１４２「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１２）」

２０１５年 第２５回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. 三角形 ABC があり，その外接円を Γ とし，点 A における Γ の接線を l とする．D, E はそれぞれ辺 AB, AC 上の端点を除く点であって，$BD : DA = AE : EC$ をみたしている．直線 DE と円 Γ の２交点を F, G とし，点 D を通り AC に平行な直線と l の交点を H，点 E を通り AB に平行な直線と l の交点を I とする．このとき，4 点 F, G, H, I は同一円周上にあり，その円は直線 BC に接することを示せ．ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、三辺をａ，ｂ，ｃ、∠ＢＡＣ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＡＣＢ＝γ、とする。ＤＨの延長線と、ＥＩの延長線が交差する点をＡ’とすると、Ａ’は直線ＢＣ上にある。

点Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉが同一円周上にあることを示すには、四角形ＦＧＨＩが円に内接することを示せばよい。そのためには、四角形の対角の和が１８０°になることがいえればよい。

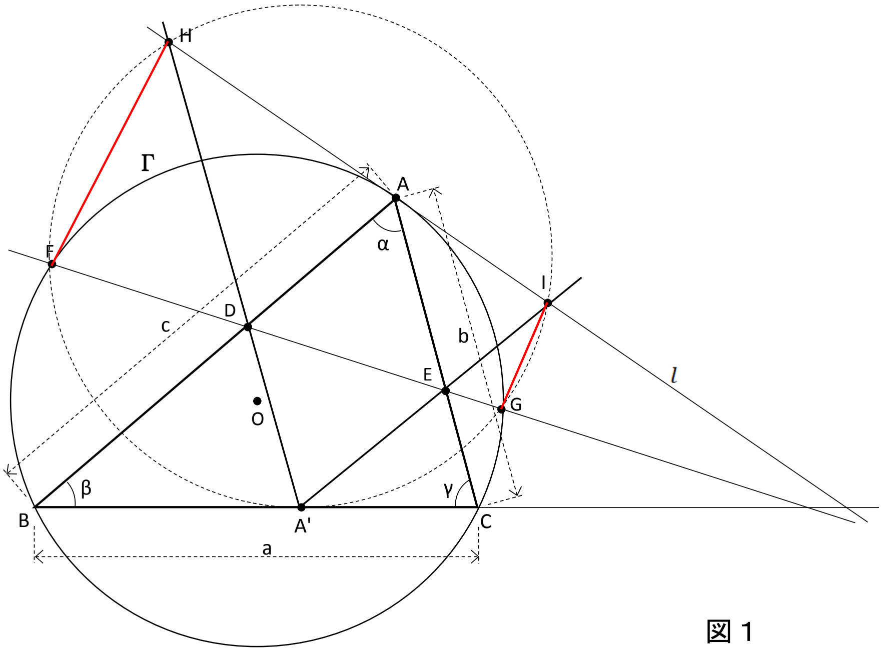

図１

次ページ図２に示すように、⊿Ａ’ＨＩにおいて、∠ＨＡ’Ｉ＝α，∠Ａ’ＨＩ＝β，∠Ａ’ＩＨ＝γから、⊿ＡＢＣと⊿Ａ’ＨＩ、は相似であり、同様に⊿ＡＤＨ，⊿ＡＥＩ，⊿ＤＢＡ’，⊿ＥＡ’Ｃは全て相似である。題意より、ＢＤ：ＤＡ＝ＡＥ：ＥＣ，この比をｍ：ｎとし、相似三角形の各辺の長さを求めると次のようになる。

$$BD=\frac{mc}{m+n},\ \ DA=\frac{nc}{m+n},\ \ AE=\frac{mb}{m+n},\ \ EC=\frac{nb}{m+n},\ \ HD=\frac{c^2}{b}\cdot\frac{n}{m+n},\ \ DA'=\frac{mb}{m+n},$$

$$A'E=\frac{nc}{m+n},\ \ EI=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{m}{m+n},\ \ BA'=\frac{am}{m+n},\ \ A'C=\frac{an}{m+n}\ ,\ \ HA=\frac{ac}{b}\cdot\frac{n}{m+n},\ \ AI=\frac{ab}{c}\cdot\frac{m}{m+n}$$

