１３５「日本数学オリンピック問題を解いてみた（８）」

２００８年 第１８回 日本数学オリンピック本選（第３問） **3.** 鋭角三角形 ABC の外心を O とする．2 点 A, O を通る円が，直線 AB, AC とそれぞれ A 以外の点 P, Q で交わっている．線分 PQ と線分 BC の長さが等しいとき，直線 PQ と直線 BC のなす角のうち $90°$ 以下の方の大きさを求めよ．

図１に示す鋭角三角形ＡＢＣにおいて、
まず、その外接円と２点Ａ，Ｏを通る円の半径が
等しくなければならないことを証明する。
∠ＢＡＣ＝α，外接円の半径を Ｒ， ２点Ａ，Ｏ
を通る円の中心をＯ’とする。
⊿ＡＢＣにおいて正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$$

円Ｏ’に内接する⊿ＡＰＱにおいて、
同様に正弦定理より、外接円の半径をR'
とすると、$\dfrac{PQ}{\sin\alpha} = 2R'$ である。
題意より、ＢＣ＝ＰＱだから、
$R = R'$ でなければならない。
（図１では２つの円の半径は異なっている）
以上より、円の中心Ｏ’は、直線ＡＯの垂直二等分線と
外接円の交点にあり、図２に示す状態となる。

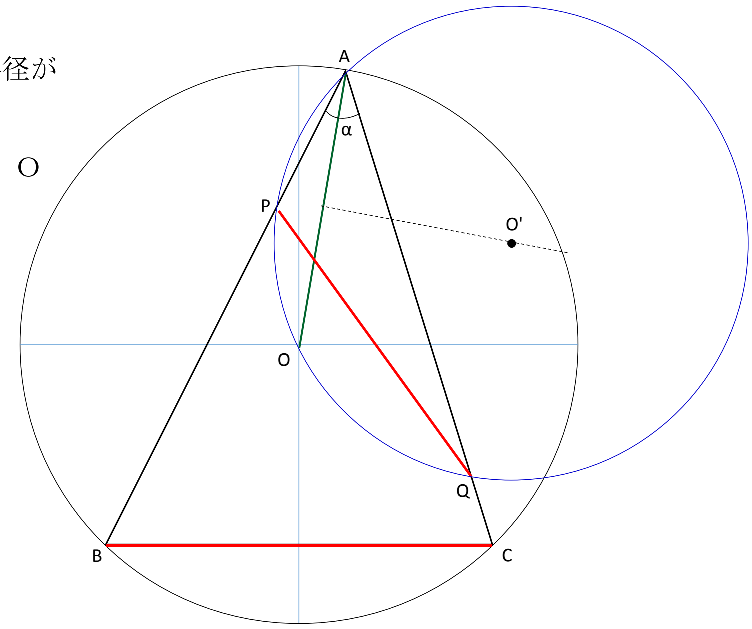


図１

図２の三角形ＡＢＣにおいて、３つの
角をα，β，γ、図３に示すよう
に、直線ＰＱとＢＣの交点をＥと
すると、求める角度は∠ＰＥＢ
である。点Ａ，Ｏを通る円は、
外接円と同じ半径であり、
その中心は外接円上にある。
三角形ＡＯＯ’は正三角形で
あり、直線ＯＯ’を延長し外
接円との交点をＤとする。
⊿ＡＰＱ，⊿ＢＣＤにおいて、
題意よりＢＣ＝ＰＱ，

