１３７「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１０）」

２０１４年 第２４回 日本数学オリンピック本選（第５問）

5. 不等式

$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+k(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2} \geqq \frac{1}{2}$$

が $a+b+c=1$ をみたす任意の非負実数 a, b, c に対して成り立つような実数 k の最大値を求めよ.

この問題は、これまでの方法では解くことができなかった。
コーシー・シュワルツの不等式の変形公式、

「任意の実数 a_i, b_i に対し、$\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$ が成り立つ」を用いて、 $i=3$ とすれば、

$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$ という式になる。

$a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, $b=\left(\sqrt{b}\right)^2$, $c=\left(\sqrt{c}\right)^2$ として問題の式を当てはめると、

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2}{1+9ca+k(c-a)^2}+\frac{\left(\sqrt{c}\right)^2}{1+9ab+k(a-b)^2}$$

$\geq \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3+9(bc+ca+ab)+k[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]}$ という式が導かれる。

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=(a+b+c)+2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right)=1+2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right)$

$[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]=2[(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab)]$

$=2[(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)]=2[1-3(bc+ca+ab)]$ だから、

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3+9(bc+ca+ab)+k[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]}=\frac{1+2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right)}{3+9(bc+ca+ab)+2k[1-3(bc+ca+ab)]}$$

$$=\frac{1+2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right)}{(3+2k)+3\cdot(3-2k)(bc+ca+ab)}$$

ここで、相加相乗平均の不等式を用いて、

$\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{(abc)^2}}=3(abc)^{\frac{1}{3}}$、$1=a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3(abc)^{\frac{1}{3}}$ から、

$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}$ である。よって、$\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab} \leq 3\cdot\frac{1}{3}=1$

$bc+ca+ab \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3(abc)^{\frac{2}{3}}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$ である。以上をもとの式に入れて、

$$\frac{1+2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right)}{(3+2k)+3\cdot(3-2k)(bc+ca+ab)} \geq \frac{1+2\cdot 1}{(3+2k)+3\cdot(3-2k)\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$ となり、途中で k が消去され

k に関係なく式が成り立つので問題を解くことができない。

$\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$ の値は、$a=b=c=\frac{1}{3}$ のとき最大値 1 となり、 a, b, c のいずれかが 1，残りが 0 のとき最小値 0、$bc+ca+ab$ の値は、$a=b=c=\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{1}{3}$、 a, b, c のいずれかが 1、残りが 0 のとき最小値 0 である。　問題の式に $a=b=c=\frac{1}{3}$ を入れると、

$$\frac{\frac{1}{3}}{1+9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2} \times 3 = \frac{1}{2},\quad a=1,\ b=c=0 \text{ を入れると、} \frac{1}{1+9\cdot 0\cdot 0+k(0-0)^2} = 1$$

となり、いずれも k によらず成り立ち、ここで行き詰ってしまった。

そこで、問題が要求する解法とは全く違うが、

$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2} + \frac{b}{1+9ca+k(c-a)^2} + \frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2} - \frac{1}{2} \geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

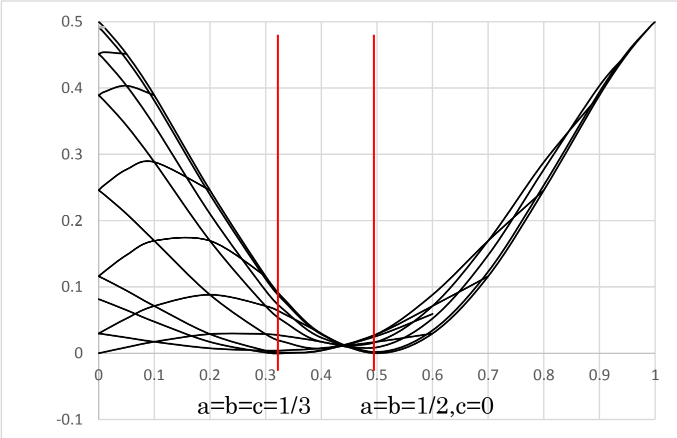
に直接数値を入れて計算してみることにした。

$a+b+c=1$ より、$c=1-a-b$ だから、 a, b 2 変数関数となる。$0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ の範囲で任意の非不実数 a, b に対して成り立つ k の最大値をシミュレーションして求めると、以下の表のように、$k=4$ であることが分かった。

