１３４「日本数学オリンピック問題を解いてみた（７）」

２００３年 第１３回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. 三角形 ABC の内部に点 P をとり，直線 BP と辺 AC の交点を Q，直線 CP と 辺 AB の交点を R とする．

$$AR = RB = CP \text{ かつ } CQ = PQ$$

であるとき，$\angle BRC$ の大きさを求めよ．
ただし，2 点 X, Y に対し，線分 XY の長さを XY で表している．

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、
３辺をａ，ｂ，ｃ、角度をα，β，γ，ＣＲ＝ｍ、
∠ＡＢＱ、∠ＣＢＱをβ_1，β_2、∠ＡＣＲ、∠ＢＣＲをγ_1，γ_2、
求める∠ＢＲＣ＝θとする。
θをβ_1，β_2，γ_1，γ_2で表すことを考える。

題意より、ＡＲ＝ＲＢ＝ＣＰ＝$\dfrac{c}{2}$、

ＣＱ＝ＰＱである。

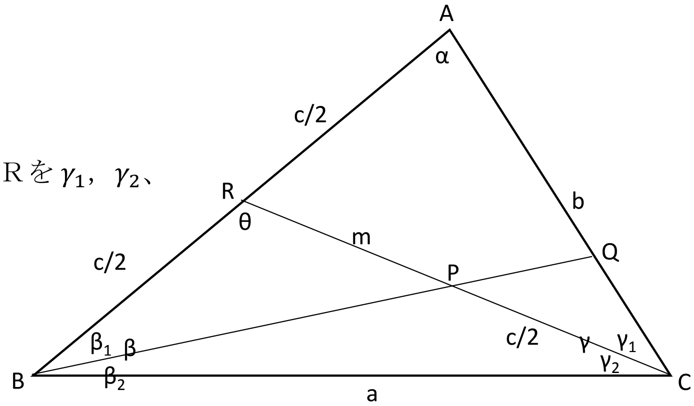

図１

⊿ＰＢＣにおいて、正弦定理から $\dfrac{PC}{\sin\beta_2} = \dfrac{a}{\sin[\pi-(\beta_2+\gamma_2)]}$ より、$PC = a\dfrac{\sin\beta_2}{\sin(\beta_2+\gamma_2)}$

$\beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2$ だから、$PC = a\dfrac{\sin(\gamma_1-\gamma_2)}{\sin\gamma_1} = a\dfrac{\sin\gamma_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = a\left(\cos\gamma_2 - \dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}\cos\gamma_1\right)$

⊿ＡＣＲ，⊿ＢＣＲに正弦定理を適用して、 $\dfrac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma_1} = \dfrac{m}{\sin\alpha}$， $\dfrac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma_2} = \dfrac{m}{\sin\beta}$ より $\dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

さらに $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ であるから $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$、 以上より、$PC = a\left(\cos\gamma_2 - \dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}\cos\gamma_1\right)$

$= a\left(\cos\gamma_2 - \dfrac{b}{a}\cos\gamma_1\right) = a\cos\gamma_2 - b\cos\gamma_1$

題意より $PC = \dfrac{c}{2}$ で あるから、図２において、

$a\cos\gamma_2 - b\cos\gamma_1 = ST = \dfrac{c}{2}$ 、

⊿ＡＲＳ，⊿ＢＲＴは合同だから、 $RS = \dfrac{c}{4}$

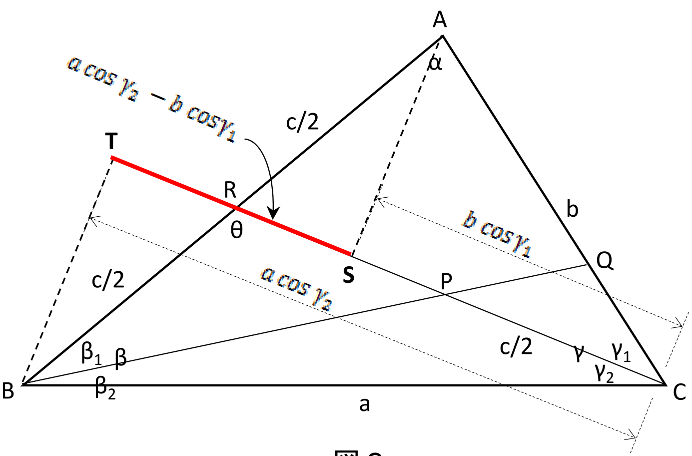

図２

∠ＡＲＳ＝$\pi-\theta$ から、$cos(\pi-\theta)=\dfrac{\frac{c}{4}}{\frac{c}{2}}=\dfrac{1}{2}$