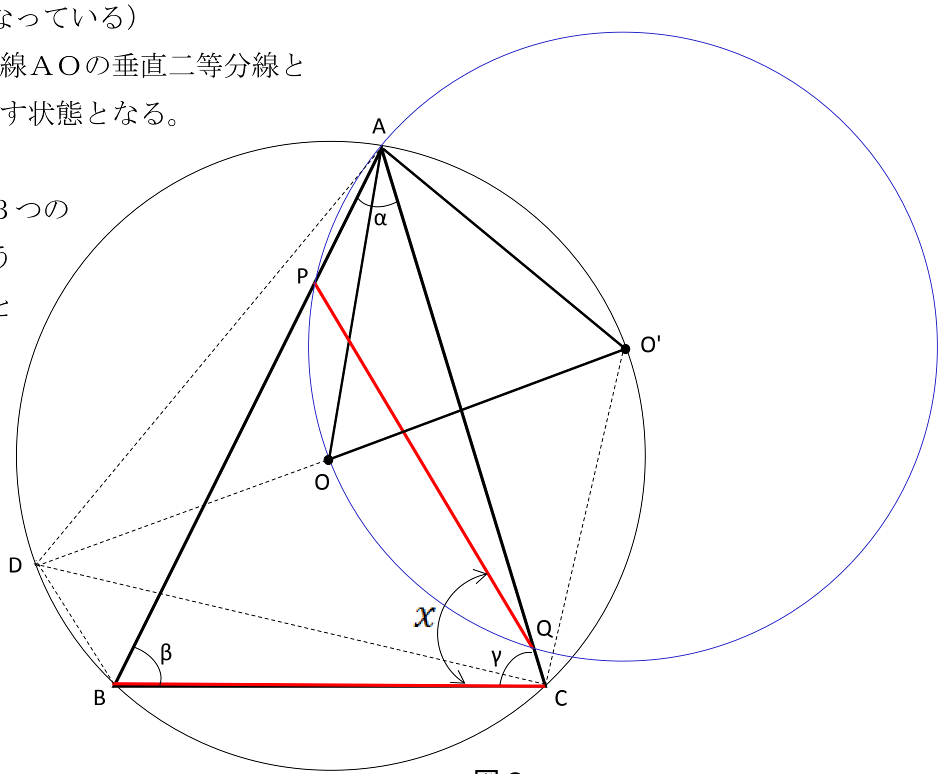


図２

∠ＰＡＱ＝∠ＢＤＣ＝α、∠ＡＰＱ＝$\beta+x$，∠ＡＢＤ＝xから、
∠ＣＢＤ＝$\beta+x$となるので、⊿ＡＰＱと⊿ＢＣＤは合同である。
　よって、∠ＡＱＰ＝∠ＢＣＤ、∠ＡＯ’Ｄ$=60^\circ$ から
∠ＡＣＤ$=60^\circ$ なので、$x=60^\circ$ －∠ＡＱＰ＋∠ＢＣＤ
ここで、∠ＡＱＰ＝∠ＢＣＤであるから、$x=60^\circ$
これが、直線ＰＱと直線ＢＣのなす角度である。

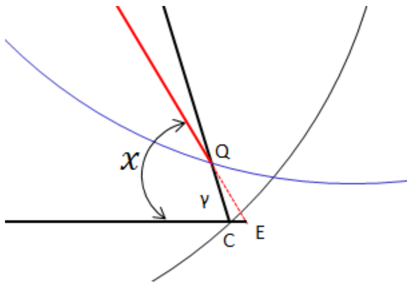


図３

２００９年 第１９回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. 三角形 ABC の外接円を Γ とする．点 O を中心とする円が，線分 BC と点 P で接し，Γ の弧 BC のうち A を含まない方と点 Q で接している．$\angle BAO=\angle CAO$ のとき，$\angle PAO=\angle QAO$ であることを示せ．

　図１の三角形ＡＢＣにおいて、３つの角をα，β，γ、
∠ＯＡＰ＝x，∠ＯＡＱ＝y，外接円Γ半径をＲ
点Ｏを中心とする円の半径をｒとする。
　⊿ＡＰＯと⊿ＡＱＯに着目し、x，y の関係を導く。