k=4		最大値	0.5	最小値	0											
a＼b	0	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.3333	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1
0	0.5	0.4916	0.4514	0.389	0.2458	0.1161	0.0815	0.0298	0	0.0298	0.1161	0.2458	0.389	0.4514	0.4916	0.5
0.01	0.4916	0.4832	0.443	0.3809	0.2393	0.112	0.0784	0.0286	0.0018	0.0345	0.1231	0.2535	0.3941	0.454	0.4916	
0.05	0.4514	0.443	0.4035	0.3435	0.2103	0.0945	0.0651	0.0236	0.009	0.0524	0.1481	0.2772	0.4035	0.4514		
0.1	0.389	0.3809	0.3435	0.2883	0.1696	0.0712	0.0476	0.0173	0.0173	0.0712	0.1696	0.2883	0.389			
0.2	0.2458	0.2393	0.2103	0.1696	0.0882	0.0289	0.0171	0.0075	0.0289	0.0882	0.1696	0.2458				
0.3	0.1161	0.112	0.0945	0.0712	0.0289	0.004	0.0011	0.004	0.0289	0.0712	0.1161					
0.3333	0.0815	0.0784	0.0651	0.0476	0.0171	0.0011	0	0.0044	0.0261	0.0593						
0.4	0.0298	0.0286	0.0236	0.0173	0.0075	0.004	0.0044	0.0075	0.0173	0.0298						
0.5	0	0.0018	0.009	0.0173	0.0289	0.0289	0.0261	0.0173	0							
0.6	0.0298	0.0345	0.0524	0.0712	0.0882	0.0712	0.0593	0.0298								
0.7	0.1161	0.1231	0.1481	0.1696	0.1696	0.1161										
0.8	0.2458	0.2535	0.2772	0.2883	0.2458											
0.9	0.389	0.3941	0.4035	0.389												
0.95	0.4514	0.454	0.4514													
0.99	0.4916	0.4916														
1	0.5															

上表をグラフにすると次ページのようになり、$a=b=c=\frac{1}{3}$ または a, b, c のうち 2 つが $\frac{1}{2}$，残りが 1 のとき ① が 0 となることがわかる。

$k > 4$ の場合は ①の値が負になり、①が成立しない。この結果から $k = 4$ が解である。



さらに、$0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1$ の範囲で $a,\ b$ の値を変化させたとき、k の値がどうなるかを考えてみた。

① を変形して、k^3の項，k^2の項，kの項，定数項に分け整理すると以下のようになる。

$\boldsymbol{k^3}$の項：$-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\boldsymbol{k^3}$

$\boldsymbol{k^2}$の項：
$$[2\{a(c-a)^2(a-b)^2+b(a-b)^2(b-c)^2+c(b-c)^2(c-a)^2\} \\ -\{(1+9ab)(b-c)^2(c-a)^2+(1+9bc)(c-a)^2(a-b)^2 \\ +(1+9ca)(a-b)^2(b-c)^2\}]\boldsymbol{k^2}$$

$\boldsymbol{k}$ の項：
$$2[9[a^2\{b(c-a)^2+c(a-b)^2\}+b^2\{c(a-b)^2+a(b-c)^2\}+c^2\{a(b-c)^2+b(c-a)^2\}] \\ +[a\{(c-a)^2+(a-b)^2\}+b\{(a-b)^2+(b-c)^2\}+c\{(b-c)^2+(c-a)^2\}] \\ -\{(1+9ab)(1+9bc)(c-a)^2+(1+9ca)(1+9ab)(b-c)^2 \\ +(1+9bc)(1+9ca)(a-b)^2\}]\boldsymbol{k}$$

