，AA'+BB' のとりうる最大値を求めよ．ここで2点X,Y に対してXYはその間の距離を示す．

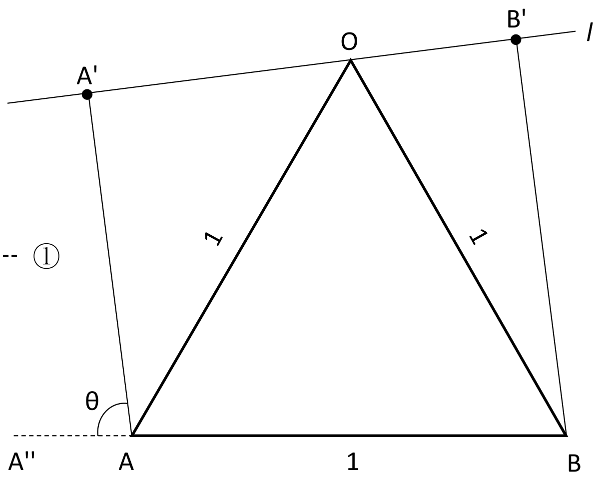


図１

図１において、$\angle A'AA''$ を θ とすると、

$$\angle A'AO = \pi - \frac{\pi}{3} - \theta = \frac{2\pi}{3} - \theta,\ \ \angle B'BO = \theta - \frac{\pi}{3}$$

と表せる。$AA'O$ と $BB'O$ は直角だから、

$$AA' + BB' = 1 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + 1 \cdot cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{--------} \ ①$$

と表せる。従って、この最大値を求めればよい。

① を θ で微分して０とおくと、

$$sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) - sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$sin\frac{2\pi}{3}cos\,\theta - cos\frac{2\pi}{3}sin\,\theta$$

$$-sin\,\theta\,cos\frac{\pi}{3} + cos\,\theta\,sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}cos\,\theta + \frac{1}{2}sin\,\theta - \frac{1}{2}sin\,\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}cos\,\theta = \sqrt{3}\,cos\,\theta = 0$$ より、

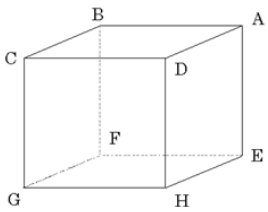
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ が得られる。この時の最大値は、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を①に入れて、$cos\dfrac{\pi}{6} + cos\dfrac{\pi}{6} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

これが $AA' + BB'$ の最大値である。

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ は、AB と $A'B'$ が平行になる場合である。

２０００年 第１０回 日本数学オリンピック予選（第５問）

5．図のような1辺の長さ1の立方体ABCD-EFGH があり，辺CD の中点をK ,辺 DH の中点をL ,辺EF の中点をM ,辺 FB の中点をN とする．八面体A-KLMN-G の体積を求めよ．



まず、四角形ＫＬＭＮの面積を求め、次に四角錐Ａ－ＫＬＭＮの高さを求めることで、八面体の体積が計算できる。

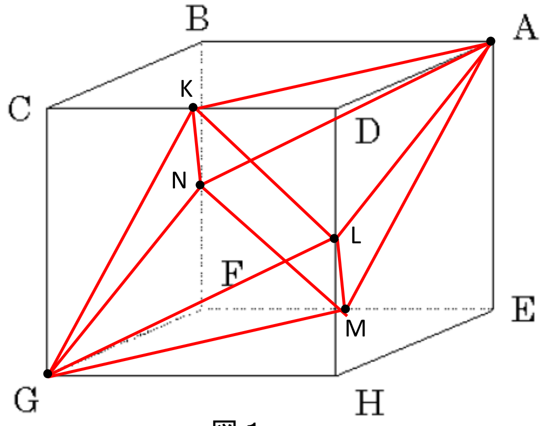


図１

$$\mathrm{KL} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{LM} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{NK} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