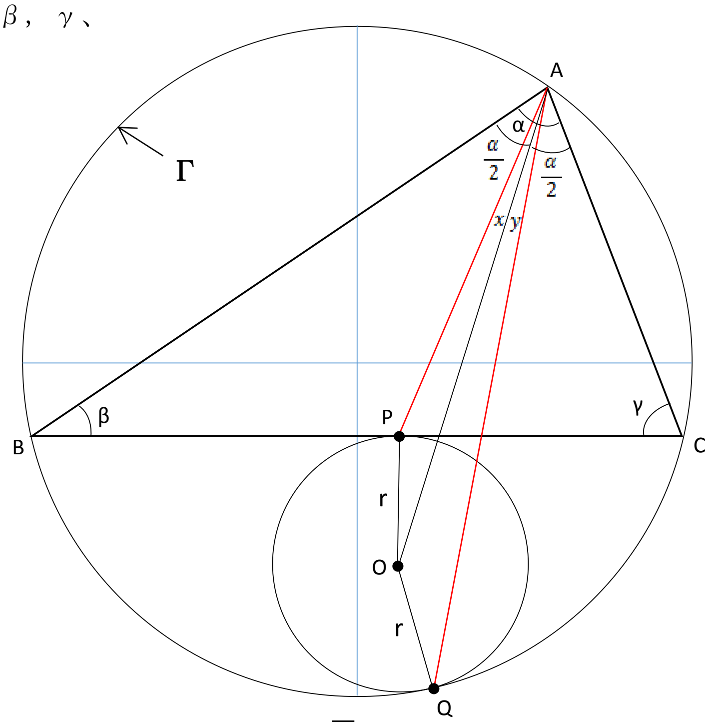


図１

図２ ⊿ＡＰＯにおいて、

$\angle APO=\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta-x\right)$ だから、

正弦定理より、

$$\frac{r}{\sin x}=\frac{AO}{\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\alpha}{2}+\beta-x\right)\right]}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

⊿ＡＱＯにおいて、

$\angle AQO=\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma+y\right)-\dfrac{\pi}{2}$ だから、

正弦定理より、

$$\frac{r}{\sin y}=\frac{AO}{\sin\left[\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma+y\right)-\frac{\pi}{2}\right]}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

① ②から AO を消去すると、

$$\frac{r\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\alpha}{2}+\beta-x\right)\right]}{\sin x}=\frac{r\ \sin\left[\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma+y\right)-\frac{\pi}{2}\right]}{\sin y}$$

$\sin\left[\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta-x\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta-x\right)$，$\sin\left[\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma+y\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]=-\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\gamma+y\right)$ だから、

$$\sin y\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta-x\right)=-\sin x\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma+y\right)$$

上式に、$\dfrac{\alpha}{2}+\beta-x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta-\gamma}{2}$，$\dfrac{\alpha}{2}+\gamma+y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ を入れて書き直すと、

$$\sin y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}\right)+\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=0,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=-\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)=\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ なので、

$-\sin y\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}+\sin x\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}=0$ から、$\sin x=\sin y$

以上より、$x=y$ が導かれる。

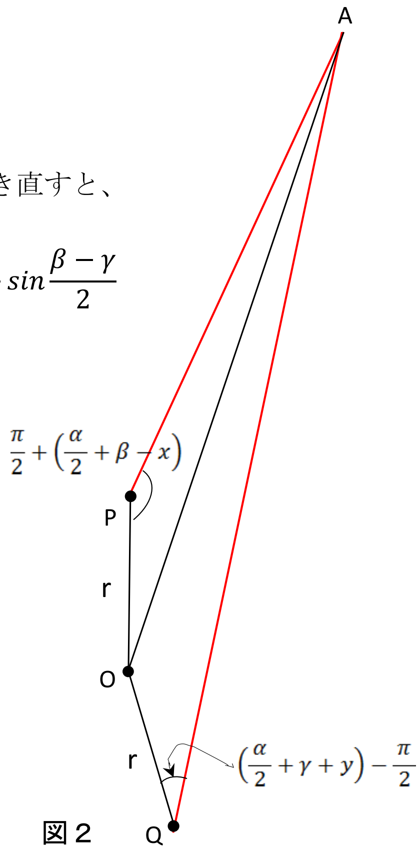


図２

２０１０年 第２０回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. $AB\neq AC$ なる鋭角三角形 ABC があり，A から BC におろした垂線の足を H とおく．点 P, Q を，3 点 A, B, P と 3 点 A, C, Q がともにこの順に一直線上に並ぶようにとると，4 点 B, C, P, Q は同一円周上にあり，$HP=HQ$ が成り立った．このとき H は三角形 APQ の外心であることを示せ．

ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

次ページ図１に示すように、⊿ＡＢＣ（ＡＢ≠ＡＣ）において、辺ＢＣ＝ａ，ＣＡ＝ｂ，ＡＢ＝ｃ、∠ＢＡＣ＝α，∠ＣＢＡ＝β，∠ＡＣＢ＝γ、ＡＨ＝ｄ，ＨＰ＝ＨＱ＝ｌ，∠ＨＰＱ＝∠ＨＱＰ＝θ，ＰＱの中点をＲとする。

四角形ＢＰＱＣは円に内接しているので、∠ＢＰＱ＋∠ＢＣＱ＝１８０°から、∠ＢＰＱ＝γ、∠ＣＱＰ＋∠ＣＢＰ＝１８０°から、∠ＣＱＰ＝β、よって⊿ＡＢＣと⊿ＡＰＱは相似である。

Ｈが⊿ＡＰＱの外心であること証明するには、ｄ＝ｌ、あるいは∠ＰＨＱ＝２α（∠ＰＨＲ＝α）であることを言えばよい。

⊿ＢＰＨに正弦定理を適用して、$\dfrac{l}{\sin(\pi-\beta)}=\dfrac{c\cos\beta}{\sin(\gamma-\theta)}$ ……………………①

⊿ＣＱＨに正弦定理を適用して、$\dfrac{l}{\sin(\pi-\gamma)}=\dfrac{b\cos\gamma}{\sin(\beta-\theta)}$ ……………………②