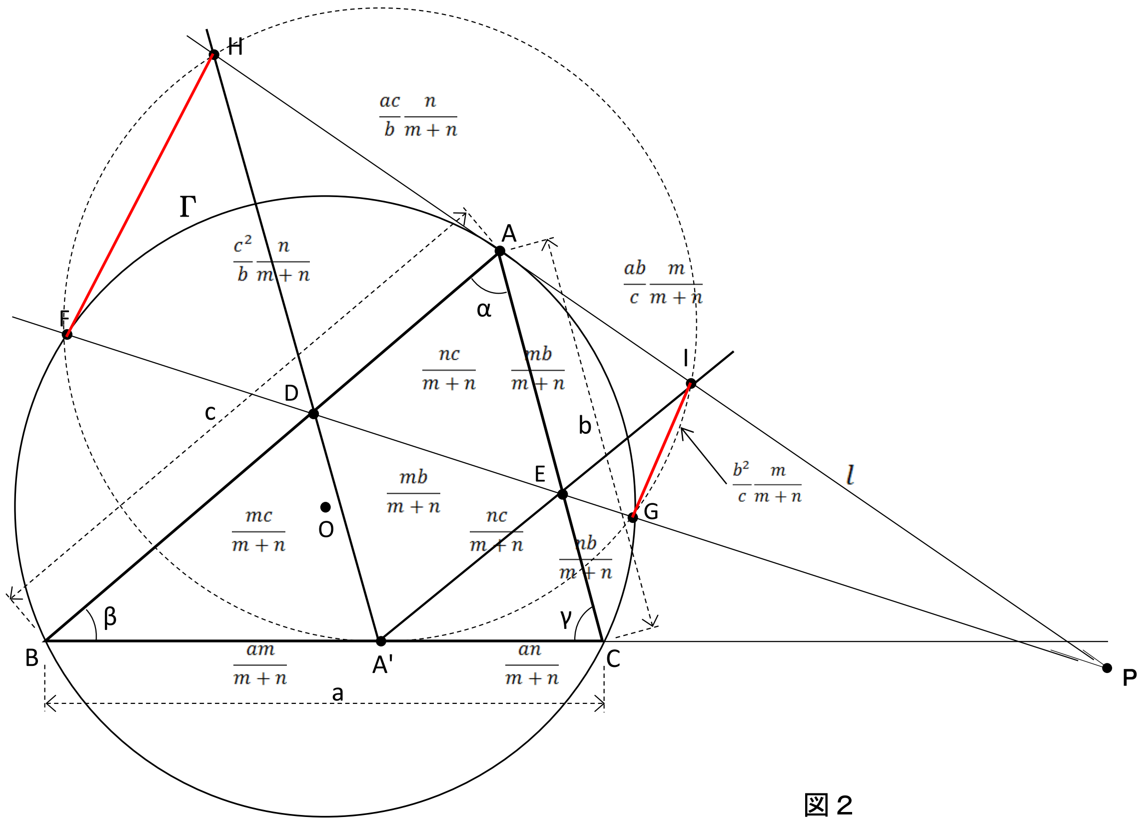

図２

前述のとおり、⊿ＡＢＣと⊿Ａ’ＨＩは相似であり、⊿Ａ’ＨＩの各辺を計算すると、

$$HI=\frac{ac}{b}\cdot\frac{n}{m+n}+\frac{ab}{c}\cdot\frac{m}{m+n}=\frac{a}{bc}\cdot\frac{b^2m+c^2n}{m+n},\quad IA'=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{nc}{m+n}=\frac{1}{c}\cdot\frac{b^2m+c^2n}{m+n}$$

$$=\frac{b}{bc}\cdot\frac{b^2m+c^2n}{m+n},\quad A'H=\frac{mb}{m+n}+\frac{c^2}{b}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{1}{b}\cdot\frac{b^2m+c^2n}{m+n}=\frac{c}{bc}\cdot\frac{b^2m+c^2n}{m+n}$$ となるので、

⊿ＡＢＣと⊿Ａ’ＨＩの相似比は $\dfrac{b^2m+c^2n}{bc(m+n)}$ である。

よって、⊿Ａ’ＨＩは、⊿ＡＢＣの外接円の $\dfrac{b^2m+c^2n}{bc(m+n)}$ 倍の円に内接する。従って、Ａ’ＨＩは同一円周上にあり、点Ａ’は、辺ＢＣ上にあるので、⊿Ａ’ＨＩの外接円は辺ＢＣに接する。

次に図２において、四角形ＦＧＨＩが円に内接することを示す。
ＨＩとＦＧの延長線の交点をＰとする。四角形ＦＧＨＩが円に内接円に内接するとすれば、対向する角の和は１８０°であり、∠ＩＨＦ＝∠ＩＧＰ，∠ＧＦＨ＝∠ＧＩＰである。従って、⊿ＰＧＩと⊿ＰＨＦが相似であることを言えばよい。
図３のように、線分の長さを「ＰＩ」＝ｐ，「ＩＥ」＝ｑ，「ＩＡ」＝ｒ，「ＡＤ」＝ｓとすると、⊿ＰＩＥと⊿ＰＡＤは相似だから、

$\dfrac{p+r}{p}=\dfrac{s}{q}$ より $p=\dfrac{qr}{s-q}$、ここで $q=\dfrac{b^2}{c}\cdot\dfrac{m}{m+n}$， $r=\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{m}{m+n}$， $s=\dfrac{nc}{m+n}$ であるから、

$$p=\frac{qr}{s-q}=\frac{\left(\frac{b^2}{c}\cdot\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{m}{m+n}\right)}{\frac{nc}{m+n}-\frac{b^2}{c}\cdot\frac{m}{m+n}}=\frac{ab^3m^2}{c(m+n)(c^2n-b^2m)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