ここでＫＬＭＮが長方形か平行四辺形かが問題となる。対角線ＫＭとＬＮの長さを求めると、

$\mathrm{KM} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$，ＬＮ＝$\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ なので、長方形であることが分かる。

次にＡ－ＫＬＭＮの高さを求める。図２に示すように、長方形ＫＬＭＮの中心をＯとすると、$\mathrm{AO} = \sqrt{(\mathrm{AK})^2 - (\mathrm{KO})^2}$ で求められる。

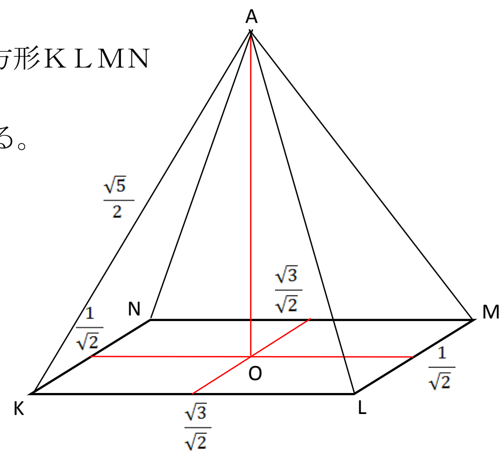


図２

$$\mathrm{AK} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}、\quad \mathrm{KO} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{AO} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上から８面体の体積Ｖは次の通りとなる。

$$\mathrm{V} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$ （立方体の体積の半分に相当する）

２０００年 第１０回 日本数学オリンピック予選（第６問）

6．n を自然数とする．有理数係数の2n 次方程式

$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots +a_{2n-1}x+a_{2n}=0$

の解は，すべて $x^2+5x+7=0$ の解にもなっている．このとき係数a_1の値を求めよ．

題意より、

$x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \cdots\cdots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ の解がすべて $x^2 + 5x + 7 = 0$ の解にもなっている、ということは、$x^2 + 5x + 7 = 0$ の根は２つなので、$x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \cdots\cdots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ の解は重根で、それぞれ $x = \alpha,\ x = \beta$ とすると、$(x-\alpha)^n(x-\beta)^n = 0$ という形でなければならない。

従って、$(x-\alpha)^n(x-\beta)^n$ を展開して、x^{2n-1} の係数 a_1 を求めればよい。

$(x-\alpha)^n(x-\beta)^n = \left(x^n - {}_nC_1x^{n-1}\alpha + {}_nC_2x^{n-2}\alpha^2 - \cdots\cdots\right)\left(x^n - {}_nC_1x^{n-1}\beta + {}_nC_2x^{n-2}\beta^2 - \cdots\cdots\right)$ -------- ①

① 式で、x^{2n-1} の係数となるのは、$x^n \cdot (-{}_nC_1x^{n-1}\alpha) + x^n \cdot (-{}_nC_1x^{n-1}\beta)$ である。

これを計算して、$x^n\cdot(-{}_nC_1x^{n-1}\alpha)+x^n\cdot(-{}_nC_1x^{n-1}\beta)=-{}_nC_1(\alpha+\beta)x^{2n-1}$ より、
$a_1=-{}_nC_1(\alpha+\beta)$、　${}_nC_1=n$，$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2+5x+7$ であるから、
$\alpha+\beta=-5$ よって、$a_1=-{}_nC_1(\alpha+\beta)=5n$ これが求める係数である。

２００１年 第１１回 日本数学オリンピック予選（第１問）

1.　2001 をある正の整数 n で割ったところ，余りは 114 になった．このような n のうち，最小のものを求めよ．ただし，$n>114$ である．

2001 を n で割った時の商を k とすると、$2001=nk+114$ と表せる。
$2001-114=nk$ より、$nk=1887=3\times17\times37$ である。
$n>114$ なので、$3\times17=51$，$3\times37=111$，$17\times37=629$ から、114 より大きいのは 629 である。
よって、最小の n は 629 となり、このとき $\dfrac{2001}{629}=3$（余り 114）という計算になる。

