１３３「日本数学オリンピック問題を解いてみた（６）」

２００３年 第１３回 日本数学オリンピック予選（第４問）

4. 3 つの実数 x, y, z が

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=3 \\ x^5+y^5+z^5=15 \end{cases}$$

をみたす．このとき，$x^2+y^2+z^2$ の値を求めよ．

$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+[-(x+y)]^3=x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$

$=-3xy(x+y)=3$ より、$xy(x+y)=-1$

$x+y=a$，$xy=b$ とおくと、$ab=-1$ ---------------- ①

$x^5+y^5+z^5=x^5+y^5+[-(x+y)]^5=x^5+y^5-(x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5)$

$=-(5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4)=-5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)$

$=-5xy(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+5xy(x^2y+xy^2)=-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)$

$x^5+y^5+z^5=15$ から、$-5a^3b+5ab^2=-5ab(a^2-b)=15$，$ab(a^2-b)=-3$

$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+[-(x+y)]^2=(x+y)^2-2xy+(x+y)^2=2(a^2-b)$ ---------------- ②

よって、$x^2+y^2+z^2=2(a^2-b)$ を求めればよい。

①より、$ab=-1$ を②に入れて、$ab(a^2-b)=-(a^2-b)=-3$ であるから、$a^2-b=3$ ------------- ③

以上より、$x^2+y^2+z^2=2(a^2-b)=2\cdot 3=\underline{\underline{6}}$ （これが求める解である）

２００３年 第１３回 日本数学オリンピック予選（第５問）

5. 平行四辺形 $ABCD$ において，$\angle BAC$ の二等分線と線分 BC との交点を E としたとき，$BE+BC=BD$ が成立するという．このとき，$\dfrac{BD}{BC}$ の値を求めよ．
ただし，2 点 X, Y に対し，線分 XY の長さを XY で表している．

図１に示す平行四辺形において、

ＢＣ＝ａ，ＡＢ＝ｂ，ＢＤ＝ｍ，ＡＣ＝ｎ，

∠ＡＢＣ＝αとすると、余弦定理より、

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=n^2$ ---------------- ①

$a^2+b^2+2ab\cos\alpha=m^2$ ---------------- ②

①+②を作ると、

$2(a^2+b^2)=m^2+n^2$ ---------------- ③

∠ＢＡＥ＝∠ＣＡＥから、

$BE=a\dfrac{b}{b+n}$，$EC=a\dfrac{n}{b+n}$

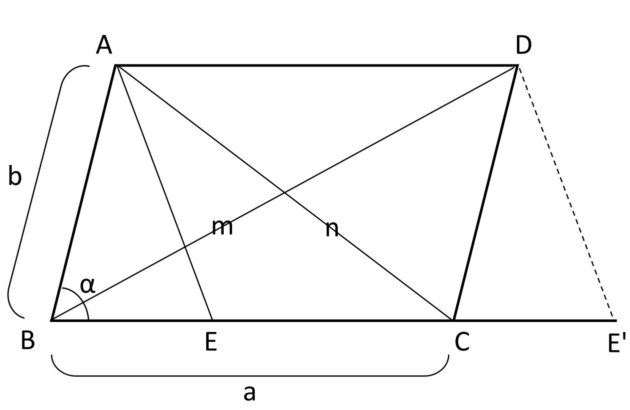

図１

ＢＣの延長上にＡＥ平行ＤＥ’となる点Ｅ’をとると、題意よりＢＥ＝ＣＥ’から、ＤＥ’ ＝ ｍである。よって、$m=2a\dfrac{b}{b+n}+a\dfrac{n}{b+n}=a\left(\dfrac{2b+n}{b+n}\right)=a\left(1+\dfrac{b}{b+n}\right)$

以上より、$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{m}{a}=\dfrac{a\left(1+\dfrac{b}{b+n}\right)}{a}=1+\dfrac{b}{b+n}$，従って、$\dfrac{b}{b+n}$ が求められればよい。

$m=a\left(1+\dfrac{b}{b+n}\right)$ を③に入れると、

$$2(a^2+b^2)=a^2\left(1+\frac{b}{b+n}\right)^2+n^2,\ 2(a^2+b^2)=\frac{a^2(2b+n)^2}{(b+n)^2}+n^2$$

$$2(a^2+b^2)=\frac{n^4+2bn^3+(a^2+b^2)n^2+4a^2bn+4a^2b^2}{(b+n)^2}$$

この式を n について整理して因数分解すると、$(2b^2-n^2)(n-a+b)=0$
これを解いて、$n=a-b$，$n=\sqrt{2}\,b$ 図１より明らかに、$n=a-b$ となることはないので、$n=\sqrt{2}\,b$ が求めるものである。

$\dfrac{BD}{BC}=1+\dfrac{b}{b+n}$ に入れて、$\dfrac{BD}{BC}=1+\dfrac{b}{b+\sqrt{2}\,b}=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\left(-1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$

よって、$\dfrac{BD}{BC}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}$

２００３年 第１３回 日本数学オリンピック予選（第９問）

9. $BC=7$, $CA=8$, $AB=5$ であるような三角形 ABC がある．点 P, Q, R はそれぞれ線分 BC, CA, AB 上の端点でない点であり，$\angle QPR=60^\circ$ をみたしつつ動く．このとき，QR の最小値を求めよ．
ただし，2 点 X, Y に対し，線分 XY の長さを XY で表している．

