１３６「日本数学オリンピック問題を解いてみた（９）」

日本数学オリンピック“本選問題”の中に、不等式の証明問題がある。“予選問題”には同種の証明問題はなく、あるのは与えられた条件の下で最大値，最小値を求める問題である。

本選の不等式証明問題は、公式をつかいながら頭を柔軟にして、いろいろ工夫しなければ解けない問題が多く、解けた時の爽快感がとてもいい。

ここからは、そのような一連の不等式証明問題について述べてみたい。

１９９７年 第７回 日本数学オリンピック本選（第２問）

2. a, b, c **は正の実数とする．このとき，不等式**

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geqq\frac{3}{5}$$

が成り立つことを証明せよ．また等号が成立するのはいつか．

この問題は、コーシー・シュワルツの不等式の変形を利用して解くことができる。

コーシー・シュワルツの不等式とは、a，b，x，y が実数の時、

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$ という不等式が成り立つというものである。

一般形では、a，b，x，y が実数で、任意の整数 n に対し $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$ と表される。

その変形とは、 a_1，$a_2,\cdots\cdots,a_n$，b_1，$b_2,\cdots\cdots\cdots,b_n$ が実数で、b_1，$b_2,\cdots\cdots\cdots,b_n>0$ のとき、

$\dfrac{{a_1}^2}{b_1}+\dfrac{{a_1}^2}{b_1}+\cdots\cdots+\dfrac{{a_1}^2}{b_1}\geq\dfrac{(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots\cdots\cdots+b_n}$ という不等式が成り立つ。

これを利用して解いていく。

$\dfrac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\dfrac{3}{5}$ に上記不等式を適用して

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{[(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]^2}{[(b+c)^2+a^2]+[(c+a)^2+b^2]+[(a+b)^2+c^2]}$$

$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}$ ここで、$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ だから、

$ab+bc+ca$ の代わりに $a^2+b^2+c^2$ を入れれば、上式の分母が大きくなり、式全体の値が小さくなるので、不等式の成立に影響しない。

問題の式 $\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+2(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{(a+b+c)^2}{5(a^2+b^2+c^2)}$

分子は、 $a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ から、$(a+b+c)^2\geq\left(3\cdot\sqrt[3]{abc}\right)^2$

分母は、 $a^2+b^2+c^2 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ であるから、

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{\left(3\cdot\sqrt[3]{abc}\right)^2}{5\cdot3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}=\frac{3\cdot3}{5\cdot3}=\frac{3}{5}$$ よって証明された

等号が成立するのは、$a=b=c$ の場合である。

２００１年 第１４回 日本数学オリンピック本選（第３問） ３．０以上の実数ａ、ｂ、ｃがあり、 $a^2 \leqq b^2+c^2$、$b^2 \leqq c^2+a^2$、$c^2 \leqq a^2+b^2$ を満たしているとする。このとき $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geqq 4(a^6+b^6+c^6)$ が成り立つことを示せ。また、等号が成立する条件を求めよ。

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-4(a^6+b^6+c^6) \geq 0$ ……………① を証明すればよい。

この問題を、それぞれの項に対して相加相乗平均の不等式を用いて、

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$, $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$, $a^6+b^6+c^6 \geq 3a^2b^2c^2$ から、

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-4(a^6+b^6+c^6) \geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot3\sqrt[3]{(abc)^2}\cdot3abc-4\cdot3a^2b^2c^2$
$=27a^2b^2c^2-12a^2b^2c^2=15a^2b^2c^2 \geq 0$ とするのは誤りである。

この場合 $a^6+b^6+c^6$ に対しては、適切な不等式を用いなければならない。

例えば、$a^2 \leq b^2+c^2$, $b \leq c^2+a^2$, $c^2 \leq a^2+b^2$を満たす $a=5.1$, $b=4.1$, $c=3.1$ として計算すると、以下の表のようになる。