次に図２の円「Γ」に対して、接弦定理を適用すると ＰＧ（ＰＧ＋ＧＦ）＝ＰＡ^2 が成り立つ。図４に置きかえると ⊿ＰＧＩと⊿ＰＨＦについて、

$u(u+v)=(p+r)^2$ ……………………② が成り立つ。

⊿ＰＧＩと⊿ＰＨＦが相似と仮定すると、

$\frac{PG}{PI}=\frac{PH}{PF}$ より、$\frac{u}{p}=\frac{p+r+t}{u+v}$ ……….③

が成り立たなければならない。

③より $u(u+v)=p(p+r+t)$,

これを②に代入しu，v を消去すると

$(p+r)^2=p(p+r+t)$ を得る。

これから p を求めると、$p=\frac{r^2}{t-r}$

ここで $r=\frac{ab}{c}\cdot\frac{m}{m+n}$，$t=\frac{ac}{b}\cdot\frac{n}{m+n}$

であるから、

$$p=\frac{r^2}{t-r}=\frac{\left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{m}{m+n}\right)^2}{\frac{ac}{b}\cdot\frac{n}{m+n}-\frac{ab}{c}\cdot\frac{m}{m+n}}$$

$$=\frac{ab^3m^2}{c(m+n)(c^2n-b^2m)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

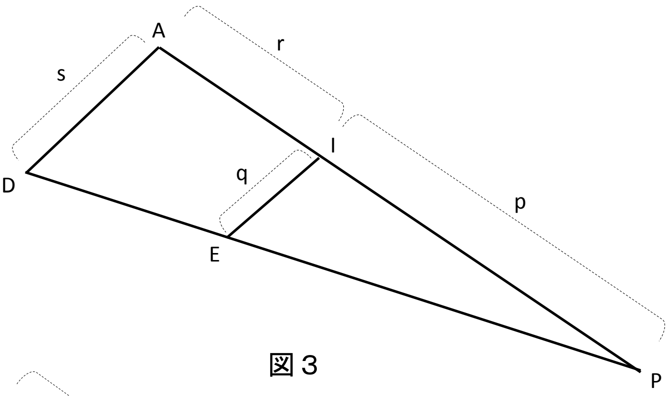

図３

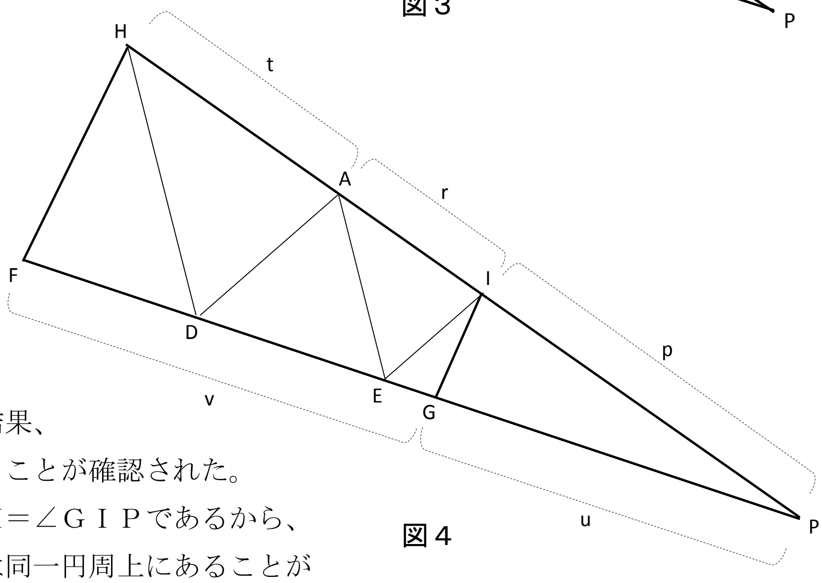

図４

⊿ＰＧＩと⊿ＰＨＦが相似と仮定した結果、①，④が一致し２つの三角形は相似であることが確認された。

以上より、∠ＩＨＦ＝∠ＩＧＰ，∠ＧＦＨ＝∠ＧＩＰであるから、対向する角の和１８０°から、ＦＧＨＩは同一円周上にあることが証明された。

ＦＧＨＩが同一円周上にあることの証明については、より明快な方法があるはずだが、それを見つけることができなかった。

２０１６年 第２６回 日本数学オリンピック本選（第２問）

2. 円に内接する四角形 $ABCD$ があり，$AB:AD=CD:CB$ をみたしている．直線 AD と直線 BC は点 X で，直線 AB と直線 CD は点 Y で交わっている．辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とし，$\angle AXB$ の二等分線と線分 EG の交点を S，$\angle AYD$ の二等分線と線分 FH の交点を T とする．このとき，直線 ST と直線 BD が平行であることを示せ．
ただし，UV で線分 UV の長さを表すものとする．