従って $\pi-\theta=\dfrac{\pi}{3}$ である。よって、$\theta=\dfrac{2\pi}{3}=\underline{\underline{120^\circ}}$ これが求める角度である。

実は、この解答にたどり着くまでに回り道をしたので紹介したい。
当初、図３をもとに正弦定理，余弦定理を用いてθを求めると、

$\theta=\pi-tan^{-1}\left[\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{sin(\alpha-\beta)}\right]$ …………①

が導かれた。（計算過程は省略）

①は、与条件ＡＲ＝ＲＢ＝ＣＰ＝$\dfrac{c}{2}$，

及びＣＱ＝ＰＱがθと無関係に導かれているのでθと関連付ける必要があるが、どうしてもできなかった。

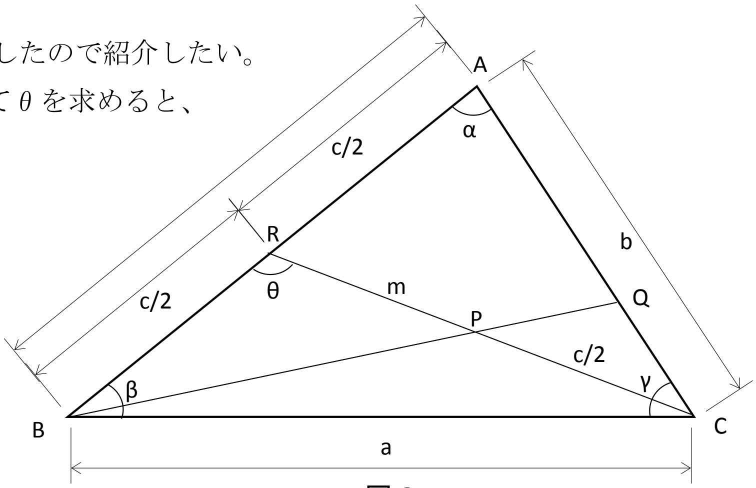

図３

次に、◿ＡＣＲ，◿ＢＣＲに余弦定理を適用して、

$cos\,\theta=\dfrac{\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-a^2}{2\cdot\frac{c}{2}\cdot m}$， $cos(\pi-\theta)=-cos\,\theta=\dfrac{\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-b^2}{2\cdot\frac{c}{2}\cdot m}$ 両式の差を取ると、

$2\,cos\,\theta=\dfrac{b^2-a^2}{cm}$

中線定理より、$a^2+b^2=2\left[m^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$、これから $m=\dfrac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$ これを上式に入れると、

$cos\,\theta=\dfrac{1}{c}\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}$ ………………②

②から、三角形の３辺 a，b，c を与えれば、直接∠θが具体的な数値として出て来るはずである。ところが、a，b，c に適当な数値を入れても具体的な角度は求められず、行き詰まってしまった。

その理由は、与条件ＡＲ＝ＲＢ＝ＣＰ＝$\dfrac{c}{2}$，及びＣＱ＝ＰＱは、全ての三角形に当てはまるわけではないためである。

②に $cos\,120^\circ=-\dfrac{1}{2}$ を入れて a，b，c の関係を導くと、

$\dfrac{1}{c}\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}-\dfrac{1}{2}$，展開して、$c^4-2(a^2+b^2)c^2+4(a^2-b^2)^2=0$ これを解いて、

$c = \pm\sqrt{(a^2+b^2) \pm \sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}$ が得られる。符号を確認すると、a，b，c が三角形の

三辺となるためには、$c = \sqrt{(a^2+b^2) - \sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}$ でなければならないことがわかる。