左 辺	計算値	相乗平均	計算値	相乗平均／相加平均
(第 1 項) $a+b+c$	12.3	$3\sqrt[3]{abc}$	12.1	0.980
(第 2 項) $a^2+b^2+c^2$	54.2	$3\sqrt[3]{(abc)^2}$	48.4	0.923
(第 3 項) $a^3+b^3+c^3$	231.4	$3abc$	194.5	0.841
$(1)\times(2)\times(3)$	149203	$(1)\times(2)\times(3)$	113448	0.760
右 辺	計算値	相乗平均	計算値	相乗平均／相加平均
$4(a^6+b^6+c^6)$	92936	$4\cdot3a^2b^2c^2$	50421	0.543

正規の値：左辺第 1 項 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)=149203$

相乗平均：左辺第 1 項 $3\sqrt[3]{abc}\,3\sqrt[3]{(abc)^2}\,3abc=27a^2b^2c^2$ $=113448$ （正規の値の 0.760 倍）

に対し、

正規の値：左辺第 2 項 $4(a^6+b^6+c^6)=92936$

相乗平均：左辺第２項 $4\cdot 3a^2b^2c^2 = 50421$（正規の値の 0.543 倍）

この数値は、a，b，c の値によって異なるが、第２項については、$4(a^6+b^6+c^6)$ が極端に小さくなり、不等式が成り立つため有利な条件を与えるので、比較条件を合わせるよう考慮しなければならない。そのためには不等式適用前の次数を揃えることが必要である。

以上を踏まえ、この問題を解いていく。

$a^6+b^6+c^6=(a^3+b^3+c^3)^2-2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$ を①に入れると、

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-4[(a^3+b^3+c^3)^2-2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)]\geq 0$

両辺を$(a^3+b^3+c^3)^2$ で割って、

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^3+b^3+c^3}-4\left[1-\frac{2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a^3+b^3+c^3)^2}\right]\geq 0$$

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{4(a^3+b^3+c^3)}+\frac{2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a^3+b^3+c^3)^2}\geq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

②の分子，分母に相加相乗平均の不等式を適用すると、

分子：$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$，$a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$，$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq 3a^2b^2c^2$

分母：$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$，$(a^3+b^3+c^3)^2\geq (3abc)^2=9a^2b^2c^2$

与条件より、$a^2\leq b^2+c^2$，$b^2\leq c^2+a^2$，$c^2\leq a^2+b^2$ それぞれの式にa，b，c を掛けて、

$a^3\leq ab^2+ac^2$，$b^3\leq bc^2+ba^2$，$c^3\leq ca^2+cb^2$　左辺，右辺を加えると、

$a^3+b^3+c^3\leq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ が得られる。

分母 $a^3+b^3+c^3$ については、$a^3+b^3+c^3\leq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ の条件を満たす必要があるが、$3abc$ は $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ の条件を満たしている。

以上を、②の分母分子に入れると、

$$\frac{3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}}{4\cdot 3abc}+\frac{2\cdot 3a^2b^2c^2}{(3abc)^2}=\frac{9abc}{12abc}+\frac{6a^2b^2c^2}{9a^2b^2c^2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}\geq 1$$

よって②が証明された。

また、等号の成立する条件は、a，b，c がいずれも 0 のとき、及びa，b，c のうちどれか１つが 0，他の２つが同一のとき。つまり $a=0$，$b=c$，または$b=0$，$c=a$，または$c=0$，$a=b$ の時である。

この問題は、チェビシェフの不等式を使えばもっと簡単に解けることが分かった。

チェビシェフの不等式とは、

$a>b$，$a'>b'$ のとき、$\dfrac{aa'+bb'}{2}\geq\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a'+b'}{2}$

$a>b>c$，$a'>b'>c'$ のとき、$\dfrac{aa'+bb'+cc'}{3}\geq\dfrac{a+b+c}{3}\cdot\dfrac{a'+b'+c'}{3}$ が成り立つ。

$a^2\leq b^2+c^2$，$b^2\leq c^2+a^2$，$c^2\leq a^2+b^2$ という与条件より、$a>b>c$ と仮定して問題ないので、