図１のとおり三角形ＡＢＣにおいて、ＡＢ＝５，ＢＣ＝７ＣＡ＝８、∠ＣＡＢ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＢＣＡ＝γ とする。三角形ＰＱＲにおいて∠ＱＰＲ＝６０°　（$\frac{\pi}{3}$）である。

題意より点Ｐは、∠ＱＰＲ＝６０°を保ちながら辺ＢＣ上を動く。ＢＰ＝x とすると、この時∠ＢＰＲによって、点Ｑと点Ｒの位置は変化するので、ＱＲの長さは変化する。

∠ＢＰＲ＝θ として、この問題を x と θ の２変数関数として解く必要があるが、複雑になり過ぎてしまうので、求める最小値は特殊な場合と想定し検討を進める。

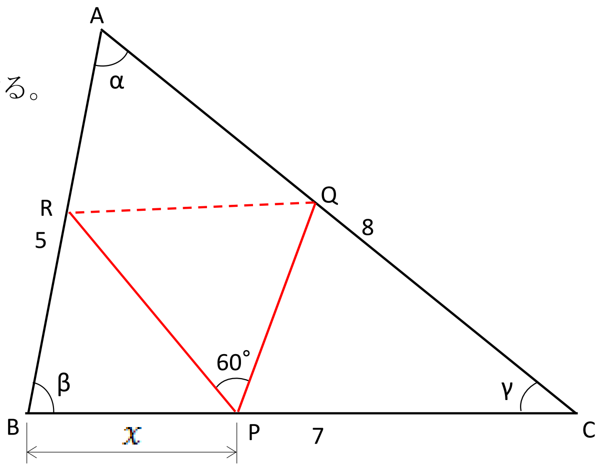

図１

⊿ＰＱＲに正弦定理を適用すると、

$\dfrac{QR}{sin\frac{\pi}{3}} = 2\,r$（$r$ は⊿ＰＱＲの外接円半径）から、$QR = 2r\,sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,r$ ---------------- ①

従って、ＱＲの長さは⊿ＰＱＲの外接円の半径によって決まる。
以上より、⊿ＰＱＲの外接円が最小となる場合が分かればよい。

　図２に示すように、ＱＲの長さは線ＱＲが∠ＣＡＢの２等分線に直角となる場合（図２で Q′R′ の位置のとき）が最小になるのは明らかである。このことから、⊿ＰＱＲの辺ＱＲがQ′R′の位置となる場合で計算する。

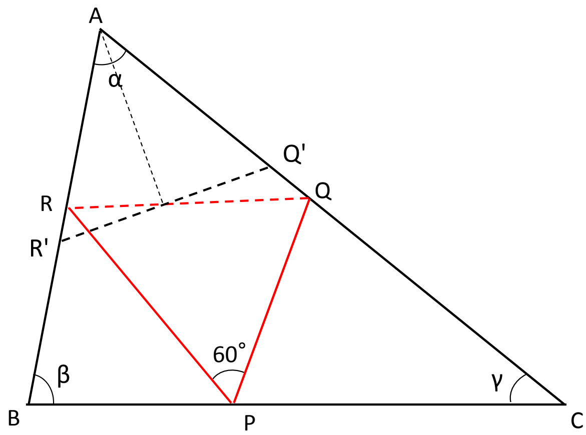

図２

　⊿ＡＢＣに余弦定理を適用して、

$$cos\,\alpha = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8} = \frac{1}{2} \text{ より、} \alpha = 60^\circ \ \left(=\frac{\pi}{3}\right)$$

$$cos\,\beta = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot5\cdot7} = \frac{1}{7}\ ,\quad sin\,\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$cos\,\gamma = \frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8} = \frac{11}{14}\ ,\quad sin\,\gamma = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$\alpha = 60^\circ$ から、$\angle \mathrm{AQ'R'} = \angle \mathrm{AR'Q'} = 60^\circ$ なので、
⊿$\mathrm{AQ'R'}$ は正三角形である。

　次に、図３に示すように $\angle \mathrm{Q'PR'} = 60^\circ$ なので、
三角形 $\mathrm{PQ'R'}$の外接円の半径は、三角形 $\mathrm{AQ'R'}$の外接円の半径と同じである。

$\angle \mathrm{PR'Q'} = \theta$ として、三角形 $\mathrm{PQ'R'}$の外接円の半径が最小となる θ を求める。

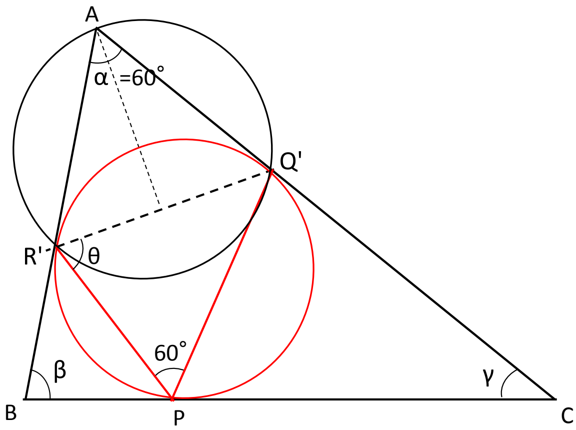

図３

　⊿$\mathrm{PQ'R'}$ に正弦定理を適用すると、

$$\frac{PQ'}{sin\,\theta} = \frac{PR'}{sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)} = 2r \qquad \text{----------------} \ ②$$