図１において、∠ＡＸＢ，∠ＡＹＤの二等分線の交点をＯ，∠ＢＣＤ＝δ，∠ＡＤＣ＝ωとすると、∠ＸＡＢ＝δ，∠ＸＢＡ＝ω から、∠ＡＸＢ $=\pi-(\delta+\omega)$ なので、

∠ＡＸＯ＝∠ＢＸＯ $=\dfrac{\pi-(\delta+\omega)}{2}$、∠ＹＡＤ＝δ，∠ＹＤＡ $=\pi-\omega$ から、

∠ＡＹＤ $=\omega-\delta$ なので、∠ＡＹＯ＝∠ＤＹＯ $=\dfrac{\omega-\delta}{2}$ である。

∠ＡＸＢの二等分線と辺ＣＤの交点をＧ’とすると、

∠ＸＧ’Ｄ $=\pi-\omega-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega+\delta}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega-\delta}{2}$ なので、⊿ＹＯＧ’において、

∠ＹＯＧ’ $=\pi-\left(\dfrac{\omega-\delta}{2}\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega-\delta}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ となり、∠ＡＸＢ，∠ＡＹＤの二等分線は、点Ｏにおいて直角に交わる。さらに図２に示すように、

∠ＡＣＢ $=\delta_1$，∠ＡＣＤ $=\delta_2$（$\delta_1+\delta_2=\delta$） とすると、

⊿ＡＸＹにおいて∠ＸＡＹ＝ $\pi-\delta$ から、

∠ＡＸＹ＋∠ＡＹＸ $=\delta$、∠ＡＤＢ $=\delta_1$，∠ＡＢＤ $=\delta_2$ より、

∠ＡＸＹ $=\delta_1$，∠ＡＹＸ $=\delta_2$ なので、ＸＹ ∥ ＢＤ、

かつ点Ｏは直線ＡＣ上にある。

次にＡＢ：ＡＤ＝ＣＤ：ＣＢより、ＡＢ・ＣＢ＝ＡＤ・ＣＤ、なので、点Ｂ，ＤからＡＣに下ろした垂線の長さは等しい。円内接四角形ＡＢＣＤの中点Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈを結ぶ線ＥＧ，ＦＨの交点をＯ’とすると、点Ｏ’はＯと同様ＡＣ上にあり、ＡＯＯ’の順にＡＣ上に並ぶ。