２００１年 第１１回 日本数学オリンピック予選（第２問）

2.　縦の長さが 8，横の長さが 7 の長方形の中に，5 つの合同な正方形が下図のように詰めこまれている．正方形の一辺の長さを求めよ．

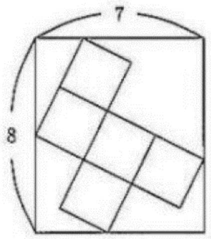


図１のように、５つの正方形の１辺の長さを x、∠ＡＰＱ＝θ とすると、次の２つの式が成り立つ。
縦方向について、$3x\cos\theta+2x\sin\theta=8$　---------------- ①
横方向について、$3x\cos\theta+x\sin\theta=7$　---------------- ②
①－② より、$x\sin\theta=1$　---------------- ③
③を②に代入して、$3x\cos\theta=6$，$x\cos\theta=2$　---------- ④
③÷④を作ると、
$\dfrac{x\sin\theta}{x\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ より、$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ これを③に入れて
$x=\dfrac{1}{\sin\theta}=\sqrt{5}$ より、正方形の一辺の長さは $\sqrt{5}$ である。

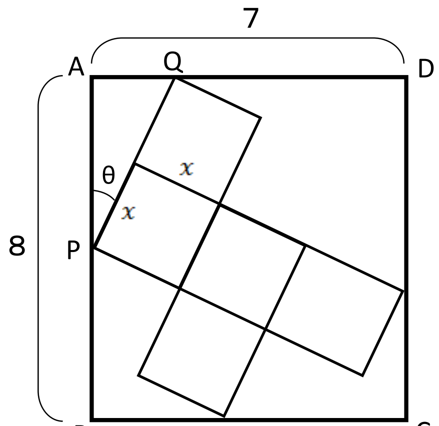


図１

２００１年 第１１回 日本数学オリンピック予選（第４問）

4. 一辺の長さ a の正三角形 ABC がある．D, E, F はそれぞれ辺 BC, CA, AB 上の点であり，三角形 DEF は一辺 の長さ b の正三角形である (ただし $b < a$)．このとき，三角形 AFE の内接円の半径の長さを求めよ．

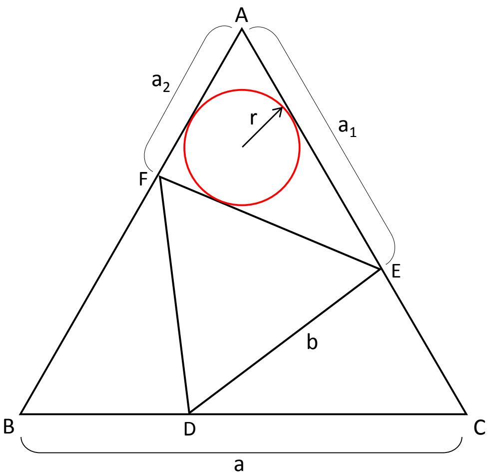


図１

図１のとおり、⊿ＡＦＥの内接円の半径をｒ、ＡＥ＝ａ$_1$
ＡＦ＝ａ$_2$とする。

⊿ＡＢＣの面積 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，⊿ＤＥＦの面積 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$

⊿ＡＥＦ，⊿ＢＤＦ，⊿ＣＤＥは合同であるから、

⊿ＡＦＥの面積 $= \dfrac{1}{3}$(⊿ＡＢＣの面積 − ⊿ＤＥＦの面積)

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}b^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - b^2)$$

一方、⊿ＡＦＥの面積 $= \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2 + b)r = \dfrac{1}{2}(a+b)\,r$ だから、

$\dfrac{1}{2}(a+b)\,r = \dfrac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - b^2)$ より、$r = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2-b^2)}{\frac{1}{2}(a+b)} = \underline{\underline{\dfrac{a-b}{2\sqrt{3}}}}$