⊿BPR' 及び⊿CPQ'に正弦定理を適用すると、$BR' = 5-\sqrt{3}r$，$CQ' = 8-\sqrt{3}r$ であるから、

$$\frac{PR'}{sin\,\beta} = \frac{5-\sqrt{3}r}{sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta-\beta\right)},\quad \frac{PQ'}{sin\,\gamma} = \frac{8-\sqrt{3}r}{sin(\theta+\gamma)} \qquad \text{----------------} \ ③④$$

②③④から、PR'と PQ'を消去すると、

$$\frac{2r\,sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{sin\,\beta} = \frac{5-\sqrt{3}r}{sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta-\beta\right)},\quad \frac{2r\,sin\,\theta}{sin\,\gamma} = \frac{8-\sqrt{3}r}{sin(\theta+\gamma)}$$

これを整理すると次式⑤⑥が得られる。

$$r = \frac{8\,sin\,\gamma}{2\,sin\,\theta\,sin(\theta+\gamma)+\sqrt{3}\,sin\,\gamma},\quad r = \frac{5\,sin\,\beta}{2\,sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta-\beta\right)+\sqrt{3}\,sin\,\beta} \qquad \text{----------------} \ ⑤⑥$$

⑤⑥に上で求めた

$sin\,\beta = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，　$cos\,\beta = \dfrac{1}{7}$，　$sin\,\gamma = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，　$cos\,\gamma = \dfrac{11}{14}$ を入れて整理すると⑦⑧が得られる。

$$r = \frac{40\sqrt{3}}{2\,sin\,\theta\left(11\,sin\,\theta + 5\sqrt{3}\,cos\,\theta\right) + 15} \quad \text{------------------------------ ⑦}$$

$$r = \frac{40\sqrt{3}}{\left(sin\,\theta + \sqrt{3}\,cos\,\theta\right)\left(13\,sin\,\theta - 3\sqrt{3}\,cos\,\theta\right) + 24} \quad \text{------------------------------ ⑧}$$

⑦⑧は⊿$PQ'R'$ の外接円の半径を$\theta(\angle PR'Q')$ で表した式であり、これから r の最小値を求めればよい。⑦について、分母の$2\,sin\,\theta\left(11\,sin\,\theta + 5\sqrt{3}\,cos\,\theta\right)$ が最大の時 r が最小となるので、⑦を微分して０とおくと、$11\,sin\,2\theta + 5\sqrt{3}\,cos\,2\theta = 0$　これを解いて、

$sin\left(2\theta + tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{11}\right) = 0$ より、$2\theta + tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{11} = 0$ または π,　$\theta > 0$　だから、

$2\theta + tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{11} = \pi$，ここで $tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{11} = cos^{-1}\dfrac{11}{14} = \beta$ に注意すると、$\theta = \dfrac{\pi - \beta}{2}$ が解である。

$cos\,\beta = \dfrac{1}{7}$ よりβ を計算すると、$\beta = 1.427(81.79^\circ)$なので、$\theta = \dfrac{\pi - \beta}{2} = 1.2373\,(70.89^\circ)$ となる。

$\theta = \dfrac{\pi - \beta}{2}$ を⑦に入れて、$r = \dfrac{40\sqrt{3}}{2\,sin\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right)\left[11\,sin\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) + 5\sqrt{3}\,cos\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right)\right] + 15}$

$= \dfrac{40\sqrt{3}}{2\,cos\frac{\beta}{2}\left(11\,cos\frac{\beta}{2} + 5\sqrt{3}\,sin\frac{\beta}{2}\right) + 15}$，　$cos\,\beta = \dfrac{1}{7}$ より、半角の公式を用いて $cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，

$sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ となるので、$r = \dfrac{40\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}}\left(11 \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} + 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) + 15} = \sqrt{3}$

以上より $r = \sqrt{3}$ を①に入れると、$QR = 2r\,sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,r = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{3}}$ これがＱＲの最小値である。