さらに、$\dfrac{a}{\sqrt{3}} < b < \sqrt{3}\,a$ という条件を満たさなければならない。

これらの条件を満たすa，b として、例えば、$a = 10$，$b = 6$ として計算すると $c = 9.489$ が得られる。

さらに別の方法として、
図１の⊿ＱＢＣにおいて、∠ＢＱＣ$= \pi - 2\gamma_1$ だから、正弦定理より、

$\dfrac{a}{sin(\pi - 2\gamma_1)} = \dfrac{\frac{c}{4\,cos\,\gamma_1}}{sin\,\beta_2}$ から、$a\,sin\,\beta_2 = \dfrac{c}{4\,cos\,\gamma_1} sin(\pi - 2\gamma_1) = \dfrac{c}{4\,cos\,\gamma_1} 2\,sin\,\gamma_1\,cos\,\gamma_1 = \dfrac{c}{2} sin\,\gamma_1$

$\beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2$ なので、

$sin(\gamma_1 - \gamma_2) = \dfrac{c}{2a} sin\,\gamma_1$，$sin\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2 - cos\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2 = \dfrac{c}{2a} sin\,\gamma_1$，$cos\,\gamma_2 - cos\,\gamma_1 \dfrac{sin\,\gamma_2}{sin\,\gamma_1} = \dfrac{c}{2a}$

$\dfrac{sin\,\gamma_2}{sin\,\gamma_1} = \dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}$，$cos\,\gamma_2 = \sqrt{1 - sin^2\,\gamma_2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} sin\,\gamma_1\right)^2}$ を入れて、

$\sqrt{1 - \left(\dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} sin\,\gamma_1\right)^2} - cos\,\gamma_1 \dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} = \dfrac{c}{2a}$ この式を計算して、$1 - \left(\dfrac{c}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}\right)^2 = \dfrac{c\,sin\,\beta}{a\,sin\,\alpha} cos\,\gamma_1$

$\dfrac{c\,sin\,\beta}{a\,sin\,\alpha} = \dfrac{c\,\frac{b}{a} sin\,\alpha}{a\,sin\,\alpha} = \dfrac{bc}{a^2}$，$\left(\dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ を入れると、$1 - \left(\dfrac{c}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{bc}{a^2} cos\,\gamma_1$ 整理して、

$$cos\,\gamma_1 = \frac{4a^2 - 4b^2 - c^2}{4bc} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

③は、α，β，γ を用いて次のように書くこともできる。

$$cos\,\gamma_1 = \frac{4\,sin^2\,\alpha - 4\,sin^2\,\beta - sin^2\,\gamma}{4\,sin\,\beta\,sin\,\gamma} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

④をさらに変形すると、$cos\,\gamma_1 = \dfrac{4\,sin^2\,\alpha - 4\,sin^2\,\beta - sin^2\,\gamma}{4\,sin\,\beta\,sin\,\gamma} = \dfrac{3\,sin^2\,\gamma - 8\,cos\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}{4\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}$

$= \dfrac{3\,sin\,\gamma - 8\,cos\,\alpha\,sin\,\beta}{4\,sin\,\beta} = \dfrac{3\,sin\,\gamma}{4\,sin\,\beta} - 2\,cos\,\alpha$

以上より、$cos\,\gamma_1 = \dfrac{3\,sin\,\gamma}{4\,sin\,\beta} - 2\,cos\,\alpha$、$\gamma_1$ と θ とは、$sin\,\theta = \dfrac{2b}{c} sin\,\gamma_1$ という関係があるので、

三角形の３つの角 α，β，γ が分かれば、$cos\,\gamma_1$が求められ、その γ_1から

$sin\,\theta = \dfrac{2b}{c} sin\,\gamma_1$ として θ を求めることができる。

しかし、この式から $\theta=120^\circ$ を導くことはできなかった。

この問題について、一つの解答例を見つけた。
問題はメネラウスの定理を使うことで、容易に解くことができる。
メネラウスの定理とは、右図のように直線が⊿ＡＢＣの３辺
ＡＢ，ＢＣ，ＣＡまたはその延長とそれぞれＰ，Ｑ，Ｒで交わるとき、
$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=1$ が成り立つという定理である。