定数項：
$$2[(a+b+c)+9\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+81abc(a^2+b^2+c^2)] \\ -(1+9ab)(1+9bc)(1+9ca)$$

① に対して、$0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1$ の範囲で、a, b について $(a,\ b) = (0,\ 0) \cdots\cdots (0.5,\ 0.5) \cdots\cdots (1.0,\ 1.0)$ と変化させ、① $= 0$ としてその方程式を解く。

①を整理すると、k の 3 次方程式となるので、解の公式を用いて解くことができる。

「k^3，k^2，k，定数」の各項を係数とする方程式を解き、解をまとめると下表のようになった。

a＼b	0	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1
0	kに関係なく成り立つ	9800.041 −1.041	360.233 −1.230	80.545 −1.533	16.439 −2.376	6.910 −3.282	4.528 −3.834	4.000	4.528 −3.834	6.910 −3.282	16.439 −2.376	80.545 −1.533	360.233 −1.230	9800.041 −1.041	kに関係なく成り立つ
0.01	9800.041 −1.041	 −1.201	547.489 −1.378	95.842 −1.711	17.248 −2.664	6.980 −3.687	4.536 −4.279	4.031	4.661 −4.242	7.453 −3.600	19.555 −2.556	124.312 −1.637	996.243 −1.321	9800.041 −1.041	
0.05	360.233 −1.230	547.489 −1.378	 −2.309	263.257 −2.501	21.378 −4.104	7.245 −5.847	4.563 −6.596	4.201 −6.707	5.434 −6.335	11.216 −5.073	55.382 −3.199	 −2.309	360.233 −1.230		
0.1	80.545 −1.533	95.842 −1.711	263.257 −2.501	 −5.255	29.824 −6.483	7.521 −10.611	4.599 −11.441	4.599 −11.441	7.521 −10.611	29.824 −6.483	 −5.255	80.545 −1.533			
0.2	16.439 −2.376	17.248 −2.664	21.378 −4.104	29.824 −6.483	29.500	7.722 −38.940	4.843	7.722 −38.940	29.500	29.824 −6.483	16.439 −2.376				
0.3	6.910 −3.282	6.980 −3.687	7.245 −5.847	7.521 −10.611	7.722 −38.940	7.050	7.050	7.722 −38.940	7.521 −10.611	6.910 −3.282					
0.4	4.528 −3.834	4.536 −4.279	4.563 −6.596	4.599 −11.441	4.843	7.050	4.843	4.599 −11.441	4.528 −3.834						
0.5	4.000	4.031	4.201 −6.707	4.599 −11.441	7.722 −38.940	7.722 −38.940	4.599 −11.441	4.000							
0.6	4.528 −3.834	4.661 −4.242	5.434 −6.335	7.521 −10.611	29.500	7.521 −10.611	4.528 −3.834								
0.7	6.910 −3.282	7.453 −3.600	11.216 −5.073	29.824 −6.483	29.824 −6.483	6.910 −3.282									
0.8	16.439 −2.376	19.555 −2.556	55.382 −3.199	 −5.255	16.439 −2.376										
0.9	80.545 −1.533	124.312 −1.637	 −2.309	80.545 −1.533											
0.95	360.233 −1.230	996.243 −1.321	360.233 −1.230												
0.99	9800.041 −1.041	9800.041 −1.041													
1	kに関係なく成り立つ														