さらに、ＧＥとＣＢの延長線とＦＨとＣＤの延長線の交点をＰ，Ｑとすると、⊿ＰＣＧの点Ｐにおける外角は、

δ＋∠ＰＧＣ＝δ＋∠ＰＧＦ＋∠ＦＧＣ、

点Ｐを通り辺ＣＤに平行な線を引いたとき。

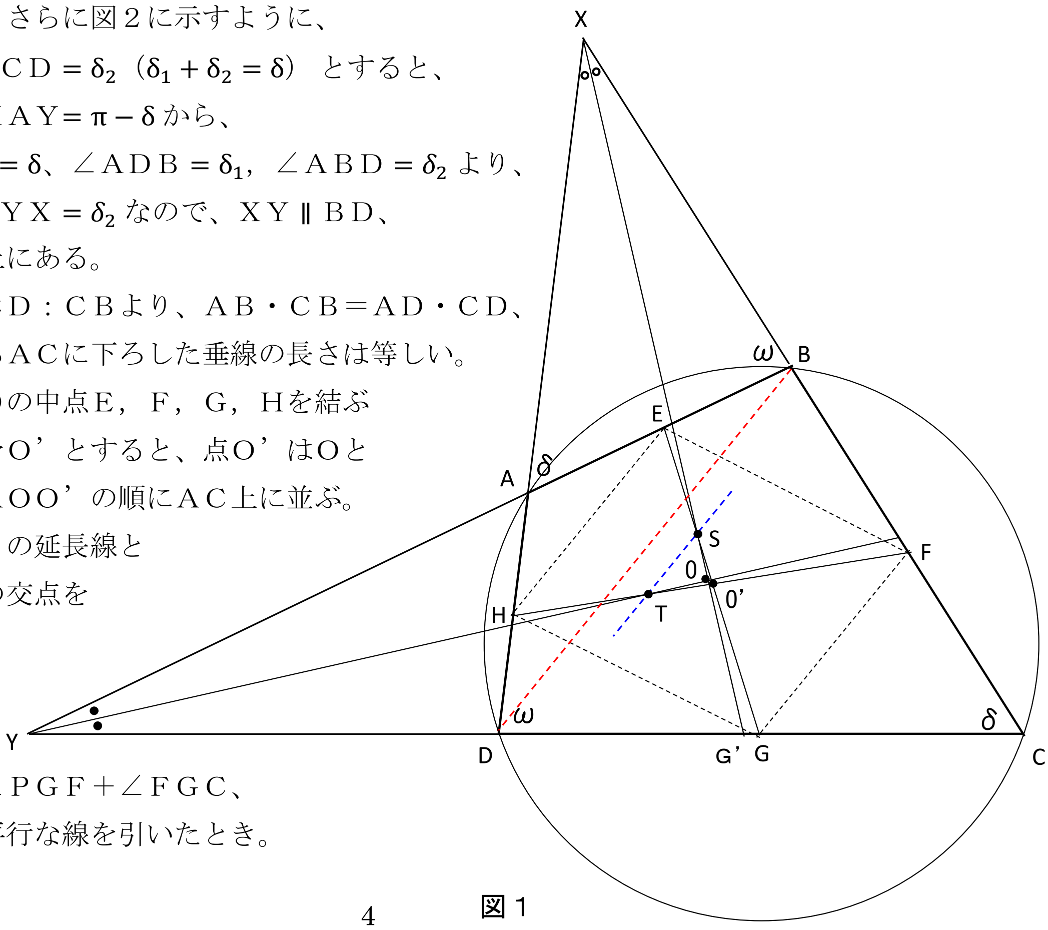

図１

その下側の角度は∠ＦＧＣ＋∠ＰＧＦ
となり、∠ＱＰＧ＝∠ＰＧＦである。
従ってＰＱ∥ＦＧからＰＱ∥ＸＹ∥ＢＤである。
　∠ＡＸＢの二等分線と線分ＥＧの交点Ｓ,
∠ＡＹＤの二等分線と線分ＦＨの交点Ｔ
を結ぶ直線ＳＴがＢＤと平行である
ことを証明するために、
◿ＸＹＯと◿ＰＱＯ’の点Ｏ
とＯ’が直線ＡＣ上にあり、
辺ＸＹ，ＰＱが平行のとき、
２つの三角形の２辺が
交わる点の交点を
結ぶ線がＸＹ及び
ＰＱと平行となることを証明する。