　問題には関係ないが、諸元を計算すると図４の通りとなる。⊿ＡＱＲは正三角形、⊿ＢＰＲと⊿ＣＰＱはともに二等辺三角形である。

　ここで気付くのは、⊿ＰＱＲの外接円は、もとの三角形ＡＢＣの内接円になっているということである。

　つまり、⊿ＰＱＲが三角形ＡＢＣの内接円となる時、外接円が最小となることがわかる。

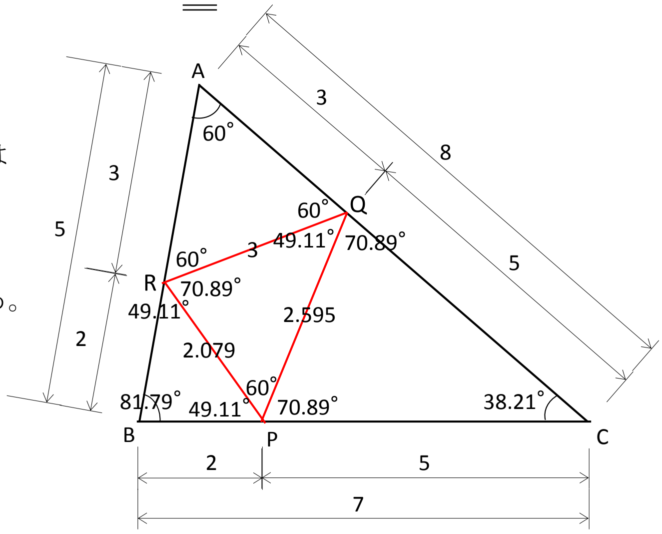

図４

ここに示したような解き方でこの問題を解いたのでは、とても時間がかかり過ぎてしまう。実際にはもっと簡単な方法があるはずだが、気付くことはできなかった。

> １９９５年 第５回 日本数学オリンピック本選（第３問）
>
> **3.** 凸5角形 $ABCDE$ において, AC, AD と BE との交点をおのおの S, R とし, CA, CE と BD との交点をおのおの T, Pとする. また CE, AD の交点を Q とする. $\triangle ASR$, $\triangle BTS$, $\triangle CPT$, $\triangle DQP$, $\triangle ERQ$ の面積がすべて 1 のとき,
>
> (1) 5角形 $PQRST$ の面積はいくらか.
>
> (2) 5角形 $ABCDE$ の面積はいくらか.

一旦諦めていた問題に再挑戦。
問題を図にすると、右図（図１）ようになる。
　右図で、塗りつぶした三角形の面積がすべて１のとき、五角形ＰＱＲＳＴとＡＢＣＤＥの面積を求めよという問題である。
　再挑戦したのは、塗りつぶした三角形の面積が全て等しいのは、ＡＢＣＤＥが正五角形の場合に限られることに気付いたためである。
　そのことを証明すれば、正五角形の場合でそれぞれの五角形の面積を計算すればよい。
試験は解答のみ記せば良いので、ＡＢＣＤＥが正五角形の場合に限られることを証明する必要はない。

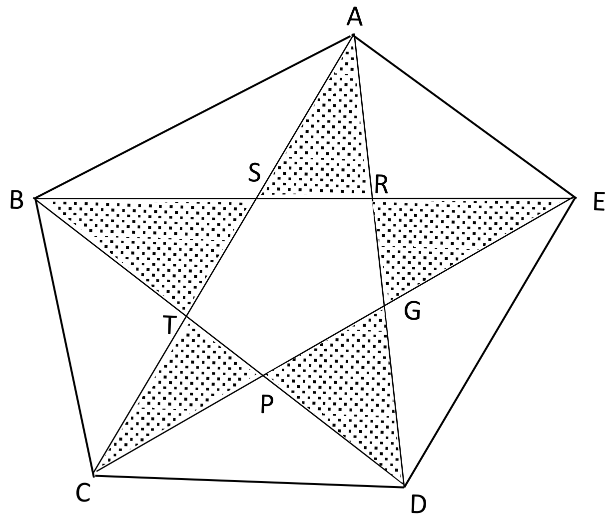

図１

　図２に示す三角形ＡＳＱとＥＱＲにおいて、
それぞれの面積が等しければ∠ＡＲＳ＝∠ＥＲＱから、その角を挟み、対応する辺ＡＲとＥＱ，ＳＲとＱＲは等しくなければならない。
その結果、ＡＥとＳＱは平行にならなければならないが、図から明らかなように、正五角形の場合以外平行にはならない。このことは、他の隣接する三角形にも共通して言えるので塗りつぶした三角形の面積が全て等しいのは、ＡＢＣＤＥが正五角形の場合に限られる。

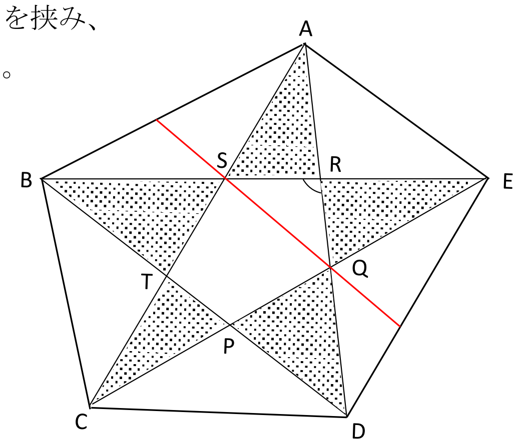

図２

　以上より、互角形ＡＢＣＤＥが、正五角形の場合として、面積を計算する。
　図３において、正五角形の一辺を a とする。
三角形ＡＢＳにおいて、

∠ＡＳＢ $=\dfrac{3}{5}\pi$， $AS=BS$ から、余弦定理より $2\cdot AS^2-2\cdot AS^2\cos\dfrac{3}{5}\pi=a^2$ 、これから

$AS = \sqrt{\dfrac{a^2}{2\left(1-\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)}}$ ， $\cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ だから、

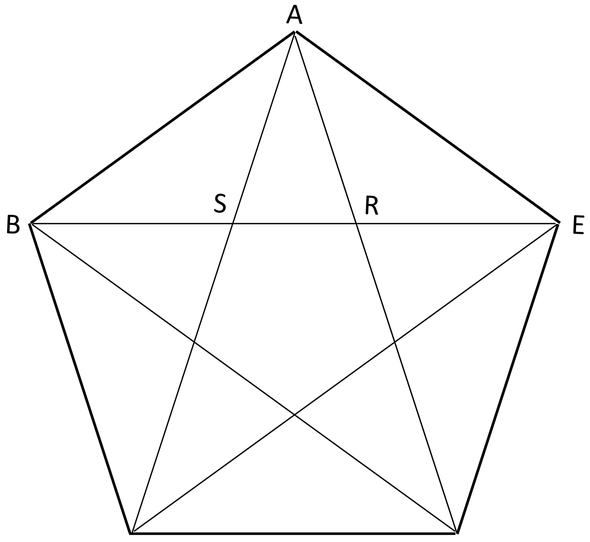

図３

$AS = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}a$ を得る。

三角形ＡＢＲに着目し、$AS = BS = AR = b$ とすると、

$RS = \dfrac{b}{a+b}(RS+b)$ より、$RS = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}a\right)^2}{a}$