３次方程式の解は次の２つのケースに分けられる。

（１） ３つの実数根を持つ

（２） １つの実数根と２つの共役複素数根をもつ

（１）のケースで得られた３つの実数根を①に入れて検算した結果、成り立たない解については表から除外、また（２）のケースは１つの実数根のみとし、２つの複素数根については除外した。

k^3の項が０の場合は２次方程式となるので、次の２つのケースがある。

（３） ２つの実数根を持つ

（４） ２つの共役複素数根をもつ

今回の計算では（４）のケースはなく全て実数根だった。

表を作成するにあたり、３次方程式の解の公式をエクセルでプログラムしたので、別項で詳述する。

①式は $k \leq 0$ で成り立つことは明らかであり、$k > 0$ のとき、$0 \leq a \leq 1$，$0 \leq b \leq 1$ の範囲で a，b，c すべての数値で①が成り立つ必要があるので、表中最小のものが求める解である。

表から、$a = 0.5$，$b = 0.5$（$c = 0$）、$a = 0.5$，$b = 0$（$c = 0.5$）、$a = 0$，$b = 0.5$（$c = 0.5$）の場合の、$k = 4$ が最小であり、問題の解答は“４”ということが確認できる。

問題の要求する方法を無視して、力づくで解いた問題だったが、次のような解答があることが分かった。以下、「３次の同次対称式についての不等式の証明」による解答を示す。

$P(a, b, c)$ を３次の同次対称多項式とするとき、任意の負でない実数 a，b，c に対して、

不等式 $P(a, b, c) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は、

$P(1, 1, 1)$，$P(1, 1, 0)$，$P(1, 0, 0) \geq 0$ が成り立つことである。(Hoo Joo Lee により証明)

３次の同次対称多項式とは、$x^3 + y^3 + z^3$，$x^2y + y^2z + z^2x$，$xy^2 + yz^2 + zx^2$ のような式をいう。

以下、証明を示すと、

$$\frac{a}{1 + 9bc + k(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + k(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + k(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

左辺のそれぞれの項の分母分子に a，b，c を掛けて、

$$\frac{a^2}{a + 9abc + ka(b-c)^2} + \frac{b^2}{b + 9abc + kb(c-a)^2} + \frac{c^2}{c + 9abc + kc(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

ここで、コーシー・シュワルツの不等式の変形公式 $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ を用いて、

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a + b + c + 27abc + k[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2]}$$

$$= \frac{1}{1 + \underline{\underline{27abc + k[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2]}}} \geq \frac{1}{2}$$ という式が導かれる。

これから、$27abc + k[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \leq 1$ であればよいことがわかる。

左辺の３次式に対し、右辺を３次式にして同次化する。$a + b + c = 1$ から、$1 = (a+b+c)^3$ を入れて、

$27abc + k[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \leq (a+b+c)^3$

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1)$ のとき、$27abc \le (1+1+1)^3 = 27$ 等号が成り立つ。
$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 0)$ のとき、$k[1(1-0)^2+1(0-1)^2] \le (1+1+0)^3$ 、$2k \le 8$ より
$k \le 4$ で成り立つ。
$(a,\ b,\ c) = (1,\ 0,\ 0)$ のとき、$k[1(0-0)^2+0(0-1)^2+0(1-0)^2] = 0 < 1$ 不等号が成り立つ。
以上より、$k \le 4$ のとき問題の不等式が成り立つことがわかる。

与えられた不等式に $(a,\ b,\ c) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ を入れると、

$\dfrac{\frac{1}{2}}{1+k\left(\frac{1}{2}-0\right)^2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+k\left(0-\frac{1}{2}\right)^2} \ge \dfrac{1}{2},\ 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}k} \ge \dfrac{1}{2}$ より、$k \le 4$ のとき不等式が成り立つので

$k=4$ のとき不等式が成立することを示せば、k の最大値が4であることが証明される。
$27abc + 4[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2] \le (a+b+c)^3$ を展開して整理すると、
$a^3+b^3+c^3+3abc-[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)] \ge 0$
$b^2+c^2 \ge 2bc,\ c^2+a^2 \ge 2ca,\ a^2+b^2 \ge 2ab$ だから、$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \ge 6abc$
以上より、$a^3+b^3+c^3+3abc-[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)] \ge a^3+b^3+c^3-3abc$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \ge 0$$

