１４１「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１１）」

２０１３年 第２３回 日本数学オリンピック本選（第１問）

4. 鋭角三角形 ABC があり，その垂心を H とする．点 B, C を通る円と線分 AH を直径とする円が異なる 2 点 X, Y で交わっている．A から直線 BC におろした垂線の足を D とし，D から直線 XY におろした垂線の足を K とする．このとき，$\angle BKD = \angle CKD$ が成り立つことを示せ．

図１に示す鋭角三角形ＡＢＣにおいて、３辺をａ，ｂ，ｃ、３つの角をα，β，γとする。点Ｂ，Ｃを通る円Ｃ１の中心をO_1、ＡＨを直径とする円Ｃ２の中心をO_2、O_1から辺ＢＣに下ろした垂線の足をＰとする。O_1O_2を結ぶ直線と平行で、点Ｐを通る直線とＸＹとの交点をＱとする。直線ＰＱとＤＫは平行である。直線ＸＹを延長し、点Ｂ，Ｃから ＸＹに下ろした垂線の足をＥ，Ｆ ＸＹとＢＣの交点をＧとする。∠ＢＫＤ＝∠ＣＫＤを示すために、⊿ＢＥＫと⊿ＣＦＫが相似であることを示す。相似が証明されれば、相対する角度は等しいことから題意が証明される。∠ＱＰＤ＝θとすると、

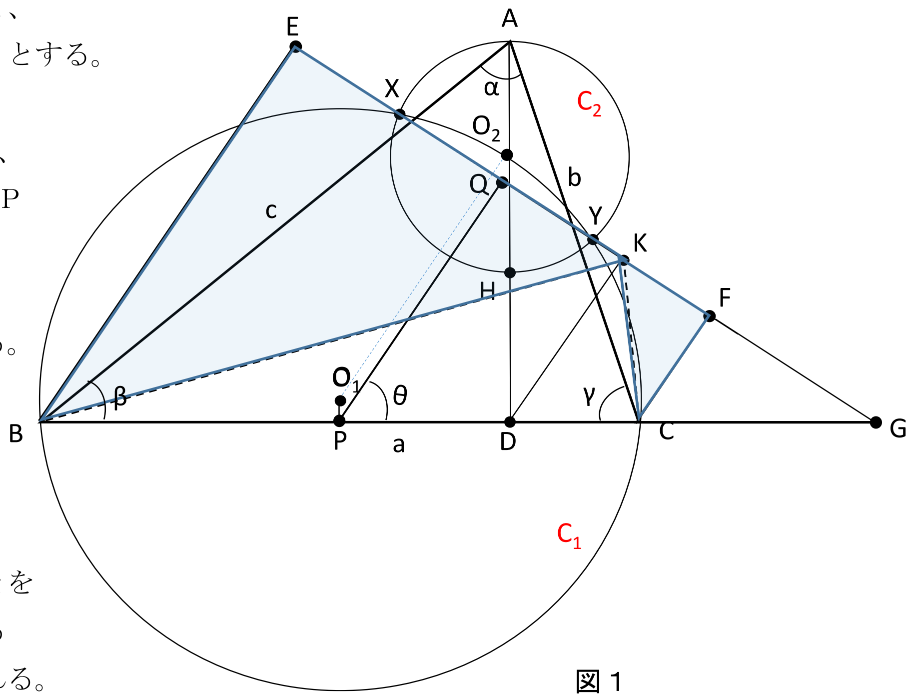


図１

$$BE = PQ + \frac{a}{2}\cos\theta\,,\quad CF = PQ - \frac{a}{2}\cos\theta\, l$$

$$EK = c\cos\beta\sin\theta\,,\quad KF = b\cos\gamma\sin\theta$$

⊿ＢＥＫと⊿ＣＦＫの相対する辺は、ＢＥに対しＣＦ，ＥＫに対しＫＦであるから、それぞれの辺の比を比較する。

$$\frac{CF}{BE} = \frac{PQ - \frac{a}{2}\cos\theta}{PQ + \frac{a}{2}\cos\theta}\,,\quad \frac{KF}{EK} = \frac{b\cos\gamma\sin\theta}{c\cos\beta\sin\theta} = \frac{b\cos\gamma}{c\cos\beta}$$