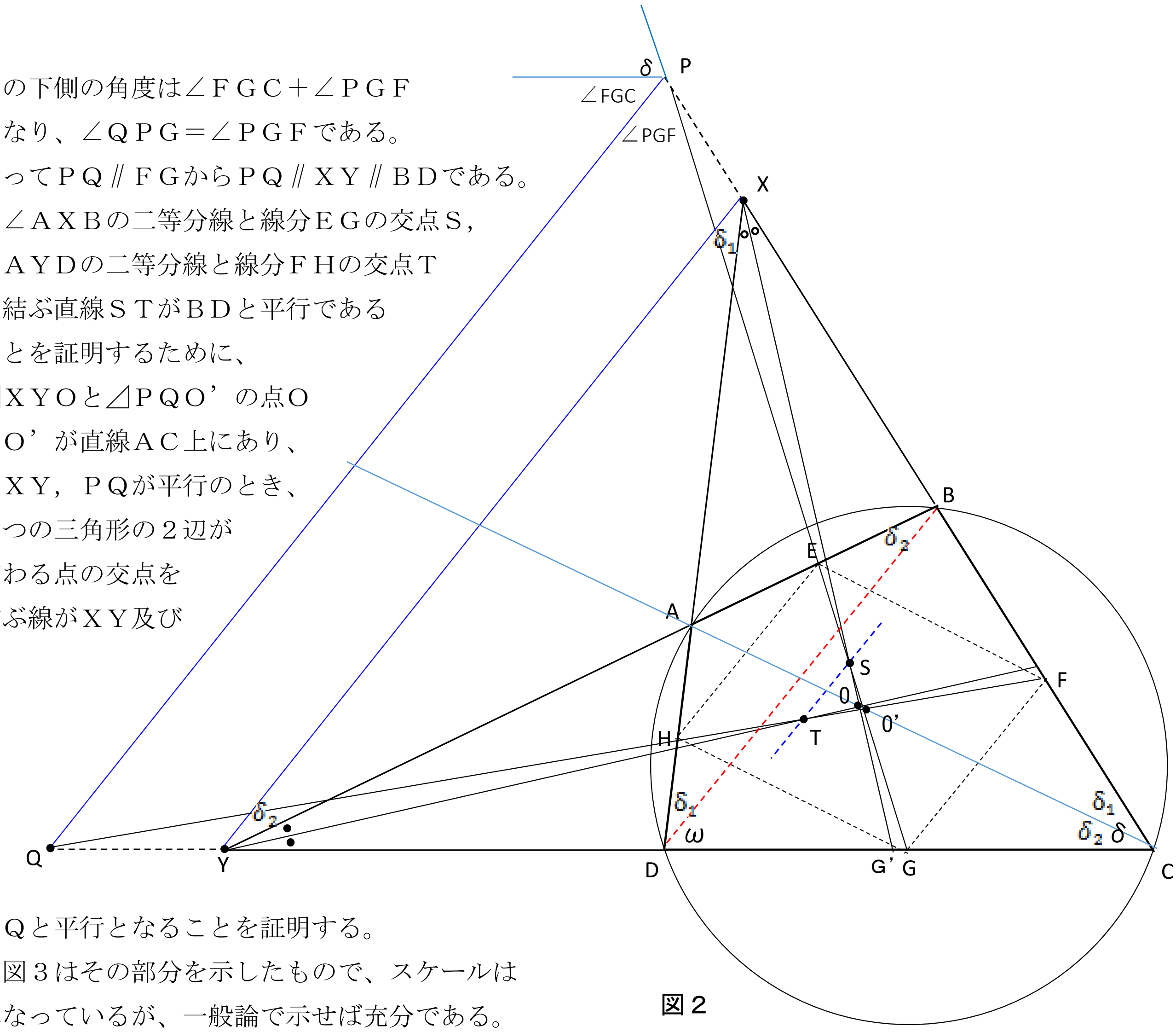

図２

　図３はその部分を示したもので、スケールは
異なっているが、一般論で示せば充分である。
　∠ＸＯＲ＝α，∠ＰＯ’Ｒ＝β，∠ＯＸＹ＝γ，
∠Ｏ’ＰＱ＝δ，∠ＯＳＴ＝θ_1，∠Ｏ’ＳＴ＝θ_2とすると、
∠Ｏ'ＳＯ＝$\alpha-\beta$，∠ＸＳＰ＝$\delta-\gamma=\alpha-\beta$だから、
$\alpha+\gamma=\beta+\delta$、この関係は点Ｓにおいて成り立ち
ＸＹ∥ＰＱから、∠ＸＺＯ＝∠ＰＲＯである。
従って、$\theta_1=\gamma$，$\theta_2=\delta$となり、直線ＳＴは
ＸＹ，ＰＱに平行である。
　この関係は、Ｏ，Ｏ’の位置に関係なく成り立つ。
よって、問題は証明された。

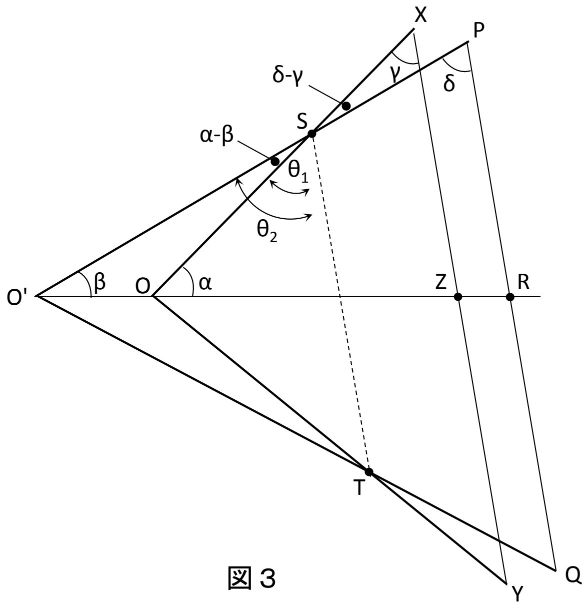

図３

２０１７年 第２７回 日本数学オリンピック本選（第３問）

3. 鋭角三角形 ABC があり，その外心を O とする．3 点 A, B, C から対辺におろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とし，さらに辺 BC の中点を M とする．直線 AD と直線 EF の交点を X，直線 AO と直線 BC の交点を Y とし，線分 XY の中点を Z とする．このとき 3 点 A, Z, M が同一直線上にあることを示せ．

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、三辺をａ，ｂ，ｃ、∠ＢＡＣ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＡＣＢ＝γ、とする。３点Ａ，Ｚ，Ｍが同一直線上にあることを示すには、ＸＹの中点がＺであることから、⊿ＡＸＹにおいて、次の中線定理

$AX^2+AY^2=2(AZ^2+XZ^2)$ が成り立つことをいえばよい。

AX，AY，AZ，XZ を、ａ，ｂ，ｃ、α，β，γを用いて表す。

$$\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\gamma,\ \angle BAY=\frac{\pi}{2}-\gamma$$

より、$\angle YAD=\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$

$=\gamma-\beta$ である。

$AY\cos(\gamma-\beta)=c\sin\beta$ から、

$$AY=\frac{c\sin\beta}{\cos(\gamma-\beta)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$\angle AEF=\beta$，$\angle AFE=\gamma$ より、⊿ＡＥＦと⊿ＡＢＣは相似であり、辺ＡＢに対する⊿ＡＥＦの辺ＡＥの長さは、