$= \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a$，三角形ＡＲＳの面積をＳとすると、

$S = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}a \cdot sin\dfrac{2\pi}{5} \cdot \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}a = \dfrac{\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{8}a^2$ 、題意より $S = 1$ であるから、

$a = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{5}}(= 2.9846)$

一辺 L の正五角形の面積は、$\dfrac{L^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ で与えられるので、五角形ＰＱＲＳＴの面積は、

$$\frac{\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a\right)^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(2^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{\frac{25+11\sqrt{5}}{5}}\right)^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

五角形ＰＱＲＳＴの面積 $= \dfrac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\dfrac{1}{10}\left(25+10\sqrt{5}\right)\left(25+11\sqrt{5}\right)} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

五角形ＡＢＣＤＥの面積は＝$\dfrac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot \left(2^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{5}}\right)^2 = \underline{\underline{\dfrac{15+7\sqrt{5}}{2}}}$

２つの正五角形の面積比 $= \dfrac{\text{PQRST の面積}}{\text{ABCDE の面積}} = \dfrac{\dfrac{15+7\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}(= 6.85)$

計算途中で複雑な無理数が出て来るので、正しい解き方かどうか疑問が残る。ただ、内部に形成される三角形の面積がすべて「１」ということから導かれた結果なので、この問題は計算力が問われる問題ともいえる。

２００１年 第１１回 日本数学オリンピック本選（第５問）

５．平面上に三角形ＡＢＣと三角形ＰＱＲがあり、以下の２つの条件（１）、（２）を満たしている。

（１）点Ａは線分ＱＲの中点であり、点Ｐは線分ＢＣの中点である。
（２）直線ＱＲは∠ＢＡＣの二等分線であり、直線ＢＣは∠ＱＰＲの二等分線である。

このとき、ＡＢ＋ＡＣ＝ＰＱ＋ＰＲとなることを示せ。ただし、ここでＸＹとは線分ＸＹの長さを表すものとする。

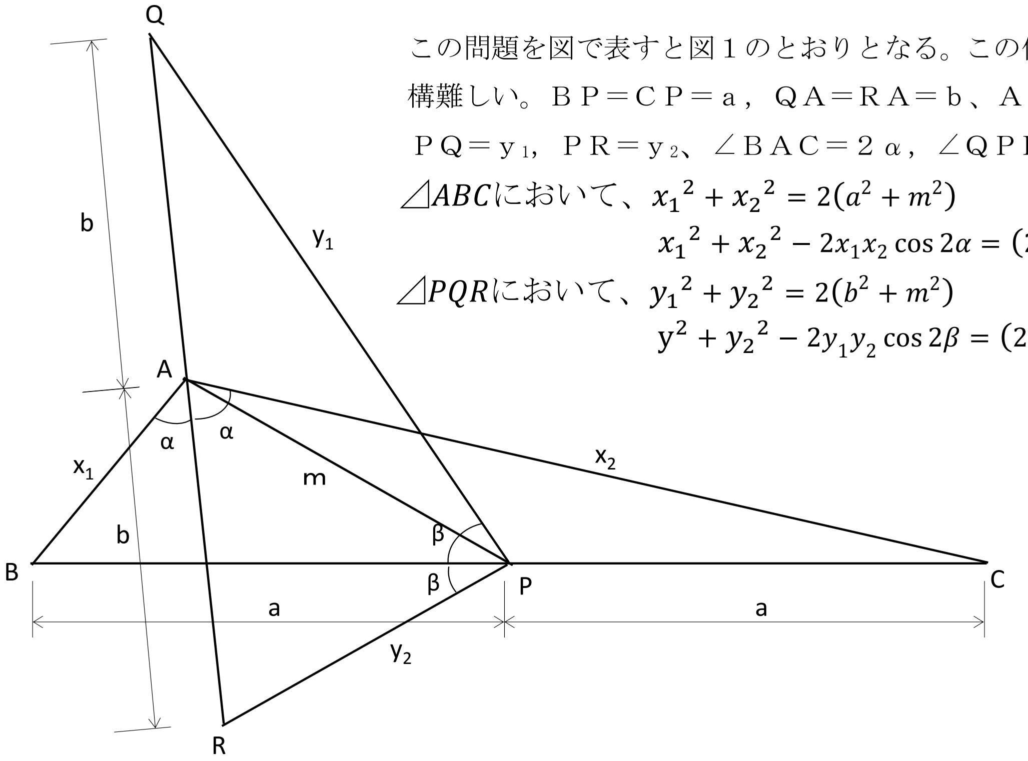

図１

この問題を図で表すと図１のとおりとなる。この作図をするだけでも結構難しい。ＢＰ＝ＣＰ＝ａ，ＱＡ＝ＲＡ＝ｂ、ＡＢ＝x_1，ＡＣ＝x_2，ＰＱ＝y_1，ＰＲ＝y_2、∠ＢＡＣ＝２α，∠ＱＰＲ＝２βとする。