$\dfrac{KF}{EK}$ については両辺の比が求められたが、$\dfrac{CF}{BE}$ を求めるためには PQ 及び θ を求めなければならず、ここで行き詰まってしまった。

以下、PQ 及び θ 求めるための計算を行うが、途中の計算は非常に複雑である。

計算を単純化するため、点ＰとＯ$_1$が一致している場合（ＢＣが直径となる場合）について考える。点Ｂを原点とする直交座標を考え式を立てる。
求めるＰＱの長さは、直線ＸＹとＯ$_1$Ｏ$_2$を結ぶ直線の交点とＰ（Ｏ$_1$）の距離である。

C_1 の半径は$\dfrac{a}{2}$，中心座標は$\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$、$C_2$ の半径は$\dfrac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}$，中心座標は$\left(c\cos\beta,\ \dfrac{c\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}\right)$

と求められるので、C_1 及びC_2 は以下の式で表される。

$$C_1：\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,\quad C_2：(x-c\cos\beta)^2+\left(y-\frac{c\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}\right)^2=\left(\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right)^2$$

図２に示すように、半径 R_1，R_2、中心間の距離 l の２つの円の交点は、図に示す式で与えられることを用いる。図１において（但し点ＰとＯ$_1$が一致しているとする）

$$R_1=\frac{a}{2},\quad R_2=\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}$$

$$l=\sqrt{\left(c\cos\beta-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}\right)^2}$$ から、

$$PQ=\frac{R_1^2-R_2^2+l^2}{2l}=$$

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right)^2+\left(c\cos\beta-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}\right)^2}{2\sqrt{\left(c\cos\beta-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}\right)^2}}$$

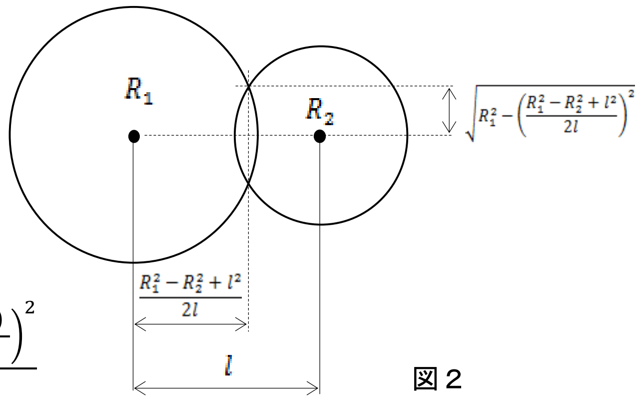


図２

計算すると、分子$=\dfrac{a^2}{2}$，分母$=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ となり $PQ=\dfrac{a^2\sin\gamma}{2c}=\dfrac{a\sin\alpha}{2}$ （計算過程は省略）

が得られ、XY については $XY=\sqrt{R_1^2-\left(\dfrac{R_1^2-R_2^2+l^2}{2l}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sin\alpha}{2}\right)^2}=\dfrac{a\cos\alpha}{2}$

という結果となり、驚くほど簡単な形で PQ 及び XY が表わされた。

さらに、$\tan\theta=\dfrac{\frac{c\cos(\gamma-\beta)}{2\sin\gamma}}{c\cos\beta-\frac{a}{2}}=\dfrac{1}{\tan(\gamma-\beta)}$ から、$\theta=\dfrac{\pi}{2}-(\gamma-\beta)$ である。

以上の結果を用いて、

$$\frac{CF}{BE}=\frac{PQ-\frac{a}{2}\cos\theta}{PQ+\frac{a}{2}\cos\theta}=\frac{\frac{a\sin\alpha}{2}-\frac{a}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\gamma-\beta)\right]}{\frac{a\sin\alpha}{2}+\frac{a}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\gamma-\beta)\right]}=\frac{\sin\alpha-\sin(\gamma-\beta)}{\sin\alpha+\sin(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\gamma+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}=\frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\beta}$$、$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}$ であるから、$\frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\beta}=\frac{b\cos\gamma}{c\cos\beta}$