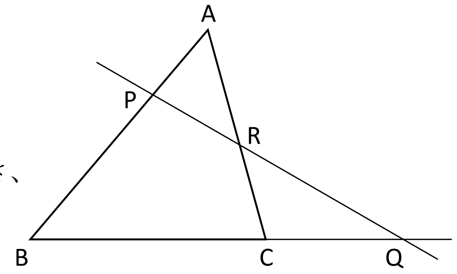

図４の⊿ＡＢＱにメネラウスの定理を適用すると、

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PQ}\cdot\frac{QC}{CA}=1$$

$AR=RB$，$CQ=PQ$ だから、$\dfrac{BP}{CA}=1$

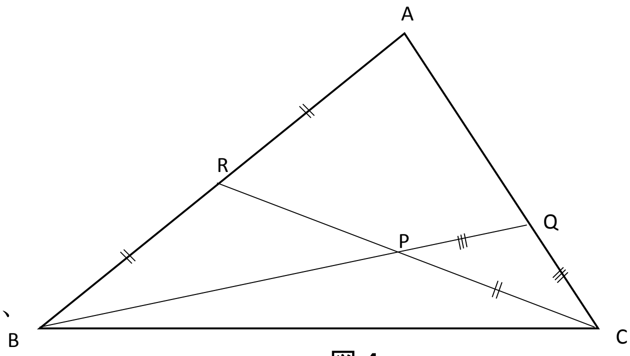

図４

ここで、図５に示すように、CR 上に $RS=CP$
となる点 S をとり、⊿ＡＣＳと⊿ＢＰＲに注目すると、
$AC=BP$，$CS=PR$，$\angle ACS=\angle BPR$ から
⊿ＡＣＳと⊿ＢＰＲは合同である。
よって $AS=BR$ 、以上より、$AS=AR=RS$ となるので、
⊿ＡＲＳは正三角形である。
よって、$\angle ARS=60^\circ$ であるから、$\angle BRC=120^\circ$ となる。

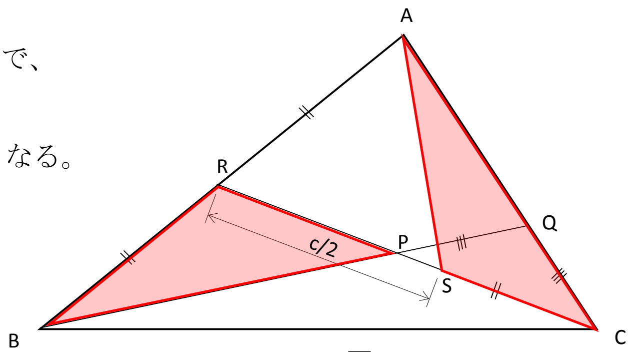

図５

２００７年 第１７回 日本数学オリンピック本選（第３問）

3. 三角形 ABC の外接円を Γ とする. 辺 AB, AC に接し, Γ に内接する円を Γ_A, 辺 AB, BC に接し, Γ に内接する円を Γ_B, 辺 AC, BC に接し, Γ に内接する円を Γ_C とする. 円 Γ と $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ との接点をそれぞれ P, Q, R とおく.
直線 AP, BQ, CR は一点で交わることを示せ.

図１の三角形ＡＢＣにおいて、３辺の長さをａ，ｂ，ｃ、角度をα，β，γ、外心をＯ，内心をＩ，AA_1A_2，BB_1AB_2，CC_1C_2 はそれぞれ内心Ｉを通る直線、ＡＰ，ＢＱ，ＣＲの交点をＺ、直線ＡＰと辺ＢＣ，直線ＢＱと辺ＣＡ，直線ＣＲと辺ＡＢの交点を P_1，Q_1，R_1 とする。
$\angle PAA_2=\theta_1$ とすると、円Γに内接する⊿ＡＣＰにおいて、
$\angle CAP=\dfrac{\alpha}{2}+\theta_1$，$\angle APC=\beta$，$\angle ACP=\pi-\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta+\theta_1\right)$ からΓの半径を R として、正弦定理より、