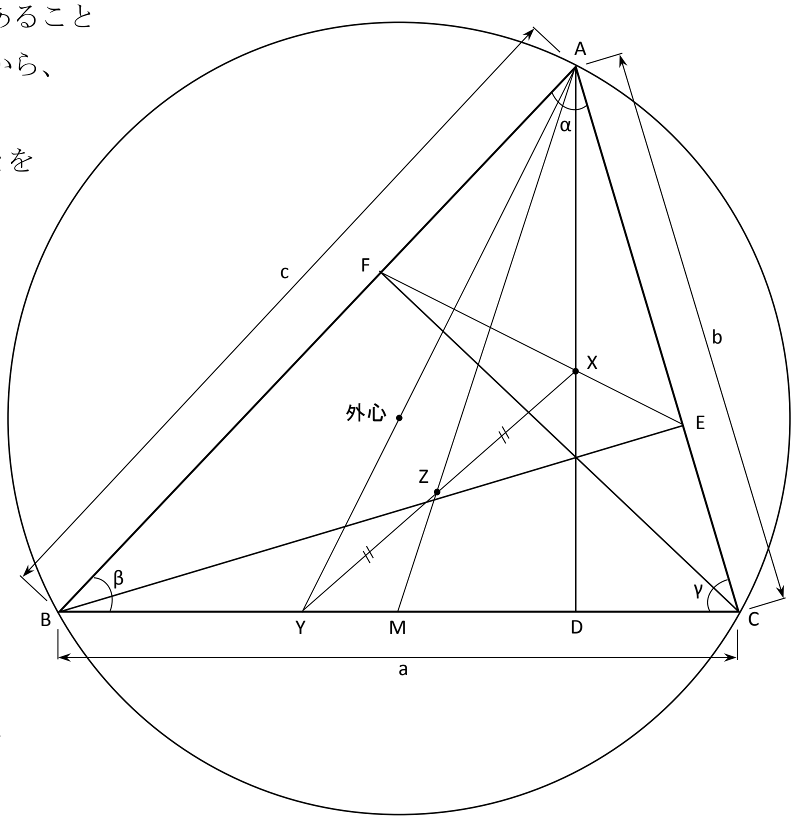

図１

$AE=AB\cos\alpha$ から、相似比は１： $\cos\alpha$ である。従って、

$$AX=AY\cos\alpha=\frac{c\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\gamma-\beta)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$$AZ=\sqrt{\left(AX+\frac{XD}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(AX+\frac{AD-AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{AD+AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c\sin\beta+\dfrac{c\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\gamma-\beta)}}{2}\right)^2+\left(\frac{c\sin\beta\tan(\gamma-\beta)}{2}\right)^2}=\frac{c\sin\beta}{2}\sqrt{\left(\frac{\cos(\gamma-\beta)+\cos\alpha}{\cos(\gamma-\beta)}\right)^2+\left(\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos(\gamma-\beta)}\right)^2}$$

$$=\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\sqrt{(\cos(\gamma-\beta)+\cos\alpha)^2+\sin^2(\gamma-\beta)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$XZ=\sqrt{\left(\frac{XD}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{AD-AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2}=\frac{c\sin\beta}{2}\sqrt{\left(\frac{\cos(\gamma-\beta)-\cos\alpha}{\cos(\gamma-\beta)}\right)^2+\left(\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos(\gamma-\beta)}\right)^2}$$

$$=\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\sqrt{(\cos(\gamma-\beta)-\cos\alpha)^2+\sin^2(\gamma-\beta)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$AX^2+AY^2=2(AZ^2+XZ^2)$ に①，②，③，④を入れて確認すると、

$$佐辺=AX^2+AY^2=\left[\frac{c\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\gamma-\beta)}\right]^2+\left[\frac{c\sin\beta}{\cos(\gamma-\beta)}\right]^2=\left[\frac{c\sin\beta}{\cos(\gamma-\beta)}\right]^2(1+\cos^2\alpha)$$

一方、右辺については、

$$2(AZ^2+XZ^2)=2\left[\left(\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\sqrt{(\cos(\gamma-\beta)+\cos\alpha)^2+\sin^2(\gamma-\beta)}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\sqrt{(\cos(\gamma-\beta)-\cos\alpha)^2+\sin^2(\gamma-\beta)}\right)^2\right]$$

$$=2\left[\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\right]^2[\{\cos(\gamma-\beta)+\cos\alpha\}^2+\sin^2(\gamma-\beta)+\{\cos(\gamma-\beta)-\cos\alpha\}^2+\sin^2(\gamma-\beta)]$$

$$=2\left[\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\right]^2[2\cos^2(\gamma-\beta)+2\sin^2(\gamma-\beta)+2\cos^2\alpha]=2\left[\frac{c\sin\beta}{2\cos(\gamma-\beta)}\right]^2(2+2\cos^2\alpha)$$

$$=\left[\frac{c\sin\beta}{\cos(\gamma-\beta)}\right]^2(1+\cos^2\alpha)$$

左辺＝右辺となり、中線定理がなりたつことが確認され、A，Z，Mが同一直線上にあることが証明された。

この問題は、数式を使わなくても証明できることがわかった。試験でこの問題を解くには、上に示したような計算をしている時間はない。以下計算式を伴わない証明を記す。

３点A，Z，Mが同一直線上にあることを示すには、ＸＹの中点がＺである条件を用いて、⊿ＡＸＹにおいて、中線定理 $AX^2+AY^2=2(AZ^2+XZ^2)$ が成り立つことを言うのは変わらない。