となり、$\frac{CF}{BE}$は$\frac{KF}{EK}$ と一致することが確認された。よって問題は証明された。

∠ＢＫＤを計算すると、∠ＢＫＤ＝９０°－∠ＢＫＥから

$$tan(\angle BKE)=\frac{BE}{EK}=\frac{\frac{a}{2}[\sin\alpha+\sin(\gamma-\beta)]}{c\cos\beta\sin\theta}=\frac{a\sin\gamma\cos\beta}{c\cos\beta\cos(\gamma-\beta)}=\frac{a\sin\gamma}{c\cos(\gamma-\beta)}=\frac{\sin\alpha}{\cos(\gamma-\beta)}$$

$$tan(\angle BKD)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\angle BKE\right)=\cot(\angle BKE)=\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\sin\alpha}$$

よって、$\angle BKD=\tan^{-1}\left[\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\sin\alpha}\right]$

図を見ただけでは分からないが、計算で出てきた「$\gamma-\beta$」は、∠ＢＧＥの角度を表している。

計算により幾何学問題を解いていると、出てきた結果が幾何学的な意味を示していることに気付くことが多い。この「$\gamma-\beta$」もその一例である。

例えば、α＝６０°，β＝４５°，γ＝７５°として角度を計算してみると、

$$\angle BKD=\tan^{-1}\left[\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\sin\alpha}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}\right]=\tan^{-1}[1]=45^\circ$$ となる。

以上より、ＢＣが直径となる場合において点Ｋはその円周上にあり、点Ｙに一致し∠ＢＫＣは９０°であることがわかる。

２０１４年 第２４回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. 三角形 ABC があり，その外心を O とする．辺 BC の中点を通り $\angle BAC$ の二等分線に垂直な直線を l とする．l が線分 AO の中点を通るとき，$\angle BAC$ の大きさを求めよ．

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、

３辺をａ，ｂ，ｃ、３つの角をα，β，γ、

ＢＣの中点をＭとする。

Ｍを原点とするＸ－Ｙ平面座標を考える。

∠ＢＡＣを２等分する直線と辺ＢＣ（Ｘ軸）のなす角度は $\frac{\alpha}{2}+\beta$ だから、この直線に垂直な直線 l の辺ＢＣ（Ｘ軸）とのなす角度は $\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\pi}{2}$ である。

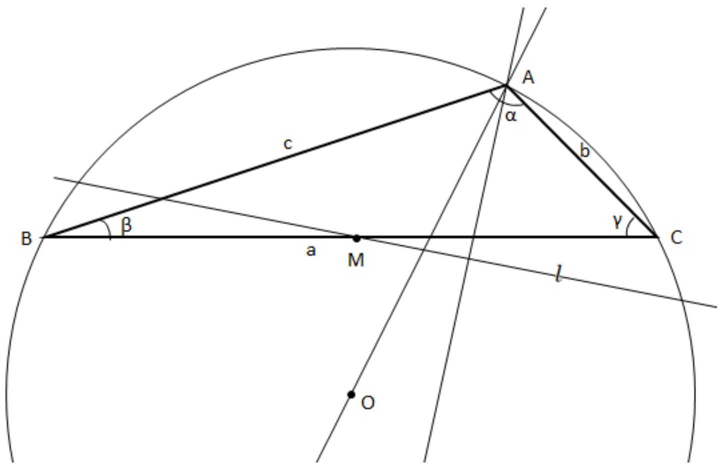


図１

l はＢＣの中点Mを通るので、その方程式は

$$y = tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\pi}{2}\right)x = -\frac{1}{tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

点Ａの座標は $\left(c\,cos\,\beta-\frac{a}{2},\ c\,sin\,\beta\right)$，点Ｏの座標は $\left(0,\ R\,cos\,\alpha\right)$ であるから、

直線ＡＯの方程式は次の⑤で表される。

$$y = \frac{c\,sin\,\beta - R\,cos\,\alpha}{c\,cos\,\beta-\frac{a}{2}}x + R\,cos\,\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

ここで R は外接円の半径である。

①　②を解けばその交点Mが求められる。MはＡＯの中点だから、Mの座標を $\left(x_1,\ y_1\right)$ とすると、

$x_1 = \dfrac{c\,cos\,\beta-\frac{a}{2}}{2}$，$y_1 = \dfrac{c\,sin\,\beta+R\,cos\,\alpha}{2}$ に一致する。