２００１年 第１１回 日本数学オリンピック予選（第８問）

8. ２つの方程式

$$x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0$$
$$x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0$$

をともにみたす実数 x をすべて求めよ．

$x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0$ を変形して、$x^3(x^2 + 2x - 1) - 5(x^2 + 2x - 1) = 0$ から

$(x^3 - 5)(x^2 + 2x - 1) = 0$， ---------------------------- ①

この解は $x = \sqrt[3]{5}$，$x = -1 \pm \sqrt{2}$ 残る２つの解は虚根である。

$x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0$ を変形して， ---------------------------- ②

$(x^6 - 6x^3 + 5) + (4x^5 - 20x^2) + (3x^4 - 15x) = 0$、

上式の（ ）は、それぞれ次のように因数分できる。

$(x^6 - 6x^3 + 5) = (x^3 - 5)(x^3 - 1)$

$(4x^5 - 20x^2) = 4x^2(x^3 - 5)$

$(3x^4-15x)=3x(x^3-5)$

以上をまとめると、$(x^3-5)(x^3+4x^2+3x-1)$ と書ける。

$\dfrac{x^3+4x^2+3x-1}{x^2+2x-1}=(x+2)(x^2+2x-1)+1$ となり、共通因子はない。従って、２つの 方程式の共通因子は、(x^3-5) のみ である。よって、２つの方程式をともに満たす実数 x は、$\underline{\underline{x=\sqrt[3]{5}}}$ である、

２００２年 第１２回 日本数学オリンピック予選（第４問）

4. 一辺の長さが 1 の正八面体の体積 は, 一辺の長さが 1 の正四面体の体積の何倍か.

一辺１の正八面体の体積を求める。まず、正八面体の上半分の高さＯＥを求めると、

図１において、$\mathrm{OA}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{OE}=\sqrt{AE^2-OA^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

これから、正八面体の体積 $=1^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}\times2=\frac{\sqrt{2}}{3}$

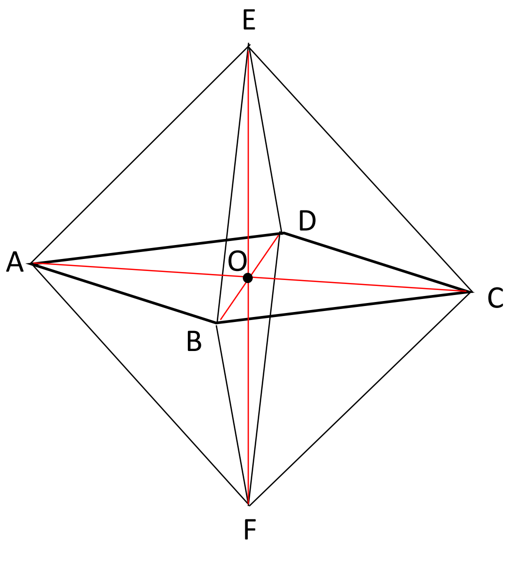


図１

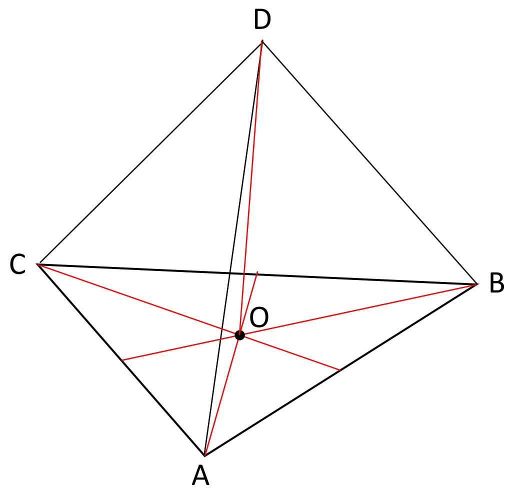


図２

次に、一辺１の正四面体の体積を求める。正四面体の高さＯＤを求めると、

図２において、$\mathrm{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{OD}=\sqrt{AD^2-OA^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