$a^6+b^6+c^6=a^3a^3+b^3b^3+c^3c^3$ として、チェビシェフの不等式を適用すると、

$\dfrac{a^3a^3+b^3b^3+c^3c^3}{3}\geq\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$ が成り立つ。これを、

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-4(a^6+b^6+c^6)\geq 0$ に入れて、

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-4\left[\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)^2\right]\geq 0$$

両辺を $(a^3+b^3+c^3)>0$ で割ると、$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-4\left[\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\right]\geq 0$

$a^3+b^3+c^3=a^2a+b^2b+c^2c$ とすると、$\dfrac{a^2a+b^2b+c^2c}{3}\geq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot\dfrac{a+b+c}{3}$ が成り立ち

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-4\left[\frac{1}{3^2}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\right]\geq 0$ となる。

従って、両辺を$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>0$ で割ると、$1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}\geq 0$ となり、① が証明された。

２００２年 第１２回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. n を 3 以上の自然数とする．正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ が，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$$
$$b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2=1$$

をみたすとき，不等式

$$a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\cdots+a_n(b_n+a_1)<1$$

が成り立つことを証明せよ．

$a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\cdots\cdot+a_n(b_n+a_1)$ を展開して整理すると次の①となる。

$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdot+a_nb_n\right)+(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1)$ …………………①

コーシー・シュワルツの不等式より、次式②が成り立つ。

$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdot+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdot+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdot+a_nb_n\right)^2$ ………②

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdot+a_n^2=\left(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdot+a_n\right)^2-2\left(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n\right)$ であるから、②に入れると、

$$\left[\left(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdot+a_n\right)^2-2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n)\right]\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdot+b_n^2\right)$$
$$\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdot+a_nb_n\right)^2$$

問題の条件より、$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdot+a_n=1$，$b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdot+b_n^2=1$ であるから、

$1-2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n)\ \geq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdot+a_nb_n\right)^2$

上式の両辺とも正だからルートを取り、両辺に $\left(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1\right)$ を加えると、

$$\sqrt{1-2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n)}+(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1)$$
$$\geq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdot+a_nb_n+(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1)$$

上式右辺は証明すべき式である。従って右辺<1を証明するには次式③（左辺≤ 1）を証明すればよい。

$$\sqrt{1-2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n)}+(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1)\leq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

③の第１項，第２項をそれぞれ計算する。

相加相乗平均の不等式より第１項（　）内は、

$$a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n\geq\frac{n(n-1)}{2}\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\left(a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)^{n-1}}=\frac{n(n-1)}{2}\left(a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)^{\frac{2}{n}}$$

さらに、$a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\leq\left[\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdot+a_n\right)\right]^n$ から、条件 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdot+a_n=1$

を入れると、$\dfrac{n(n-1)}{2}\left(a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)^{\frac{2}{n}}\leq\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{2n}$ となる。

以上より $a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n\leq\dfrac{n-1}{2n}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$

相加相乗平均の不等式より第２項は、

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1\geq n\sqrt[n]{\left(a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)^2}=n\left(a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)^{\frac{2}{n}}$$

第１項と同様に、$a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\leq\left[\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdot+a_n\right)\right]^n$ から

$n\left(a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)^{\frac{2}{n}}\leq n\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}$、以上より $a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1\geq\dfrac{1}{n}$ となる。

以上より、$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1\geq\dfrac{1}{n}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$

④ $a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n\leq\dfrac{n-1}{2n}$ に対し、⑤ $a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1\geq\dfrac{1}{n}$ と不等号の向きが異なっている。④と⑤を比較すると、$n\geq 3$ において $\dfrac{n-1}{2n}\geq\dfrac{1}{n}$ となるので、④⑤を③に入れて計算を進めても、$n\geq 3$ で不等式の結果に影響しないことが確認された。以上より、

$$\sqrt{1-2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdot+a_{n-1}a_n)}+(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdot+a_na_1)\leq\sqrt{1-2\cdot\frac{n-1}{2n}}+\frac{1}{n}$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\leq 1$　（$n\geq 3$ で成り立つ）

よって、$a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\cdots\cdot+a_n(b_n+a_1)<1$ が証明された。

２００３年 第１３回 日本数学オリンピック本選（第３問）

3. k は実数であり, $a^2 > bc$ をみたすいかなる正の数 a, b, c に対しても

$$(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$$

が成立するという.