$sin(\pi-\beta)=sin\,\beta$， $sin(\pi-\gamma)=sin\,\gamma$ だから、

①より、$l\,sin(\gamma-\theta)=c\,sin\,\beta\,cos\,\beta$

②より、$l\,sin(\beta-\theta)=b\,sin\,\gamma\,cos\,\gamma$

$c\,sin\,\beta=b\,sin\,\gamma=d$ だから、

$l\,sin(\gamma-\theta)=c\,sin\,\beta\,cos\,\beta=d\,cos\,\beta$

$l\,sin(\beta-\theta)=b\,sin\,\gamma\,cos\,\gamma=d\,cos\,\gamma$

上２式から、l，d を消去して、

$sin(\beta-\theta)\,cos\,\beta=sin(\gamma-\theta)\,cos\,\gamma$

三角関数の積→和の公式を用いて、

$sin(2\beta-\theta)-sin\,\theta$

$=sin(2\gamma-\theta)-\sin\theta$

より、$sin(2\beta-\theta)=sin(2\gamma-\theta)$

$\beta\neq\gamma$ であるから、

$(2\beta-\theta)+(2\gamma-\theta)=\pi$

これから、

$$\theta=(\beta+\gamma)-\frac{\pi}{2}=(\pi-\alpha)-\frac{\pi}{2}$$

以上より、$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ なので

∠ＰＨＲ＝α である。

よって、Ｈが◿ＡＰＱの外心であることが証明された。

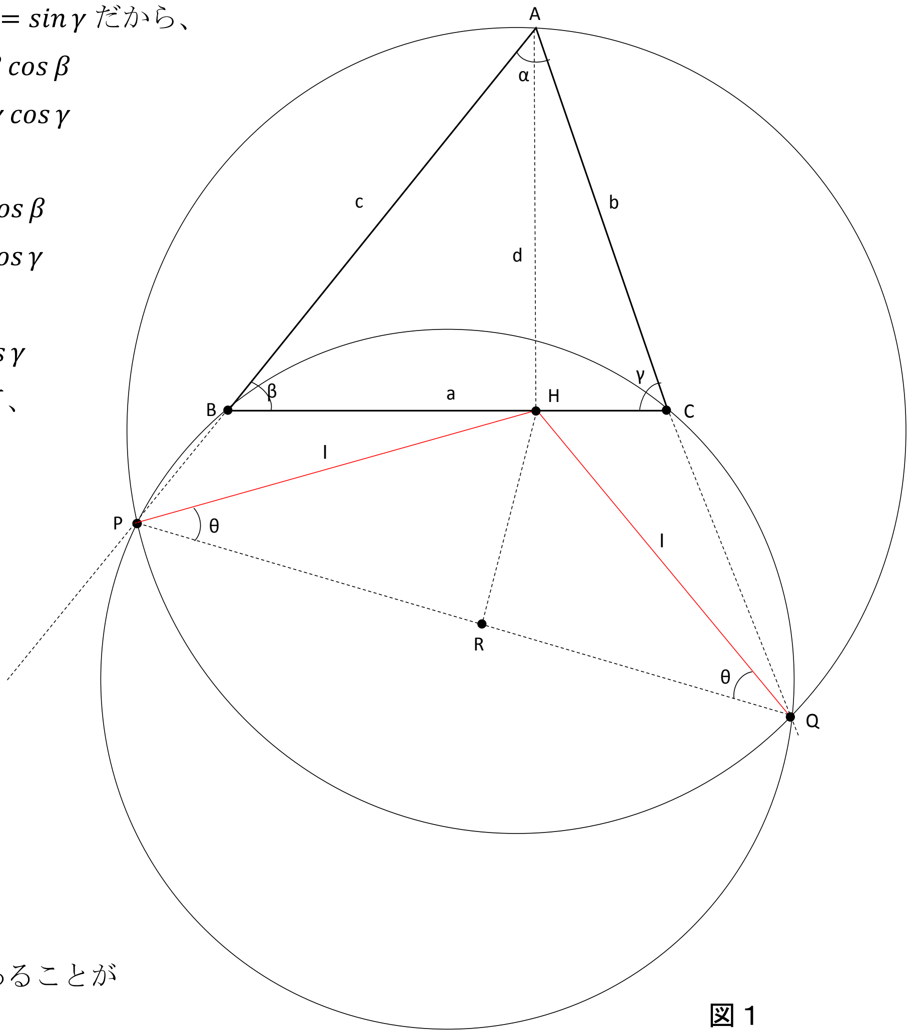


図１

２０１１年 第２１回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし，線分 BC の中点を M とする．H を通り直線 AM に垂直な直線と直線 AM との交点を P とするとき，$AM\cdot PM=BM^2$ が成り立つことを示せ．
ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

◿ＡＢＣにおいて、辺ＢＣ＝ａ，ＣＡ＝ｂ，ＡＢ＝ｃ、∠ＢＡＣ＝α，∠ＣＢＡ＝β，∠ＡＣＢ＝γ，ＡからＢＣに下ろした垂線の足をＤ，∠ＡＭＣ＝θ とする。

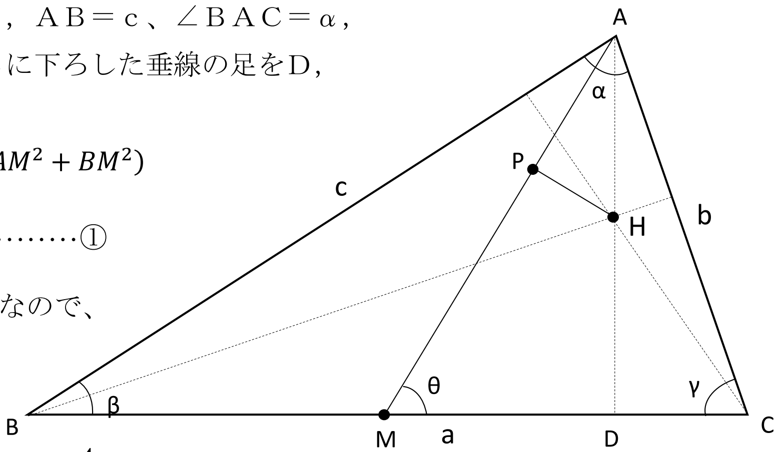
中線定理より次式が成り立つ。$b^2+c^2=2(AM^2+BM^2)$

これから、$AM^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-BM^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・・①