$\triangle ABC$において、$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(a^2 + m^2)$　（中線定理）①

$x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2x_1x_2\cos 2\alpha = (2a)^2$　（余弦定理）②

$\triangle PQR$において、$y_1{}^2 + y_2{}^2 = 2(b^2 + m^2)$　（中線定理）③

$y^2 + y_2{}^2 - 2y_1y_2\cos 2\beta = (2b)^2$　（余弦定理）④

①　×２－②，③×２―④を作ると、

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2\cos 2\alpha = 4m^2$　---------------------------　⑤

$y_1{}^2 + y_2{}^2 + 2y_1y_2\cos 2\beta = 4m^2$　---------------------------　⑥

これから、$x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2\cos 2\alpha = y_1{}^2 + y_2{}^2 + 2y_1y_2\cos 2\beta$　------------------　⑦

⑤⑥式の示す幾何学的意味を表す図を描くと図２，３のようになる。図２についていえば、⊿ＡＢＣの辺ＡＣの延長上にＡＣ＝ＡＣ’となる点Ｃ’を取る。⊿ＡＰＣと⊿Ｃ’ＢＣは相似であり、Ｃ’Ｂ＝２ｍである。⊿ＡＢＣに余弦定理を適用したのが②であり、⊿ＡＢＣ’に余弦定理を適用すると、$x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2\cos(\pi - 2\alpha) = x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2x_1x_2\cos 2\alpha = 4m^2$ となり、$2\alpha > \frac{\pi}{2}$ のとき $a > m$

となり⑤が成り立つ。

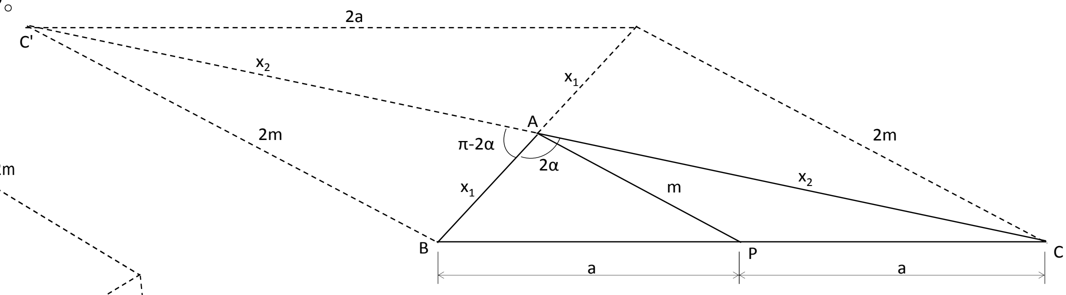

図２

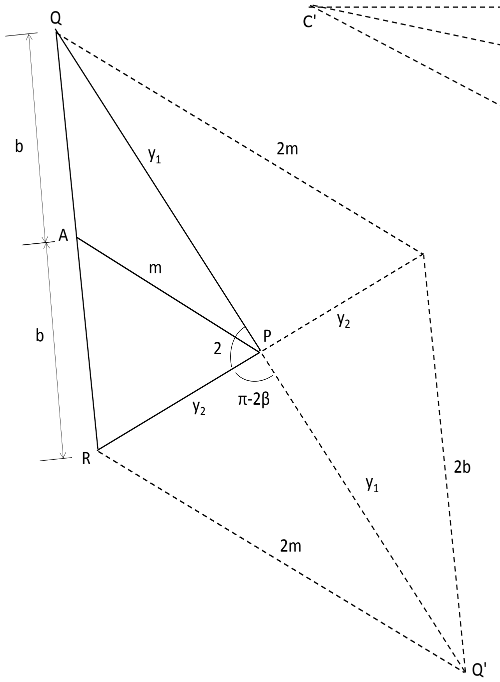

図３

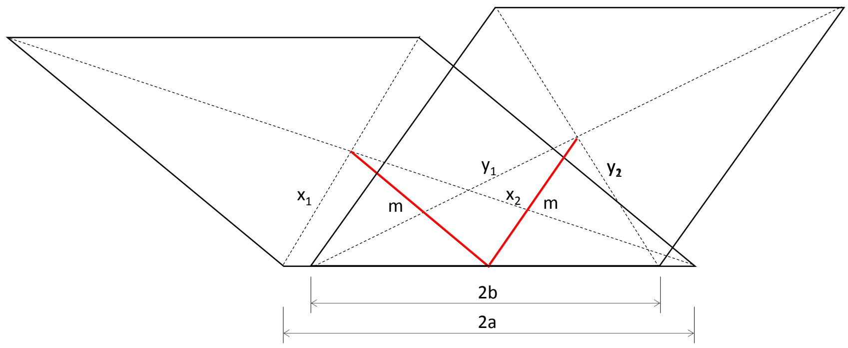

図４

これまで得られたことから$x_1+x_2=y_1+y_2$を証明しようと、図４のように、２つの平行四辺形を並べ、x_1，x_2，y_1，y_2，α，β，mの関係を導こうとしたができなかった。

未知数が x_1，x_2，y_1，y_2，α，β，mであり、①～④式だけでは不足である。

図５において∠ＢＡＣの２等分線をＡＰ’とすると、

$BP'=2a\dfrac{x_1}{x_1+x_2}$，$CP'=2a\dfrac{x_2}{x_1+x_2}$，$AP'=b\dfrac{y_1-y_2}{y_1+y_2}$ だから、