このような k のうち最大のものを求めよ.

$(a^2-bc)^2 > k(b^2-ca)(c^2-ab)$ を展開して、$a^4 - 2a^2bc + b^2c^2 > kb^2c^2 - kab^3 - kac^3 + ka^2bc$

両辺の各項がすべてプラスとなるように移項し、それぞれが３項になるように整理すると、

$a^4 + b^2c^2 + ka(b^3+c^3) > kb^2c^2 + ka^2bc + 2a^2bc$

両辺に相加相乗平均の不等式を適用して、

左辺 $a^4 + b^2c^2 + ka(b^3+c^3) \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot b^2c^2\cdot ka(b^3+c^3)} = 3a\sqrt[3]{ka^2b^2c^2(b^3+c^3)}$

右辺 $kb^2c^2 + ka^2bc + 2a^2bc \ \geq 3\cdot\sqrt[3]{kb^2c^2\cdot ka^2bc\cdot 2a^2bc} = 3abc\sqrt[3]{2k^2abc}$ となるので、

$3a\sqrt[3]{ka^2b^2c^2(b^3+c^3)} > 3abc\sqrt[3]{2k^2abc}$ から、両辺を $3a$ で割り 3 乗すると、

$ka^2b^2c^2(b^3+c^3) > 2k^2ab^4c^4$ これから、$k < \dfrac{a(b^3+c^3)}{2b^2c^2} \leq \dfrac{a\cdot 2\sqrt{b^3c^3}}{2b^2c^2} = \dfrac{a}{\sqrt{bc}}$

よってk の最大値は$\dfrac{a}{\sqrt{bc}}$ である。

もとの式に $k = \dfrac{a}{\sqrt{bc}}$ を入れて、不等式が成り立つかどうか確認する。

$(a^2-bc)^2 > \dfrac{a}{\sqrt{bc}}(b^2-ca)(c^2-ab)$ を展開して整理すると、

$\sqrt{bc}\,(a^4 - 2a^2bc + b^2c^2) - a(b^2c^2 - ab^3 - ac^3 + a^2bc) > 0$

$a^3\sqrt{bc}\left(a - \sqrt{bc}\right) + b^2c^2\left(\sqrt{bc} - a\right) + a^2\left(b^3 + c^3 - 2bc\sqrt{bc}\right) > 0$

$\sqrt{bc}\left(a - \sqrt{bc}\right)\left(a^3 - bc\sqrt{bc}\right) + a^2\left(b\sqrt{b} - c\sqrt{c}\right)^2 > 0$

第１項 : 与条件より$\left(a - \sqrt{bc}\right) > 0$, $a > \sqrt{bc}$から、$\left(a^3 - bc\sqrt{bc}\right) > \left(bc\sqrt{bc} - bc\sqrt{bc}\right) = 0$ であるから、

第１項> 0

第２項 : $a^2\left(b\sqrt{b} - c\sqrt{c}\right)^2 > 0$

以上より、$(a^2-bc)^2 > \dfrac{a}{\sqrt{bc}}(b^2-ca)(c^2-ab)$ は常に成立することが確認された。

２００４年 第１４回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. $a+b+c=1$ をみたす正の実数 $a,\,b,\,c$ に対して，

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leqq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

