１４３「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１３）」

２０１８年 第２８回 日本数学オリンピック本選（第２問）

2. $AB < AC$ なる三角形 ABC の辺 AB, AC 上 (端点を含まない) に点 D, E があり, $CA = CD$, $BA = BE$ をみたしている. 三角形 ADE の外接円を ω とし, さらに直線 BC に関して A と対称な点を P とおく. 直線 PD と ω の交点のうち D でない方を X, 直線 PE と ω の交点のうち E でない方を Y とするとき, 直線 BX と直線 CY が ω 上で交わることを示せ.
ただし, ST で線分 ST の長さを表すものとする.

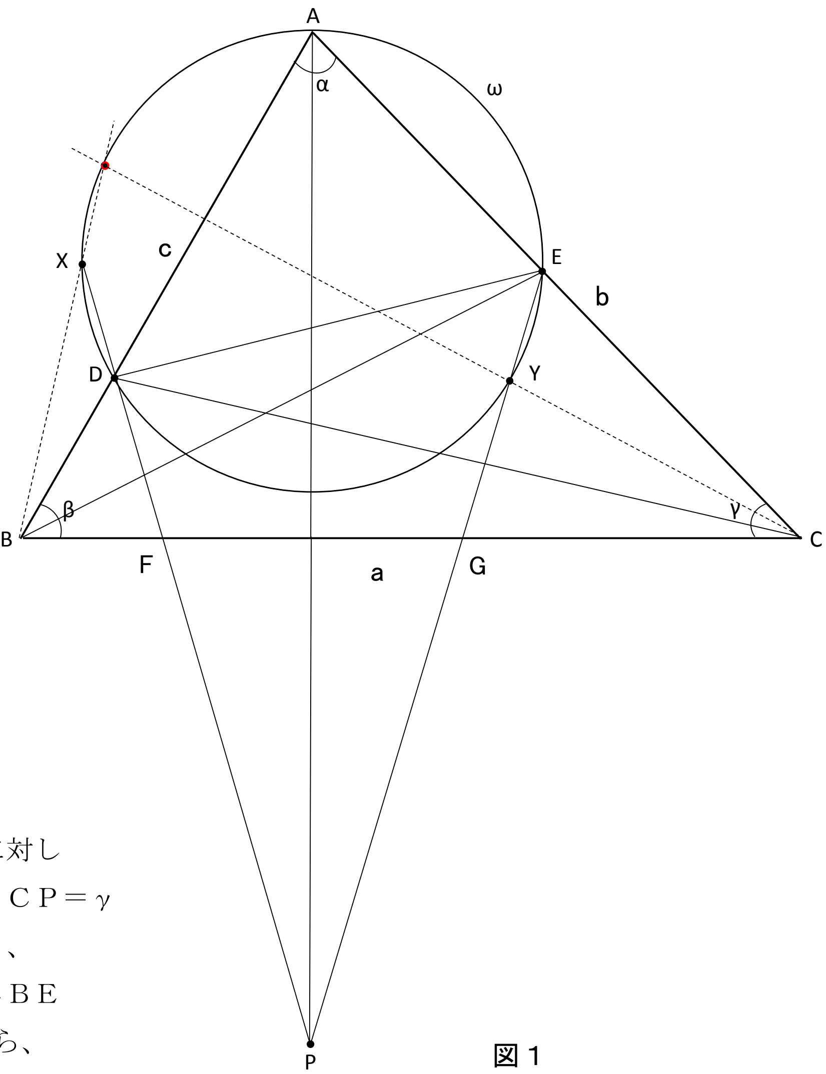

図１

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、
三辺をａ，ｂ，ｃ、３つの角をα, β, γ
とし、直線ＰＤとＢＣの交点をＦ，
直線ＰＥとＢＣの交点をＧとする。
⊿ＣＡＤはＣＡ＝ＣＤの二等辺三角形
だから、∠ＣＡＤ＝∠ＣＤＡ＝α、
∠ＡＣＤ＝$\pi-2\alpha$、⊿ＢＡＥは
ＢＡ＝ＢＥの二等辺三角形だから、
同様に∠ＡＢＥ＝$\pi-2\alpha$である。
よって、∠ＤＢＥ＝∠ＤＣＥから、
４点ＢＣＤＥは同一円周上にある。
図２において、四角形ＢＣＤＥの
外接円をΓとすると、∠ＢＣＥ（＝γ）
の対角である∠ＢＤＥ＝$\pi-\gamma$である。
　これから∠ＡＤＥ＝γ、同様に
∠ＣＢＤ（＝β）の対角∠ＣＥＤ＝$\pi-\beta$
から、∠ＡＥＤ＝β、よって⊿ＡＤＥは
⊿ＡＢＣと相似である。
さらに⊿ＰＢＣにおいて、点Ｐは辺ＢＣに対し
Ａの対称な点だから、∠ＣＢＰ＝β，∠ＢＣＰ＝γ
四角形ＰＢＥＣにおいて、∠ＰＣＥ＝２γ、
∠ＰＢＥ＝∠ＰＢＣ＋∠ＣＢＥ＝β＋∠ＣＢＥ
∠ＣＢＥ＝∠ＣＤＥ，∠ＣＤＥ＝$\alpha-\gamma$から、
∠ＰＢＥ＝β＋（$\alpha-\gamma$）である。
　辺ＰＥに対向する２つの円周角の和を計算すると、
∠ＰＣＥ＋∠ＰＢＥ＝２γ＋〔β＋（$\alpha-\gamma$）〕
＝$\alpha+\beta+\gamma=\pi$となり、点Ｐは四角形の外接円Γ上にある。
よって、∠ＢＥＰ＝∠ＢＣＰ＝γ、∠ＣＤＰ＝∠ＣＢＰ＝βから、∠ＢＤＦ＝γ，∠ＣＥＧ＝βとな