よって、$\dfrac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\dfrac{b}{1+9ca+k(c-a)^2}+\dfrac{c}{1+9ab+k(a-b)^2} \ge \dfrac{1}{2}$ が証明された。

$a,\ b,\ c$ の中に0があるときは、$a+b=1,\ c=0$ と仮定すると、

$\dfrac{a}{1+4b^2}+\dfrac{b}{1+4a^2} \ge \dfrac{1}{2}$ を示せばよい。

$a=0$ または $b=0$ のときは成り立つので、$a>0,\ b>0$ として、

$\dfrac{a}{1+4b^2}+\dfrac{b}{1+4a^2} = \dfrac{a^2}{a+4ab^2} + \dfrac{b^2}{b+4a^2b} \ge \dfrac{(a+b)^2}{a+b+4ab(a+b)} = \dfrac{1}{1+4ab} \ge \dfrac{1}{2}$ から、

$1 \ge 4ab$ 、$1=(a+b)^2$ を用いて、$(a+b)^2 \ge 4ab$, $(a-b)^2 \ge 0$ となり成り立つ。

0<a, b, c<1, a+b+c=1 とする時、次の不等式が成り立つことを示せ

$$(1+a)\sqrt{\frac{1-a}{a}}+(1+b)\sqrt{\frac{1-b}{b}}+(1+c)\sqrt{\frac{1-c}{c}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}}$$

ネット上に数学オリンピックの難問不等式として出題されていた問題。ここまで、不等式問題に取り組んできたので、簡単に解くことができた。

左辺を相加相乗平均の不等式を用いて変形すると、

$$(1+a)\sqrt{\frac{1-a}{a}}+(1+b)\sqrt{\frac{1-b}{b}}+(1+c)\sqrt{\frac{1-c}{c}}\geq 3\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)\sqrt{\frac{(1-a)\,(1-a)\,(1-a)}{abc}}}$$

よって、 $3\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)\sqrt{\frac{(1-a)\,(1-a)\,(1-a)}{abc}}}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{\sqrt{(1-a)\,(1-a)\,(1-a)}}$

両辺を３で割り６乗すると、

$$[(1+a)(1+b)(1+c)]^2\frac{(1-a)\,(1-a)\,(1-a)}{abc}\geq\frac{3^3}{4^6}\frac{[(1+a)(1+b)(1+c)]^6}{[(1-a)(1-b)(1-c)]^3}$$

両辺を$[(1+a)(1+b)(1+c)]^2[(1-a)\,(1-a)\,(1-a)]$で割ると、

$$\frac{1}{abc}\geq\frac{3^3}{4^6}\frac{[(1+a)(1+b)(1+c)]^4}{[(1-a)(1-b)(1-c)]^4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

ここで、$(1+a)+(1+b)+(1+c)=\ [3+(a+b+c)]=4\geq 3\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$ から、

$(1+a)(1+b)(1+c)\leq\left(\frac{4}{3}\right)^3$

$(1-a)+(1-b)+(1-c)=\ [3-(a+b+c)]=2\geq 3\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$ から、

$(1-a)(1-b)(1-c)\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3$ 以上を①に入れて、

$$\frac{1}{abc}\geq\frac{3^3}{4^6}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}=\frac{3^3}{4^6}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{12}=\frac{3^3\cdot 2^{12}}{4^6}=3^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ より、$\frac{1}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ ，$\left(\frac{1}{3}\right)^3\geq abc$ だから、$\frac{1}{abc}\geq 3^3$　②が成り立つ。

以上より、問題の不等式が証明された。

同次対称多項式の不等式に変形すれば、簡単な機械的計算でできる定理があることを知った。
この定理を使えば、不等式の証明において様々な工夫をする必要がなく非常に有効な手段だと思う。
（２０２２．１２．１２）