が成立することを証明せよ．ただし，等号が成立する条件を述べる必要はない．

$1+a=(a+b+c)+a=2a+b+c$，$1-a=(a+b+c)-a=b+c$ だから式を書き直すと、

$\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{2a+b+c}{b+c}=\dfrac{2a}{b+c}+1$，同様に $\dfrac{1+b}{1-b}=\dfrac{2b}{c+a}+1$，$\dfrac{1+c}{1-c}=\dfrac{2c}{a+b}+1$ である。以上から

$\dfrac{1+a}{1-a}+\dfrac{1+b}{1-b}+\dfrac{1+c}{1-c}=3+2\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)$ と表せる。これが、

$2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)-\left[3+2\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)\right]\geq 0$ ………………① を証明すればよい。

第１項 $2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)$ については、相加相乗平均の不等式より、

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=6$$

第２項 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ は、Nesbitt(ネズビット)の不等式と言われ、$\mathrm{a,b,c}>0$ のとき、

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$ が成り立つ。

以上より、$2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\geq 6$，$3+2\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)\geq 6$ であるから、

① に入れると、$6(\geq)-6(\geq)$ となり、①の成り立つことが証明できない。

ここで、$6(\geq)$ は６以上であることを表す。

そこで①の左辺を変形して、

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)-\left[3+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\right]=2\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\right]-3$$

$$=2\left[c\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)+b\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c+a}\right)+a\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b+c}\right)\right]-3$$

$$=2\left[\frac{ca}{b(a+b)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ab}{c(b+c)}\right]-3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$\dfrac{ca}{b(a+b)}+\dfrac{bc}{a(c+a)}+\dfrac{ab}{c(b+c)}$ に相加相乗平均の不等式を適用して、

$$\frac{ca}{b(a+b)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ab}{c(b+c)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ca}{b(a+b)}\cdot\frac{bc}{a(c+a)}\cdot\frac{ab}{c(b+c)}} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

さらに、$(b+c)(c+a)(a+b) = a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$ から、

$$a^2b+bc^2 \geq 2\sqrt{a^2b\cdot bc^2} = 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$$

$$b^2c+ca^2 \geq 2\sqrt{b^2c\cdot ca^2} = 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$$

$c^2a+ab^2 \geq 2\sqrt{c^2a\cdot ab^2} = 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$ 、辺々を加えると、

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geq 6abc$ が得られ、$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$ である。
以上より、分母の $(b+c)(c+a)(a+b)$ は $8abc$より大きいので、

$3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}} \leq 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{8abc}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{3}{2}$ となる。これを②に戻すと、

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)-\left[3+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\right] = 2\left[\frac{ca}{b(a+b)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ab}{c(b+c)}\right]-3$$

$\dfrac{ca}{b(a+b)}+\dfrac{bc}{a(c+a)}+\dfrac{ab}{c(b+c)} \geq \dfrac{3}{2}$ であるから①の左辺 ≥ 0 となり、

$\dfrac{1+a}{1-a}+\dfrac{1+b}{1-b}+\dfrac{1+c}{1-c} \leq 2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)$ が証明された。

２００５年 第１５回 日本数学オリンピック本選（第３問）

3. 正の実数 a, b, c が $a+b+c=1$ をみたしているとき，

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leqq 1$$

を示せ．

$a+b+c=1$ より、$1+b-c=a+2b$，$1+c-a=b+2c$，$1+a-b=c+2a$ であるから、
問題の式は、$a\sqrt[3]{a+2b}+b\sqrt[3]{b+2c}+c\sqrt[3]{c+2a}$ と変形できる。
$a+2b=A^3$，$b+2c=B^3$，$c+2a=C^3$ とおくと、

$a=\dfrac{A^3-2B^3+4C^3}{9}$，$b=\dfrac{4A^3+B^3-2C^3}{9}$，$c=\dfrac{-2A^3+4B^3+C^3}{9}$ なので、

問題の式はA，B，Cを用いて、次の①のように表される。

$$A\cdot\frac{A^3-2B^3+4C^3}{9}+\mathrm{B}\cdot\frac{4A^3+B^3-2C^3}{9}+\mathrm{C}\cdot\frac{-2A^3+4B^3+C^3}{9}\leq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