るので、⊿ＢＤＦ，⊿ＣＥＧは⊿ＡＢＣに相似である。従って、∠ＤＦＢ＝∠ＥＧＣ＝αであり、⊿ＰＦＧは二等辺三角形となり、

∠ＸＰＡ＝∠ＥＰＡ＝$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ である。

従って、ＸＥ，ＤＹとＢＣは平行である。

直線ＢＸと直線ＣＹの交わる点をＺとすると、Ｚがω上にあることを示すには、ＸＥとＤＹが平行かつＤＥ＝ＸＹから、∠ＸＺＹが円周角∠ＤＡＥ＝αに等しいことを言えばよい。

前に示したように、⊿ＢＤＦ，⊿ＣＥＧは⊿ＡＢＣに相似なので、その相似比を求めると、

⊿ＡＢＣに対し、⊿ＢＤＦは

$1:\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$ （計算省略）

⊿ＡＢＣに対し、⊿ＣＥＧは

$1:\dfrac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}$ （計算省略）である。

ここで⊿ＸＢＦと⊿ＣＹＧに着目して、

∠ＸＦＢ＝α，∠ＣＧＹ＝α，

辺 $BF:YG=\dfrac{c\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}:\dfrac{b\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$

$=c:b$

辺 $XF:CG=\dfrac{c\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}:\dfrac{b\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}$