よって、

$$x_1 = \frac{-R\,cos\,\alpha}{\frac{1}{tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}+\frac{c\,sin\,\beta-R\,cos\,\alpha}{c\,cos\,\beta-\frac{a}{2}}} = \frac{c\,cos\,\beta-\frac{a}{2}}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$y_1 = -\frac{1}{tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}x_1 = -\frac{1}{tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}\cdot\frac{c\,cos\,\beta-\frac{a}{2}}{2} = \frac{c\,sin\,\beta+R\,cos\,\alpha}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

ＡＯの中点という条件は、x_1 と y_1 のいずれかで満たせば、もう一方も満たされるため、簡単な④式で計算する。正弦定理より $R = \dfrac{a}{2\,sin\,\alpha}$ だから、④は次の式となり、これを満たすαを求めればよい。

$$-\frac{1}{tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}\cdot\frac{c\,cos\,\beta-\frac{a}{2}}{2} = \frac{c\,sin\,\beta+\frac{a}{2\,sin\,\alpha}\cdot cos\,\alpha}{2}$$

展開すると、$-c\,cos\,\beta\,cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)+\frac{a}{2}cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = c\,sin\,\beta\,sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)+\frac{a\,cos\,\alpha}{2\,sin\,\alpha}\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$

整理して、$c\left[cos\,\beta\,cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)+sin\,\beta\,sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right]+\frac{a}{2}\left[\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)-cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right]=0$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⑤

[　] 内はそれぞれ、$cos\,\beta\,cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)+sin\,\beta\,sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta-\beta\right) = cos\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)-cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = \frac{cos\,\alpha\,sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)-sin\,\alpha\,cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{sin\,\alpha} = \frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta-\alpha\right)}{sin\,\alpha}$$

$= \dfrac{sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}{sin\,\alpha}$ と変形できるので、⑤ は $c\,cos\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}{sin\,\alpha}=0$ と書ける。

分母を払って展開すると、$2\,c\,\underline{\sin\alpha}\cos\dfrac{\alpha}{2}+\underline{a\sin\beta}\cos\dfrac{\alpha}{2}-\underline{a\cos\beta}\sin\dfrac{\alpha}{2}=0$

$\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$， $a\sin\beta=b\sin\alpha$， $a\cos\beta=c-b\cos\alpha$ を入れて、

$4\,c\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\,b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-c\sin\dfrac{\alpha}{2}+b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha=0$,

$\sin\dfrac{\alpha}{2}$ で割り、$\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$ を入れると、

$(4c+2b)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-c+2\,b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-b=0$， $4\,(b+c)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=b+c$， $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$

以上より $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$， $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ または $\dfrac{2\pi}{3}$， $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$ $(\alpha=120^\circ)$ または、$\dfrac{4\pi}{3}$ $(\alpha=240^\circ)$