整理すると、

$$\frac{1}{9}[(A^4+B^4+C^4)+4(AC^3+BA^3+CB^3)-2(AB^3+BC^3+CA^3)]\leq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

②の左辺の第２，３項に相加相乗平均の不等式を用いて

$$4(AC^3+BA^3+CB^3)\geq 4\cdot 3\sqrt[3]{AC^3\cdot BA^3\cdot CB^3}=12ABC(ABC)^{\frac{1}{3}}$$

$$2(AB^3+BC^3+CA^3)\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{AB^3+BC^3+CA^3}=6ABC(ABC)^{\frac{1}{3}}$$

第２，３項を計算すると、$4(AC^3+BA^3+CB^3)-2(AB^3+BC^3+CA^3)\geq 6ABC(ABC)^{\frac{1}{3}}$

不等号の向きを考慮し、$6ABC(ABC)^{\frac{1}{3}}\leq 2(A^4+B^4+C^4)$として②に戻すと、

$$\frac{1}{9}[(A^4+B^4+C^4)+2(A^4+B^4+C^4)]\leq 1 \text{ より、} \frac{1}{3}(A^4+B^4+C^4)\leq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

を証明すればよい。$A>B>C$としても一般性は失われないので、

$A^4+B^4+C^4=A^3\cdot A+B^3\cdot B+C^3\cdot C$として、チェビシェフの不等式を適用すると、

$\dfrac{A^3\cdot A+B^3\cdot B+C^3\cdot C}{3}\geq\dfrac{A^3+B^3+C^3}{3}\cdot\dfrac{A+B+C}{3}$ が成り立つ。これを③に入れて、

$$\frac{A^4+B^4+C^4}{3}\geq\frac{A^3+B^3+C^3}{3}\cdot\frac{A+B+C}{3}$$

$a+2b=A^3$，$b+2c=B^3$，$c+2a=C^3$より、$A^3+B^3+C^3=3(a+b+c)=3\cdot 1=3$だから、

$$\frac{A^4+B^4+C^4}{3}\geq\frac{A^3+B^3+C^3}{3}\cdot\frac{A+B+C}{3}=\frac{A+B+C}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

A,B,Cを元に戻して、

$A+B+C=\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}$に、ヘルダーの不等式の変形を適用する。

ヘルダーの不等式とは、コーシー・シュワルツの不等式を一般化したもので、

その変形は$p_1,p_2\cdots\cdots,p_n,q_1,q_2\cdots\cdots,q_n,r_1,r_2\cdots\cdots,r_n$が正の実数のとき、

$$(p_1^3+p_2^3+\cdots\cdots+p_n^3)(q_1^3+q_2^3+\cdots\cdots+q_n^3)(r_1^3+r_2^3+\cdots\cdots+r_n^3)\geq(p_1q_1r_1+p_2q_2r_2+\cdots\cdots+p_nq_nr_n)^3$$

が成り立つというものである。

$p_1=\sqrt[3]{a+2b}$，$p_2=\sqrt[3]{b+2c}$，$p_3=\sqrt[3]{c+2a}$，$q_1=q_2=q_3=1$，$r_1=r_2=r_3=1$として、

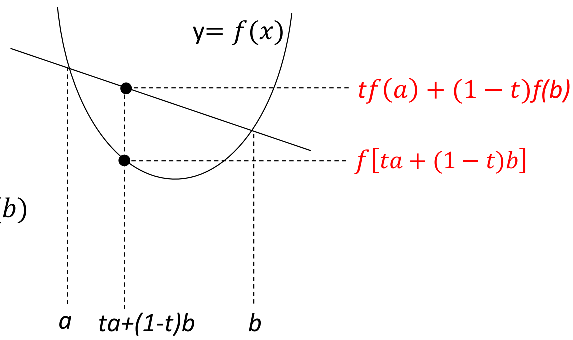
$$\left[\left(\sqrt[3]{a+2b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b+2c}\right)^3+\left(\sqrt[3]{c+2a}\right)^3\right](1^3+1^3+1^3)(1^3+1^3+1^3)$$

$$\geq\left[\left(\sqrt[3]{a+2b}\right)\cdot 1\cdot 1+\left(\sqrt[3]{b+2c}\right)\cdot 1\cdot 1+\left(\sqrt[3]{c+2a}\right)\cdot 1\cdot 1\right]^3$$