$PM=AM-AP$，◿ＡＭＤと◿ＡＨＰは相似なので、

∠ＡＭＤ＝∠ＡＨＰ＝θ から、

$AP=AH\,sin\,\theta$， $AM\,sin\,\theta=c\,sin\,\beta$



であるから $AP=\dfrac{AH}{AM}\cdot c\sin\beta$ 、∠ＣＢＨ＝$\dfrac{\pi}{2}-\gamma$ から、$AH=AD-HD=c\sin\beta-c\cos\beta\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)$

$=c\left(\sin\beta-\cos\beta\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)=c\left(\dfrac{\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)=c\dfrac{-\cos(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}=c\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$ 　以上より、

$PM=AM-AP=AM-c\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot\dfrac{c\sin\beta}{AM}=AM-\dfrac{c^2\sin\beta\cos\alpha}{AM\sin\gamma}$，$c\sin\beta=b\sin\gamma$ を考慮すると、

$=AM-\dfrac{bc\sin\gamma\cos\alpha}{AM\sin\gamma}=AM-\dfrac{bc\cos\alpha}{AM}=\dfrac{AM^2-bc\cos\alpha}{AM}$ 　従って、

$AM\cdot PM=AM\cdot\dfrac{AM^2-bc\cos\alpha}{AM}=AM^2-bc\cos\alpha$

① $AM^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-BM^2$ を上式に入れると、$AM\cdot PM=\dfrac{b^2+c^2}{2}-BM^2-bc\cos\alpha$

余弦定理より $bc\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ だから、$AM\cdot PM=\dfrac{b^2+c^2}{2}-BM^2-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$=\dfrac{a^2}{2}-BM^2$，$a=2BM$ だから、$AM\cdot PM=\dfrac{4BM^2}{2}-BM^2=BM^2$ 　証明終わり。

２０１２年 第２２回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. 三角形 ABC があり，その外接円の A での接線と直線 BC が点 P で交わっている．直線 AB, AC について点 P と対称な点をそれぞれ点 Q, R とする．このとき，直線 BC と直線 QR は垂直に交わることを示せ．

⊿ＡＢＣにおいて、辺ＢＣ＝a，ＣＡ＝b，ＡＢ＝c、∠ＢＡＣ＝α，∠ＣＢＡ＝β，∠ＡＣＢ＝γ，⊿ＡＢＣの外心をＯとする。点Ｂを原点とするＸ－Ｙ座標を考える。

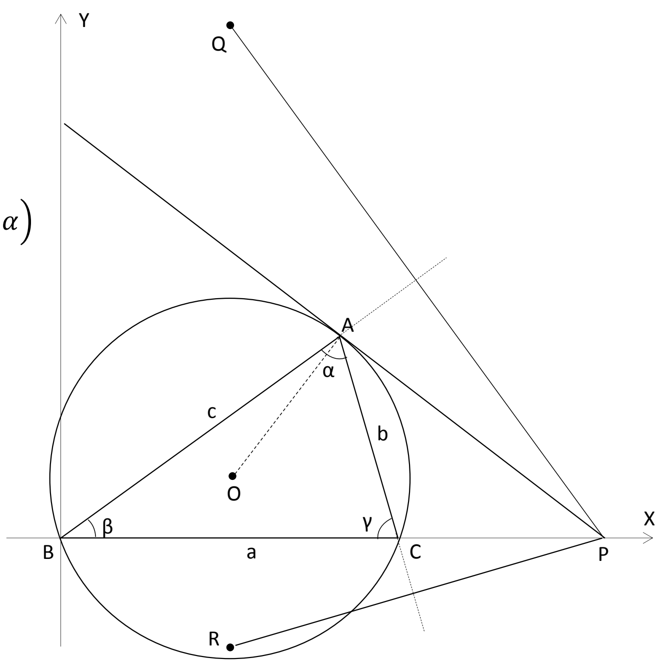
点Ａの座標 $(c\cos\beta,\ c\sin\beta)$、Ｏの座標 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\cot\alpha\right)$