正四面体の底面の面積（⊿ABC）は $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ となるので、正四面体の体積 $=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6\sqrt{2}}$

よって体積比率は $\frac{\sqrt{2}}{3}\div\frac{1}{6\sqrt{2}}=\underline{\underline{4\text{（倍）}}}$

２００２年 第１２回 日本数学オリンピック予選（第５問）

5. m は自然数である.
$(m-2)^2$ と m^2-1 はともに 3 桁の自然数であり，それらの一方の数の百の位の数字と一の位の数字を入れ替えると他方の数に等しくなる.
m として考えられる数をすべて求めよ.

$100 \leq (m-2)^2 < 1000$ を満たす m は、$12 \leq m \leq 33$，$-29 \leq m \leq -8$

$100 \leq m^2-1 < 1000$ を満たすm は、$11 \leq m \leq 31$，$-31 \leq m \leq -11$

$(m-2)^2$と m^2-1 はともに３桁の自然数であるから、マイナスは除外され、両式に共通の範囲は、$12 \leq m \leq 31$である。一方の数の百位の数字と一位の数字を入れかえると他方の数に等しくなることから、$(m-2)^2$ の一位の数字と m^2-1 の百位の数字、さらに $(m-2)^2$ の百位の数字とm^2-1 の一位の数字は一致しなくてはならない。$(m-2)^2$ の一位，m^2-1の百位，$(m-2)^2$ の百位，m^2-1の一位の数字は比較的簡単に計算でき、$12 \leq m \leq 31$について計算したものを右表に示す。

この表で$(m-2)^2$ の一位と m^2-1 の百位、$(m-2)^2$ の百位とm^2-1 の数字が一致しているのは、「２６」のみである。確認すると、

$(26-2)^2 = 576$ 一位と百位を入れ替えると、675

$26^2-1 = 675$ と一致する。

$26^2-1 = 675$ 一位と百位を入れ替えると、576

$(26-2)^2 = 576$ と一致する。

以上より m として考えられる数は１つのみであり、「２６」が該当する。

共通の自然数	$(m-2)^2$ 一位の数	m^2-1 百位の数	$(m-2)^2$ 百位の数	m^2-1 一位の数
12	0	1	1	3
13	1	1	1	8
14	4	1	1	5
15	9	2	1	4
16	6	2	1	5
17	5	2	2	8
18	6	3	2	3
19	9	3	2	0
20	4	3	3	9
21	1	4	3	0
22	0	4	4	3
23	1	5	4	8
24	4	5	4	5
25	9	6	5	4
26	6	6	5	5
27	5	7	6	8
28	6	7	6	3
29	9	8	7	0
30	4	8	7	9
31	1	9	8	0

２００２年 第１２回 日本数学オリンピック予選（第６問）

6. 正の実数 x, y に対して，次の式の値の最小値を求めよ．

$$x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{1}{2xy}$$

$f(x,\ y)=x+y+\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{2xy}$ とおき $f(x,\ y)$ を x，y で偏微分して 0 と置きその方程式を解けばよい。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1+\frac{-2\cdot(1)}{(x+y)^2}+\frac{1}{2y}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{2}{(x+y)^2}-\frac{1}{2x^2y}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1+\frac{-2\cdot(1)}{(x+y)^2}+\frac{1}{2x}\left(-\frac{1}{y^2}\right)=1-\frac{2}{(x+y)^2}-\frac{1}{2xy^2}=0$$

①－②を作ると、

$-\dfrac{1}{2x^2y}+\dfrac{1}{2xy^2}=0$ これを解いて $x=y$，①に代入すると、$1-\dfrac{2}{(2x)^2}-\dfrac{1}{2x^3}=0$ ①