左辺$=[(a+2b)+(b+2c)+(c+2a)]\cdot 3\cdot 3=27(a+b+c)=27$

右辺$=\left[\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\right]^3=(A+B+C)^3$
よって、$27\ \geq (A+B+C)^3$ から、$A+B+C \leq 3$ である。これを④に入れると、
$\dfrac{A^4+B^4+C^4}{3} \leq 1$ が導かれる。以上より $a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$
が証明された。

Jensen（イェンセン）の不等式を用いて、この問題が解けることが分かったのでここに掲載する。
Jensen の不等式は、凸関数に対して成り立つ不等式である。
凸関数とは、右図のようにある区間で下に凸の曲線で、
曲線の区間の任意の２点を結ぶ線分が曲線
より上にあるとき。すなわち、その区間の任意の
２点 a，b と任意の $0<\mathrm{t}<1$ に対して 、
$f[ta+(1-t)b] \leq ft(a)+(1-t)f(b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$
を満たす関数をいう。このとき、



x_1，x_2，・・・・，x_n、$t_1>0$，$t_2>0$，・・・・，$t_n>0$、
$t_1+t_2+\cdots\cdots+t_n=1$ を満たす実数に対して、
$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$ が成り立つ。

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ とすると、$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ から、$x>0$ において$f''(x)<0$ となるので、
$f(x)$ は凸関数である。$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから Jensen の不等式より、
$af(1+b-c)+bf(1+c-a)+cf(1+a-b) \leq f[a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b)]$
$=f(a+ab-ac+b+bc-ab+c+ca-bc)=f(a+b+c)=f(1)=1$
よって、$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$ が証明された。

２００６年 第１６回 日本数学オリンピック本選（第５問）

5． 任意の正の実数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ に対して不等式

$$(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1) \geqq A(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)$$

が常に成り立つような実数 A の最大値を求めよ．また A をそのようにとるとき，等号が成立する条件を求めよ．

前問、２００５年本選第３問に適用した、ヘルダーの不等式の変形を適用する。

$p_1, p_2\cdots\cdots, p_n, q_1, q_2\cdots\cdots, q_n, r_1, r_2\cdots\cdots, r_n$ が正の実数のとき、

$$(p_1^3+p_2^3+\cdots\cdots+p_n^3)(q_1^3+q_2^3+\cdots\cdots+q_n^3)(r_1^3+r_2^3+\cdots\cdots+r_n^3) \geq (p_1q_1r_1+p_2q_2r_2+\cdots\cdots+p_nq_nr_n)^3$$

が成り立つ。

$p_1=x_1$，$p_2=x_2$，$p_3=x_3$，$p_4=1$，$q_1=y_1$，$q_2=y_2$，$q_3=y_3$，$q_4=1$，$r_1=z_1$，$r_2=z_2$，$r_3=z_3$，$r_4=1$ として、

$$(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1) \geq (x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3+1)^3 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

① の左辺は問題の式に一致している。右辺については、相加相乗平均の不等式より、

$x_1+y_1+z_1 \geq 3\sqrt[3]{x_1y_1z_1}$ より、$x_1y_1z_1 \leq \left(\dfrac{x_1+y_1+z_1}{3}\right)^3$

同様に、$x_2y_2z_2 \leq \left(\dfrac{x_2+y_2+z_2}{3}\right)^3$，$x_3y_3z_3 \leq \left(\dfrac{x_3+y_3+z_3}{3}\right)^3$ として①の右辺に入れると、

$$(x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3+1)^3 \leq \left[\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}\right)^3+\left(\frac{x_2+y_2+z_2}{3}\right)^3+\left(\frac{x_3+y_3+z_3}{3}\right)^3+1\right]^3$$