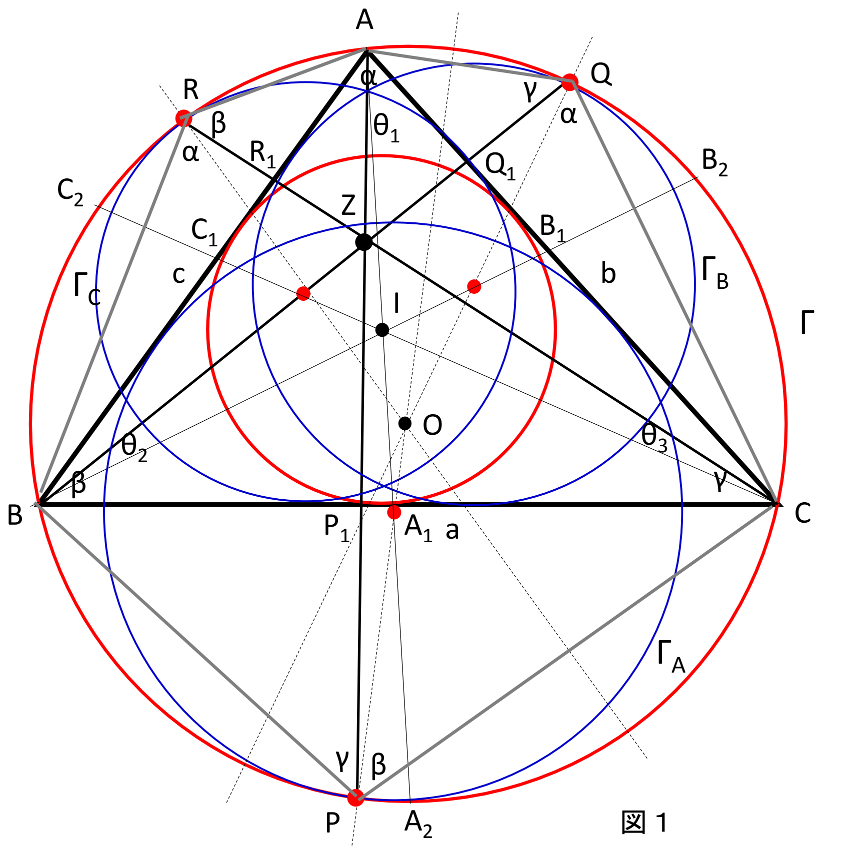

図 1

$\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{AP}{\sin\left[\pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta + \theta_1\right)\right]} = 2R$,　同様に円Γに内接する⊿ＡＢＰにおいて、

$\angle BAP = \dfrac{\alpha}{2} - \theta_1$，$\angle APB = \gamma$，$\angle ABP = \pi - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \gamma - \theta_1\right)$ から、

$\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{AP}{\sin\left[\pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - \theta_1\right)\right]} = 2R$ 、以上より、$\dfrac{\alpha}{2} + \beta + \theta_1 = \dfrac{\alpha}{2} + \gamma - \theta_1$ となり、$\theta_1 = \dfrac{\gamma - \beta}{2}$

$\theta_1 > 0$ であるから、$\beta > \gamma$ のとき $\theta_1 = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$，$\gamma > \beta$ のとき $\theta_1 = \dfrac{\gamma - \beta}{2}$ 、

図１の場合 $\theta_1 = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$ である。

$\triangle AP_1C$ において、$\angle AP_1C = \pi - \left(\gamma + \dfrac{\alpha}{2} + \theta_1\right) = \pi - \left(\gamma + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta - \gamma}{2}\right) = \pi - \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

よって、ＡＰ⊥ＢＣである。

$\angle QBB_2 = \theta_2$ とすると、円Γに内接する⊿ＢＣＱにおいて、

$\angle CBQ = \dfrac{\beta}{2} + \theta_2$，$\angle BQC = \alpha$，$\angle BCQ = \pi - \left(\dfrac{\beta}{2} + \alpha + \theta_2\right)$ から、

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{BQ}{\sin\left[\pi-\left(\frac{\beta}{2}+\alpha+\theta_2\right)\right]}=2R,$$　　同様に円Γに内接する⊿ＢＡＱにおいて、

$\angle ABQ=\frac{\beta}{2}-\theta_2$，$\angle AQB=\gamma$，$\angle BAQ=\pi-\left(\frac{\beta}{2}+\gamma-\theta_2\right)$ から、