右辺 $2(AZ^2+XZ^2)$ を変形して左辺と同じになることを示す。

$$AZ^2=\left(AX+\frac{XD}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2=\left(AX+\frac{AD-AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2=\left(\frac{AD+AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2$$

$$XZ^2=\left(\frac{XD}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2=\left(\frac{AD-AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2$$

$$2(AZ^2+XZ^2)=2\left[\left(\frac{AD+AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2+\left(\frac{AD-AX}{2}\right)^2+\left(\frac{YD}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(AD^2+AX^2+2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AX}+YD^2+AD^2+AX^2-2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AX}+YD^2\right)=\frac{1}{2}(2AD^2+2AX^2+2YD^2)$$

$$=AD^2+AX^2+YD^2$$

一方左辺はAX^2+AY^2において、$AY^2=AD^2+YD^2$であるから、左辺と右辺は一致し中線定理が成り立つことが示された。
AX，AY，AZ，XZを数式で表さなくとも図形上の計算だけで証明できる。

最後に、座標を使った機械的な計算による証明を示す。
図１において、Ｂを原点とするＸ－Ｙ座標を考えると、Ａ，Ｂ，Ｃの座標は、
Ａ$(c\cos\beta,\ c\sin\beta)$，Ｂ$(0,\ 0)$，Ｃ$(a,\ 0)$
点Ｘの座標は、直線ＡＤ，ＥＦの交点を求める。
直線ＡＤ：$x=c\cos\beta$
直線ＥＦ：それぞれの座標、Ｅ$\left(a\sin^2\gamma,\ a\sin\gamma\cos\gamma\right)$，Ｆ$\left(a\cos^2\beta,\ a\sin\beta\cos\beta\right)$を通る直線は、

$y-a\sin\beta\cos\beta=\dfrac{a\sin\beta\cos\beta-a\sin\gamma\cos\gamma}{a\cos^2\beta-a\sin^2\gamma}(x-a\cos^2\beta)$ から、

$y=-\tan(\gamma-\beta)(x-a\cos^2\beta)+a\sin\beta\cos\beta$，これに$x=c\cos\beta$ を入れて、$y=\dfrac{2b\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}$

Ｘ座標 $\left(c\cos\beta,\ \dfrac{2b\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right)$
点Ｙの座標は、直線ＡＯ，ＢＣの交点を求める。

直線ＡＯ：点Ａの座標$\left(c\cos\beta,\ c\sin\beta\right)$，点Ｏの座標$\left(\dfrac{a}{2},\ R\cos\alpha\right)$より、

$y-c\sin\beta=\dfrac{c\sin\beta-R\cos\alpha}{c\cos\beta-\frac{a}{2}}(x-c\cos\beta)$，これに$y=0$を入れて計算すると、$x=\dfrac{c\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)}$

Ｙ座標 $\left(\dfrac{c\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)},\ 0\right)$
点Ｚの座標は、点Ｘ，Ｙの中点だから、

Ｚ座標 $\left[\dfrac{c}{2}\left(\cos\beta+\dfrac{\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right),\ \dfrac{b\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right]$ この点が直線ＡＭ上にあることを言えばよい。

Ｍの座標は$\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$だから、直線ＡＭは $y=\dfrac{c\sin\beta}{c\cos\beta-\frac{a}{2}}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$ である。これにＺ座標を入れて、

$\dfrac{b\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}=\dfrac{c\sin\beta}{c\cos\beta-\frac{a}{2}}\left[\dfrac{c}{2}\left(\cos\beta+\dfrac{\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right)-\dfrac{a}{2}\right]$ が成り立つことを確認する。

右辺を変形すると、$\dfrac{c\sin\beta}{c\cos\beta-\frac{a}{2}}\left[\dfrac{c}{2}\left(\cos\beta+\dfrac{\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right)-\dfrac{a}{2}\right]=\dfrac{c\sin\beta\cos\gamma}{2c\cos\beta-a}\left[\dfrac{c}{\cos(\gamma-\beta)}-b\right]$

$=\dfrac{c\sin\beta\cos\gamma}{c\cos\beta-b\cos\gamma}\left[\dfrac{c-b\cos(\gamma-\beta)}{\cos(\gamma-\beta)}\right]=\dfrac{c\sin\beta\cos\gamma}{c\cos\beta-b\cos\gamma}\left[\dfrac{c-b\cos\beta\cos\gamma-b\sin\beta\sin\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right]$

$=\dfrac{c\sin\beta\cos\beta\cos\gamma}{c\cos\beta-b\cos\gamma}\left[\dfrac{c\cos\beta-b\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}\right]=\dfrac{c\sin\beta\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}=\dfrac{b\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}=$ 左辺

よって、点Ｚが直線ＡＭ上にあることが証明された。　（２０２３．０４．１５）