$(\quad)^3$ の３項については、相加相乗平均の不等式を用いて変形すると次式となる。

$$\geq \left[3\sqrt[3]{\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}\right)^3\left(\frac{x_2+y_2+z_2}{3}\right)^3\left(\frac{x_3+y_3+z_3}{3}\right)^3}+1\right]^3$$

$$=\left[3\cdot\frac{x_1+y_1+z_1}{3}\cdot\frac{x_2+y_2+z_2}{3}\cdot\frac{x_3+y_3+z_3}{3}+1\right]^3=\left[\frac{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}{3^2}+1\right]^3$$

ここでさらに、$1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$ と分解すると、

$$\left[\frac{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}{3^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^3 \geq \left[3\sqrt[3]{\frac{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}{3^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right]^3$$

$$=3^3\cdot\frac{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}{3^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)$$

これをもとの式と比較して、A の最小値は $\dfrac{3}{4}$ である。

等号が成立する条件は、①において等号が成立することから、
$x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_2 = z_3$ のときである。

２０１０年 第２０回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. 正の実数 x, y, z に対し，

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \geqq 1$$

が成り立つことを示せ.

分母分子を相加相乗平均の不等式を用いて変形する。第１項について、

$1+xy+xz \geq 3\cdot x^{\frac{2}{3}}(yz)^{\frac{1}{3}}$，$(1+y+z)^2 \geq \left[3(yz)^{\frac{1}{3}}\right]^2$ から、$\dfrac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2} \geq \dfrac{3\cdot x^{\frac{2}{3}}(yz)^{\frac{1}{3}}}{\left[3(yz)^{\frac{1}{3}}\right]^2} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{3(yz)^{\frac{1}{3}}}$

第２項、第３項についても同様に計算して、問題の式に入ると次式となる。

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2} \geq \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3(yz)^{\frac{1}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{3(zx)^{\frac{1}{3}}}+\frac{z^{\frac{2}{3}}}{3(xy)^{\frac{1}{3}}} \geq 3\left[\frac{(xyz)^{\frac{2}{3}}}{3^3\cdot(yz\cdot zx\cdot xy)^{\frac{1}{3}}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$= 3\left[\dfrac{(xyz)^{\frac{2}{3}}}{3^3\cdot(xyz)^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{3}} = 3\cdot\dfrac{1}{3} = 1$ よって $\dfrac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\dfrac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\dfrac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2} \geq 1$ が証明された。

不等式問題を解くにあたり、いろいろな不等式の公式を学んだ。
「相加相乗平均の不等式」「ジェンセンの不等式」「ヤングの不等式」「ネスビットの不等式」「シュールの不等式」「シュワルツの不等式」「チェビシェフの不等式」「ヘルダーの不等式」などである。
また、不等式問題を解くには同次式にすることで解きやすくなることを理解した。
例えば、$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ は、右辺，左辺とも３次式であり、３次の同次式である。
x，y，z をそれぞれ k 倍して、$x=kX$，$y=kY$，$z=kZ$ とすると、
$(kX)^3+(kY)^3+(kZ)^3 \geq 3(kX)\cdot(kY)\cdot(kZ) = 3k^3XYZ$、両辺を k^3 で割れば元の式に戻り、不等式の形は変わらない。つまり、不等式が成り立つかどうかは、x，y，z の比率のみで決まる。

$x=3$，y = 2，z = 1 が不等式を満たすことを証明するには、$x=\dfrac{3}{6}$，y $=\dfrac{2}{6}$，z $=\dfrac{1}{6}$ として、

$x+y+z=1$ の条件で証明すればよい。

問題によって、$x+y+z=1$ の条件が与えられていることがあるが、与えられていない場合でも同次式にすることによって、$x+y+z=1$ の条件で証明することができる。

（２０２２．１１．１２）