直線ＯＡの勾配、$\dfrac{c\sin\beta-\frac{a}{2}\cot\alpha}{c\cos\beta-\frac{a}{2}}$ から、

直線ＡＰの方程式は次のように表される。

$$y=-\dfrac{c\cos\beta-\frac{a}{2}}{c\sin\beta-\frac{a}{2}\cot\alpha}(x-c\cos\beta)+c\sin\beta$$ 、

$y=0$ と置くことで点ＰのＸ座標が求められる。



ＢＰ＝pとすると、$p = c\sin\beta \cdot \dfrac{c\sin\beta - \frac{a}{2}\cot\alpha}{c\cos\beta - \frac{a}{2}} + c\cos\beta$ ……………………①

次に点Ｑ，ＲのＸ座標を求める。

点ＱのＸ座標$= p - 2p\sin\beta\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = p - 2p\sin^2\beta = p(1 - 2\sin^2\beta)$ ……………②

∠ＢＰＲ＝$\dfrac{\pi}{2} - \gamma$から、

点ＲのＸ座標$= p - 2(p-a)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = p(1 - 2\sin^2\gamma) + 2a\sin^2\gamma$ ………③

① を変形して、

$$p = c\sin\beta \cdot \frac{c\sin\beta - \frac{a}{2}\cot\alpha}{c\cos\beta - \frac{a}{2}} + c\cos\beta = \frac{c^2\sin^2\beta - \frac{ac}{2}\sin\beta\cot\alpha + c^2\cos^2\beta - \frac{ac}{2}\cos\beta}{c\cos\beta - \frac{a}{2}}$$

$$= \frac{c^2 - \frac{ac}{2}(\sin\beta\cot\alpha + \cos\beta)}{c\cos\beta - \frac{a}{2}} = \frac{c^2 - \frac{ac}{2}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}\right)}{c\cos\beta - \frac{a}{2}} = \frac{c^2 - \frac{ac}{2}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}{c\cos\beta - \frac{a}{2}}$$

$$= \frac{c^2 - \frac{ac}{2}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}}{c\cos\beta - \frac{a}{2}} = \frac{c^2 - \frac{c^2}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}}{c\cos\beta - \frac{a}{2}} = \frac{c^2}{2c\cos\beta - a}$$

直線ＢＣと直線ＱＲが垂直に交わるのは、Ｑ，ＲのＸ座標が等しい場合なので、ＱのＸ座標－ＲのＸ座標を計算して０になればよい。②－③を作ると、

$p(1 - 2\sin^2\beta) - p(1 - 2\sin^2\gamma) + 2a\sin^2\gamma = 2p(\sin^2\gamma - \sin^2\beta) - 2a\sin^2\gamma$

$p = \dfrac{c^2}{2c\cos\beta - a}$ を入れて、

$$= \frac{2c^2}{2c\cos\beta - a} \cdot (\sin^2\gamma - \sin^2\beta) - 2a\sin^2\gamma = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left[\frac{2c^2}{2c\cos\beta - a} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}\right) - 2a\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\gamma}\left[\frac{2c^2}{2c\cos\beta - a} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) - 2a\right] = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left[\frac{2(c^2 - b^2)}{2c\cos\beta - a} - 2a\right] = \frac{2}{\sin^2\gamma}\left[\frac{c^2 - b^2 - 2ac\cos\beta + a^2}{2c\cos\beta - a}\right]$$

余弦定理より、$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2$ だから、

$= \dfrac{2}{\sin^2\gamma}\left[\dfrac{b^2 - b^2}{2c\cos\beta - a}\right] = 0$ 、以上よりＱのＸ座標－ＲのＸ座標＝ ０ となり、直線ＢＣと直線ＱＲは垂直に交わることが証明された。

「日本数学オリンピック本選」の幾何学問題は、予選問題に比べ難易度が高く、解くのに時間を要する。２０１２年 第１問はＸ－Ｙ座標を用いて解いてしまったが、幾何学的あるいはバクトルを使ったよりスマートな解き方があると思う。（２０２２．８．１１）