$\alpha<180^\circ$ から、∠ＢＡＣ= 120° が求める角度である。

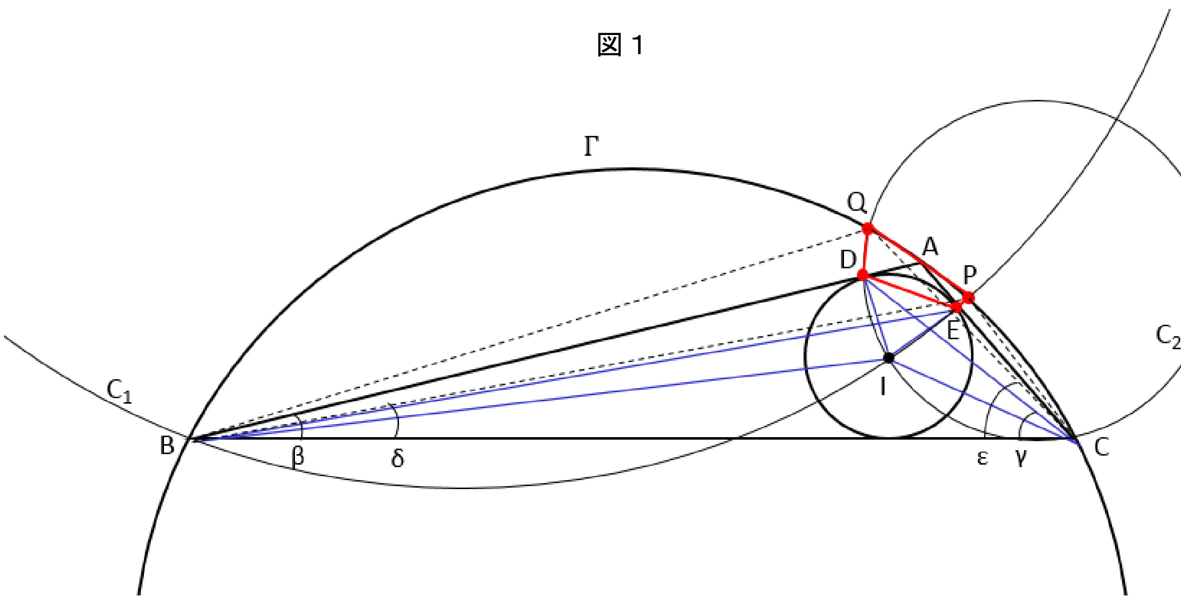
２０１４年 第２４回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. 二等辺三角形でない三角形 ABC があり，その外接円を Γ，内心を I とおく．また，三角形 ABC の内接円と辺 AB, AC の接点をそれぞれ D, E とおく．三角形 BEI の外接円と Γ の交点のうち B でない方を P，三角形 CDI の外接円と Γ の交点のうち C でない方を Q とするとき，4 点 D, E, P, Q は同一円周上にあることを示せ．

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、∠ＢＡＣ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＡＣＢ＝γ、⊿ＢＥＩの外接円をＣ$_1$，⊿ＣＤＩの外接円をＣ$_2$，∠ＰＢＣ＝δ，∠ＱＣＢ＝ε とおく。

点Ｄ，Ｅ，Ｐ，Ｑが同一円周上にあることを示すには、四角形ＤＥＰＱが円に内接することを示せばよいが、そのためには内接四角形の特性である、対角の和が１８０°になることをいえばよい。

図１



四角形ＢＩＥＰ，四角形ＣＩＤＱ扁平な四角形であるが、それぞれ⊿ＢＥＩの外接円Ｃ$_1$，⊿ＣＤＩの外接円Ｃ$_2$に内接しているので、対角の和は１８０°である。このことから、四角形ＤＥＰＱの内角をもとめていく。

拡大図（図２）参照

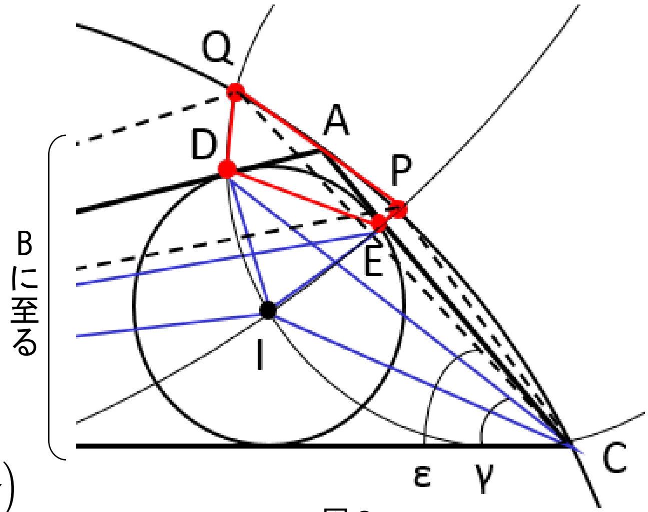


図２

まず、四角形ＢＩＥＰについて、

$\angle QPE = \angle BPE + \angle BPQ$，$\angle BPE$ は$\angle BIE$ の対角だから、$\angle BIE$ を求めると、

$\angle BIE = \angle BID + \angle DIE$，$\angle BID = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\beta}{2}$，

$\angle DIE = \pi - \alpha = \beta + \gamma$ だから、

$\angle BIE = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right) + (\beta + \gamma) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \gamma$

よって、$\angle BPE = \pi - \left[\dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\beta}{2} + \gamma\right)\right] = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\beta}{2} + \gamma\right)$ ……………………①

$\angle BPQ = \angle BCQ$（円Γの同一円周角）、$\angle BPQ = \varepsilon$ だから、$\angle QPE = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\beta}{2} + \gamma\right) + \varepsilon$