整理して、 $2x^3-x-1=0$ この方程式は $x=1$ が解であるから $(x-1)$ で割ることができて、 ②

$2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)=0$ $2x^2+2x+1=0$ について、判別式 $D=2^2-4\cdot2\cdot1=-4<0$ となり虚根である。よって実数解は $x=1$ のみである。

以上より、$f(x,\ y)$ は $x=1$，$y=1$ のとき極大値または極小値を持つ。

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ について、$x=1$，$y=1$ 近傍の符号を調べると、

$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ において、 $\dfrac{\partial f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\partial x}=1-\dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)}=-5<0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は x，y についての対称式なので、$x=y=\dfrac{1}{2}$ を入れた値は変わらず $\dfrac{\partial f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\partial y}=-5<0$

$x=2$，$y=2$ において、$\dfrac{\partial f(2,\ 2)}{\partial x}=1-\dfrac{2}{(2+2)^2}-\dfrac{1}{2\cdot2^2\cdot2}=\dfrac{13}{16}>0$ 、同様に $\dfrac{\partial f(2,\ 2)}{\partial y}=\dfrac{13}{16}>0$

$x=1$，$y=1$ より小さい値における偏微分係数がマイナス、大きい値における偏微分係数がプラスであるから、極値は最小値である。その最小値は $f(x,\ y)$ に $x=1$，$y=1$ を入れて、

$f(1,\ 1)=1+1+\dfrac{2}{1+1}+\dfrac{1}{2\cdot1\cdot1}=\underline{\underline{\dfrac{7}{2}}}$ これが求める値である。

２００２年 第１２回 日本数学オリンピック予選（第８問）

8. 三角形 ABC があり，$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする．
$\angle BAC : \angle BCA = 2:3$ であり，さらに $AB+CD=AC$ である．
このとき $\angle BAC$ は何度か．ただし，2 点 X, Y に対し，線分 XY の長さを XY で表している．

問題を図にすると図１のようになる。

図１の三角形ＡＢＣにおいて ＢＣ＝ａ，ＣＡ＝ｂ，ＡＢ＝ｃ
∠ＣＡＢ＝x，∠ＡＢＣ＝β，∠ＡＣＢ＝γ、ＢＤ＝a_1
ＣＤ＝a_2とすると、

与条件は、$\gamma=\dfrac{3}{2}x$，$c+a_2=b$ であり、このとき x を求めよという問題である。

最初、この問題を解くのに、正弦定理，余弦定理などを使い

$$c=b\left(1-\frac{sin\frac{x}{2}}{sin(2x)}\right),\quad a_1=c\frac{sin\frac{x}{2}}{sin\left(\beta+\frac{x}{2}\right)}$$

$$a_2=b\frac{sin\frac{x}{2}}{sin\left(\gamma+\frac{x}{2}\right)},\quad cos\frac{x}{2}=\frac{c+\sqrt{c^2+4a^2}}{4a}$$