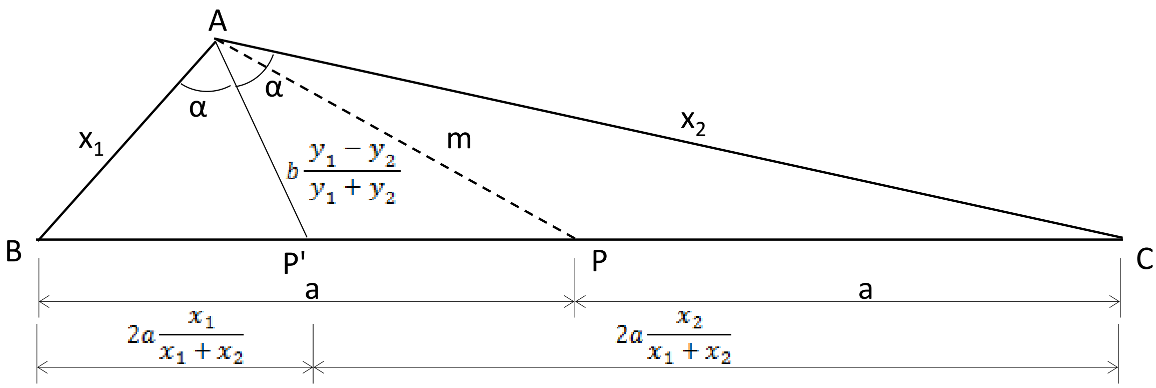

図５

⊿ＡＢＰ’，⊿ＡＣＰ’に対して余弦定理を適用して、

$$x_1{}^2+\left(b\frac{y_1-y_2}{y_1+y_2}\right)^2-2x_1\left(b\frac{y_1-y_2}{y_1+y_2}\right)\cos\alpha=\left(2a\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^2 \qquad \text{-----------------------------} ⑧$$

$$x_2{}^2+\left(b\frac{y_1-y_2}{y_1+y_2}\right)^2-2x_2\left(b\frac{y_1-y_2}{y_1+y_2}\right)\cos\alpha=\left(2a\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^2 \quad \text{----------------------------} ⑨$$

図６において、∠ＱＰＲの２等分線をＡＱ’とすると、

$QQ'=2b\dfrac{y_1}{y_1+y_2}$，$RQ'=2b\dfrac{y_2}{y_1+y_2}$，$PQ'=a\dfrac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$ だから、

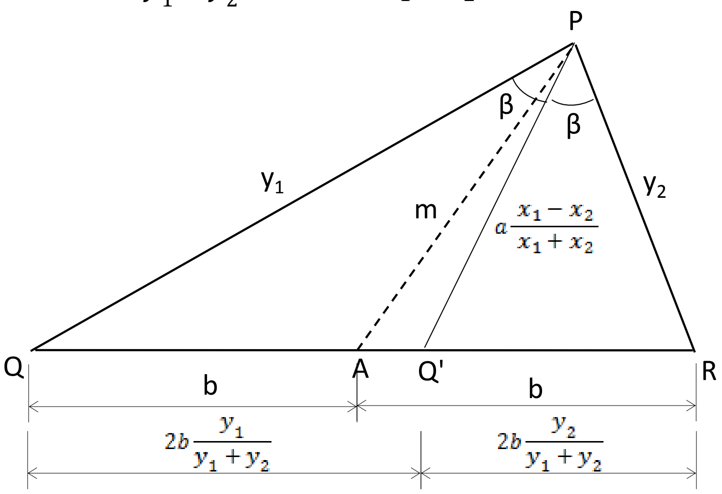

図６

$$y_1{}^2+\left(a\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right)^2-2y_1\left(a\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right)\cos\beta=\left(2b\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)^2 \quad \text{----------------------------} ⑩$$

$$y_2{}^2+\left(a\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right)^2-2y_2\left(a\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right)\cos\beta=\left(2b\frac{y_2}{y_1+y_2}\right)^2 \quad \text{----------------------------} ⑪$$

⑧⑨より、$\cos\alpha$ を消去して、$\dfrac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}a^2+\left(\dfrac{y_1-y_2}{y_1+y_2}\right)^2b^2=x_1x_2$ ---------------------------- ⑫

⑩⑪より、$\cos\beta$ を消去して、$\left(\dfrac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right)^2a^2+\dfrac{4y_1y_2}{(y_1+y_2)^2}b^2=y_1y_2$ ---------------------------- ⑬

⑫⑬を変形して、

$\dfrac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}a^2+\left[1-\dfrac{4y_1y_2}{(y_1+y_2)^2}\right]b^2=x_1x_2$ より、 $\dfrac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}a^2-\dfrac{4y_1y_2}{(y_1+y_2)^2}b^2=x_1x_2-b^2$

$\left[1-\dfrac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}\right]a^2+\dfrac{4y_1y_2}{(y_1+y_2)^2}b^2=y_1y_2$ より、 $-\dfrac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}a^2+\dfrac{4y_1y_2}{(y_1+y_2)^2}b^2=y_1y_2-a^2$