$\angle DEP = \angle PEI - \angle DEI$

$\angle PEI$ は$\angle PBI$の対角だから、$\angle PBI = \delta - \dfrac{\beta}{2}$ より、$\angle PEI = \pi - \left(\delta - \dfrac{\beta}{2}\right)$

⊿DEI は $DI = EI$ の二等辺三角形で、$\angle DIE = \pi - \alpha$ だから、$\angle DEI = \dfrac{\alpha}{2}$ である。

以上より、$\angle DEP = \angle PEI - \angle DEI = \pi - \left(\delta - \dfrac{\beta}{2}\right) - \dfrac{\alpha}{2} = \pi - \delta - \left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right)$ ……………②

次に、四角形ＣＩＤＱについて、

$\angle PQD = \angle CQD + \angle CQP$，$\angle CQD$ は$\angle CID$ の対角だから、$\angle CID$ を求めると、

$\angle CID = \angle CIE + \angle DIE$，$\angle CIE = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$，$\angle DIE = \pi - \alpha = \beta + \gamma$ だから、

$\angle CID = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right) + (\beta + \gamma) = \dfrac{\pi}{2} + \beta + \dfrac{\gamma}{2}$ よって、$\angle CQD = \pi - \left[\dfrac{\pi}{2} + \left(\beta + \dfrac{\gamma}{2}\right)\right] = \dfrac{\pi}{2} - \left(\beta + \dfrac{\gamma}{2}\right)$

$\angle CQP = \angle CBP$（円Γの同一円周角）、$\angle CBP = \delta$ だから、

$\angle PQD = \dfrac{\pi}{2} - \left(\beta + \dfrac{\gamma}{2}\right) + \delta$ ……………………③

$\angle EDQ = \angle QDI - \angle EDI$

$\angle QDI$ は$\angle QCI$の対角だから、$\angle QCI = \varepsilon - \dfrac{\gamma}{2}$ より、$\angle QDI = \pi - \left(\varepsilon - \dfrac{\gamma}{2}\right)$ ……………④

$\triangle DEI$ は二等辺三角形で、$\angle DIE = \pi - \alpha$ だから、$\angle EDI = \dfrac{\alpha}{2}$ である。

以上より、$\angle EDQ = \angle QDI - \angle EDI = \pi - \left(\varepsilon - \dfrac{\gamma}{2}\right) - \dfrac{\alpha}{2} = \pi - \varepsilon - \left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right)$

①②③④より、

$\angle QPE = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\beta}{2} + \gamma\right) + \varepsilon \qquad \angle DEP = \pi - \delta - \left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right)$

$\angle PQD = \dfrac{\pi}{2} - \left(\beta + \dfrac{\gamma}{2}\right) + \delta \qquad \angle EDQ = \pi - \varepsilon - \left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right)$

対角の和を計算すると、

$$\angle QPE + \angle EDQ = \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) + \varepsilon\right] + \left[\pi - \varepsilon - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\right] = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\angle PQD + \angle DEP = \left[\frac{\pi}{2} - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) + \delta\right] + \left[\pi - \delta - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right] = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

それぞれの対角の和がπ（１８０°）となり、点Ｄ，Ｅ，Ｐ，Ｑが同一円周上にあることが証明された。

この**「日本数学オリンピック問題を解いてみた」**も１０回を超えた。
国際数学オリンピックの国内予選ともいうべき、日本数学オリンピックが１９９１年に始まってから、既に３０年以上経過した。日本数学オリンピックには予選と本選があり、当初は予選・本選問題に拘らず解いていたが、しばらくすると予選問題に物足りなさを感じるようになり、本選問題に絞って解くようになった。中でも、私にとって「幾何学問題」と「代数問題」が面白く、適度な難しさで解けた時の満足感を味わうことができる。特に幾何学問題は、出題者の意図を汲み取れると嬉しい。

幾何学問題は、さまざまな図形の知識を動員して解くことが本筋と思うが、それができない場合、良くないと思いつつ、解析幾何学と三角関数の知識に頼ってしまう。

「２０１４年 第２４回 日本数学オリンピック本選（第４問)」は、幾何学の知識で解いたもので、こういう解き方ができれば満足である。（２０２３．０２．０６）