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{AP}{\sin\left[\pi-\left(\frac{\beta}{2}+\gamma-\theta_2\right)\right]}=2R$$　以上より、$\frac{\beta}{2}+\alpha+\theta_2=\frac{\beta}{2}+\gamma-\theta_2$ となり、$\theta_2=\frac{\gamma-\alpha}{2}$、

$\theta_2>0$ であるから、$\alpha>\gamma$ のとき $\theta_2=\frac{\alpha-\gamma}{2}$，$\gamma>\alpha$ のとき $\theta_2=\frac{\gamma-\alpha}{2}$ 、

図１の場合 $\theta_2=\frac{\alpha-\gamma}{2}$ である。

$\triangle BQ_1C$ において、$\angle BQ_1C=\pi-\left(\gamma+\frac{\beta}{2}+\theta_2\right)=\pi-\left(\gamma+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)=\pi-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$

よって、ＢＱ⊥ＣＡである。

同様に $\angle RCC_2=\theta_3$ とすると、$\theta_3=\frac{\alpha-\beta}{2}$ となり、

$\triangle BR_1C$ において、$\angle BR_1C=\pi-\left(\beta+\frac{\gamma}{2}+\theta_3\right)=\pi-\left(\beta+\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\pi-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$

よって、ＣＲ⊥ＡＢである。

以上より、ＡＰは点Ａから辺ＢＣに下ろした垂線、ＢＱは点Ｂから辺ＣＡに下ろした垂線、ＣＲは点Ｃから辺ＡＢに下ろした垂線なので、ＡＰ，ＢＱ，ＣＲは点Ｚで交わりＺは垂心である。

最初は図２において、$\angle AOP$，$\angle BOQ$，$\angle COR$ を求め、それぞれの角を基準点から加え２πになることを示せば、ＡＰ，ＢＱ，ＣＲが１点で交わることを証明できると考え計算を行っていた。
頂点Ａと内心Ｉを結ぶ直線ＡＩの延長上で、$I_1P'=I_1P$ となる点をI_1 とし、内接円の半径をｒとすると次の式が成り立つ。

$$II_1=\frac{b\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$OI_1=R-\frac{b\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

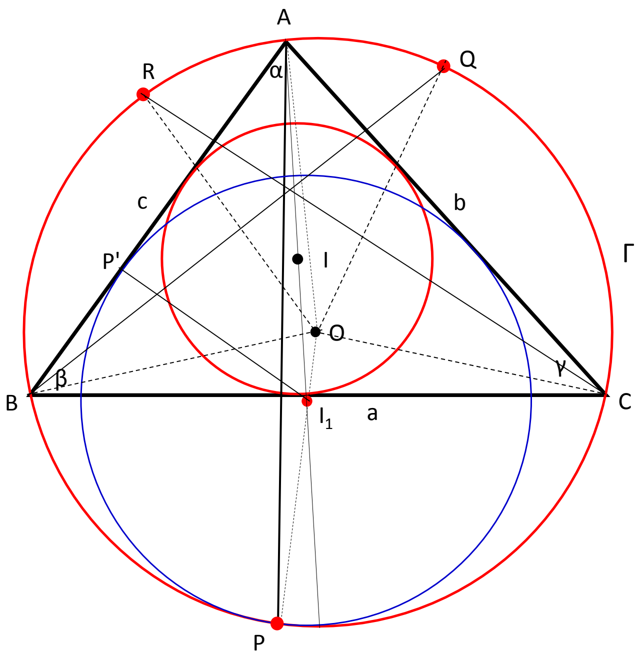

図２

$\triangle AOI_1$ に余弦定理を適用すれば $\angle AOP$ が求められるが、式が複雑になり計算は難しいので断念した。

図１においてθ_1，θ_2，θ_3 は３つの頂点から対辺に下ろした垂線と、頂点と内心を結ぶ線との“ずれ”を示したものである。３辺ａ，ｂ，ｃの大きさの差が小さくなるに従って、その“ずれ”は小さくなり、正三角形のとき外心，内心，垂心（及び重心）はすべて一致する。（２０２２．７．２７）