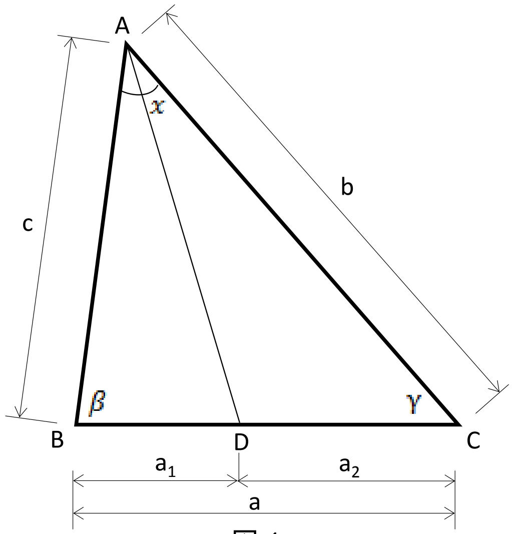


図１

などの式を立てて計算していたが埒が明かず、難しい問題だなぁーと思っていた。そんな時、たまたま散髪に行き頭の中で考えていたら、図２を思いついた。

ＡＤは∠ＢＡＣの２等分線だから、ＡＤを中心に◿ＡＢＤを折り返すと、ＢはＥに移る。

◿ＡＢＥと◿ＤＢＥはいずれも二等辺三角形であり、ＡＥ＝ｃだから、$c+a_2=b$ から $b-c=a_2$ であり ＣＥ＝a_2 となることがわかる。これから、◿ＣＤＥはＣＤ＝ＣＥ＝a_2の二等辺三角形である。

（図２はスケールが合っていないので注意）

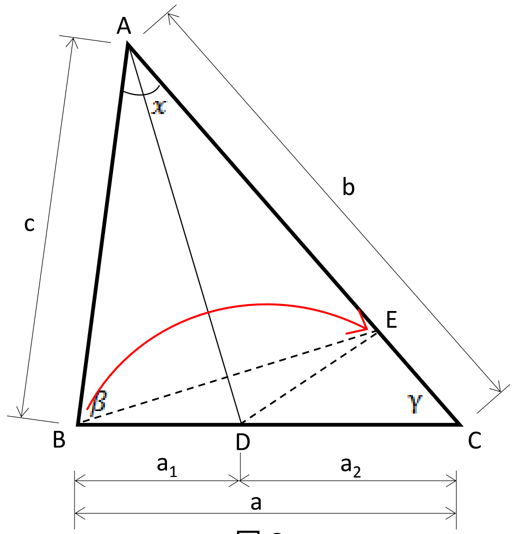


図２

$$\beta=\pi-\gamma-x=\pi-\frac{3}{2}x-x=\pi-\frac{5}{2}x$$

$\angle ABE=\angle AEB=\dfrac{\pi-x}{2}$ より、$\angle DBE=\angle DEB=\beta-\angle AB=\dfrac{\pi}{2}-2x,\quad =\pi-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{\pi-x}{2}$

これから、$\angle CDE=\angle CED=\pi-\angle AEB-\angle DEB=\pi-\dfrac{\pi-x}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=\dfrac{5}{2}x$

よって、⊿ＣＤＥにおいて、内角の和は、

$\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}x=\frac{13}{2}x$ となり、これが π に等しいことから、

$x=\frac{2\pi}{13}$ となり、これが解である。

図３は、ＡＢ＝５として計算したときの諸元を示す。
実際は扁平な形をした三角形であることがわかる。

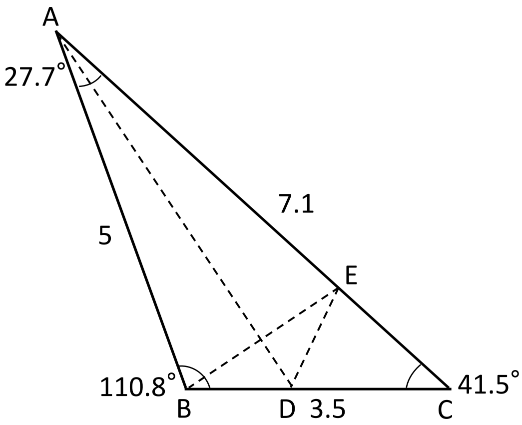


図３

２００２年 第１２回 予選（第８問）は、ＡＤを中心にＡＢＤを折り返すことに気付け、という問題だったのである。実際、このことに気付いて頭の中で角度を計算し、⊿ＣＤＥの内角の合計が $\frac{13}{2}x$ と計算でき、何と！暗算で $x=\frac{2\pi}{13}$ を求めることができた。

これまで、多くの問題を解いてきたが、中には問題に隠されているキーを見つけることで、もっと簡単に解けた問題があったのかも知れない。（２０２２．０６．２１）