両式を加えると左辺は０となり、次式が導かれる。

$x_1x_2+y_1y_2=a^2+b^2$ ---------------------------- ⑭

さらに⑫⑬より、

$$\frac{a^2}{y_1y_2}=\frac{(x_1+x_2)^2[4(x_1x_2+y_1y_2)-(y_1+y_2)^2]}{-(x_1+x_2)^2(y_1+y_2)^2+4[x_1x_2(y_1+y_2)^2+y_1y_2(x_1+x_2)^2]} \quad \text{----------------------------} ⑮$$

$$\frac{b^2}{x_1x_2}=\frac{(y_1+y_2)^2[4(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1+x_2)^2]}{-(x_1+x_2)^2(y_1+y_2)^2+4[x_1x_2(y_1+y_2)^2+y_1y_2(x_1+x_2)^2]} \quad \text{----------------------------} ⑯$$

⑮において、$y_1y_2 = a^2$ と仮定すると、

$$(x_1+x_2)^2[4(x_1x_2+y_1y_2)-(y_1+y_2)^2] = -(x_1+x_2)^2(y_1+y_2)^2+4[x_1x_2(y_1+y_2)^2+y_1y_2(x_1+x_2)^2]$$

$x_1x_2(x_1+x_2)^2 = x_1x_2(y_1+y_2)^2$ より、$x_1+x_2 = y_1+y_2$ が得られる。

同様に⑯において、$x_1x_2 = b^2$ と仮定すると、

$$(y_1+y_2)^2[4(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1+x_2)^2] = -(x_1+x_2)^2(y_1+y_2)^2+4[x_1x_2(y_1+y_2)^2+y_1y_2(x_1+x_2)^2]$$

$y_1y_2(x_1+x_2)^2 = y_1y_2(y_1+y_2)^2$ より、$x_1+x_2 = y_1+y_2$ が得られる。

以上より、$x_1x_2 = b^2$, $y_1y_2 = a^2$ 、及び $x_1+x_2 = y_1+y_2$ が証明された。

　さらに $cos\,2\alpha$, $cos2\beta$ を求めると、

$$cos\,2\alpha = \frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{2x_1x_2} - \frac{2y_1y_2(x_1+x_2)^2[4(x_1x_2+y_1y_2)-(y_1+y_2)^2]}{x_1x_2[4[x_1x_2(y_1+y_2)^2+y_1y_2(x_1+x_2)^2]-(x_1+x_2)^2(y_1+y_2)^2]}$$

$$cos\,2\beta = \frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{2y_1y_2} - \frac{2x_1x_2(y_1+y_2)^2[4(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1+x_2)^2]}{y_1y_2[4[x_1x_2(y_1+y_2)^2+y_1y_2(x_1+x_2)^2]-(x_1+x_2)^2(y_1+y_2)^2]}$$

　この問題について、具体的に成り立つ図形を求めその図を描いてみる。

$x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_1 = 5.5$, $y_2 = 4.5$ として、α, β, m, a, b を求めると、次の表のようになった。それを図にしたのが図 7 である。

与条件		計算結果	
x_1	4	a	$\frac{3\sqrt{11}}{2}$ (4.975)
x_2	6	b	$2\sqrt{6}$ (4.898)
y_1	5.5	m	$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (1.118)
y_2	4.5	α	84.14°
		β	78.40°
		$cos\,\alpha$	$\frac{1}{4\sqrt{6}}$ (0.102)
		$cos\,\beta$	$\frac{2}{3\sqrt{11}}$ (0.201)
		$cos\,2\alpha$	$-\frac{47}{48}$ (−0.979)
		$cos\,2\beta$	$-\frac{91}{99}$ (−0.919)

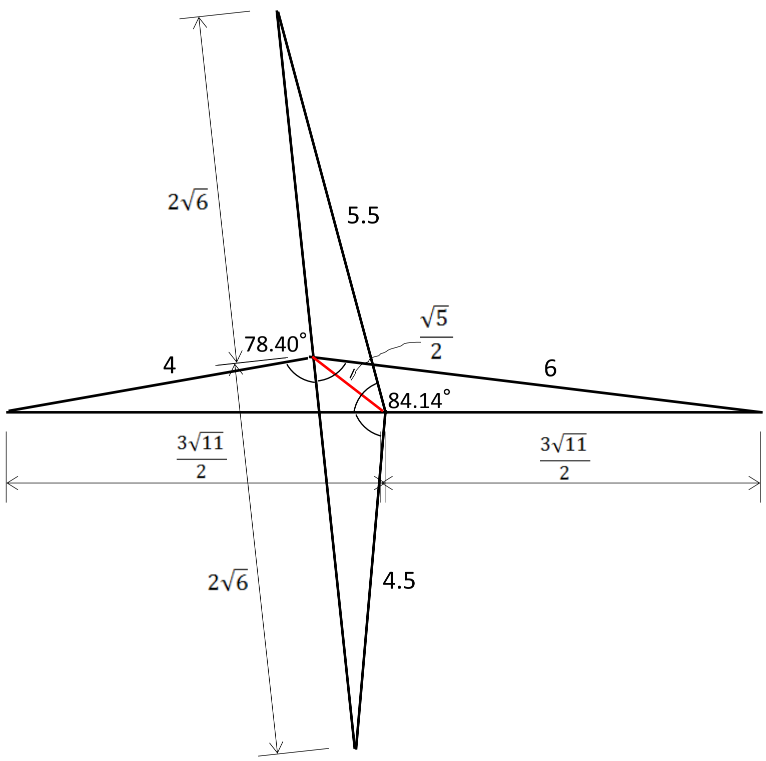

図 7

　もっと簡単に $x_1+x_2 = y_1+y_2$ を証明する方法があるはずだが、どうすればよかったのか？