$=c:b$ なので、⊿ＸＢＦと⊿ＣＹＧは相似である。

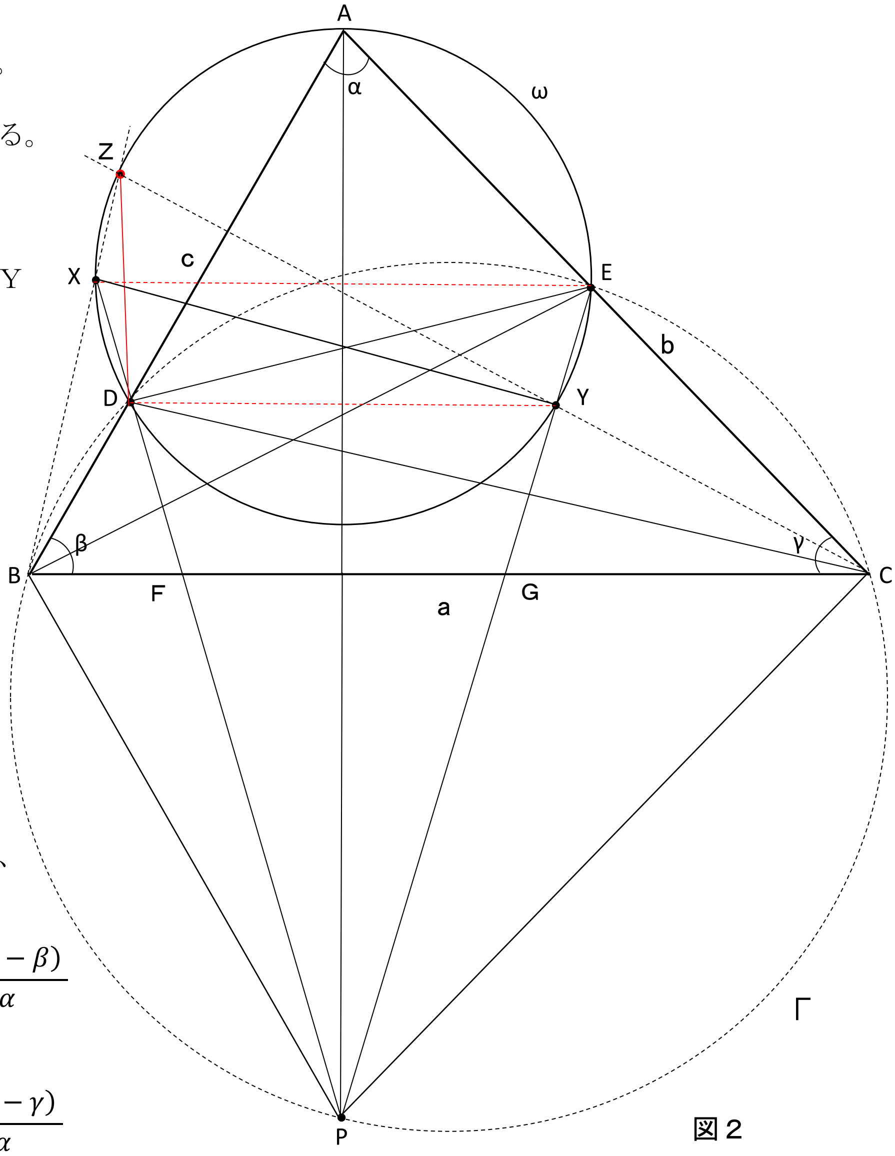

図２

よって、∠ＸＢＦ＝∠ＣＹＧである。

∠ＹＣＧ＝$\dfrac{\pi}{2}-\beta$，∠ＣＧＹ＝α から、∠ＣＹＧ＝$\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)-\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta$ なので、

∠ＸＢＦ $=\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta$ が導かれる。

⊿ＺＢＣにおいて、∠ＺＣＢ＝$\dfrac{\pi}{2}-\beta$，∠ＺＢＦ $=\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta$ から、

∠ＢＺＣ $=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\alpha$、∠ＢＺＣ＝∠ＸＺＹであるから、

Ｚは⊿ＡＤＥの外接円ωの円周上にあることが証明された。

２０１９年 第２９回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. 三角形 ABC の内心を I, 内接円を ω とする. また, 辺 BC の中点を M とする. 点 A を通り直線 BC に垂直な直線と, 点 M を通り直線 AI に垂直な直線の交点を K とするとき, 線分 AK を直径とする円は ω に接することを示せ.

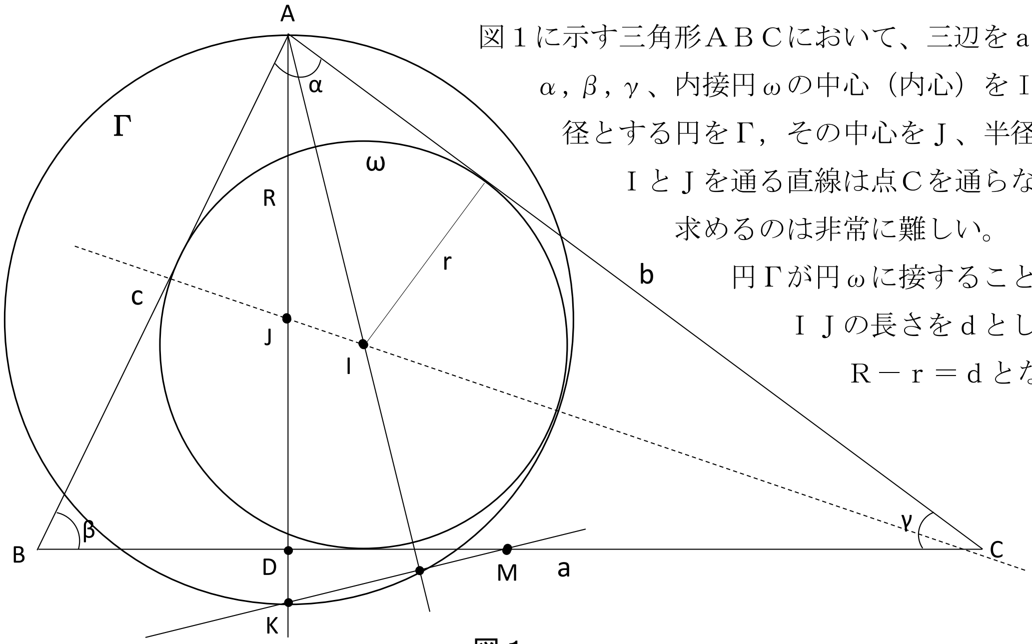

図１

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、三辺をａ，ｂ，ｃ、３つの角を α, β, γ、内接円 ω の中心（内心）をＩ，半径をｒ、ＡＫを直径とする円を Γ，その中心をＪ、半径をＲとする。

ＩとＪを通る直線は点Ｃを通らないので、その勾配を求めるのは非常に難しい。

円 Γ が円 ω に接することを証明するには、ＩＪの長さをｄとしたとき、Ｒ－ｒ＝ｄとなることを言えばよい。

⊿ＡＩＪにおいて、∠ＩＡＪ＝$\frac{\alpha}{2}+\beta-\frac{\pi}{2}=\frac{\beta-\gamma}{2}$ だから、⊿ＡＩＪに余弦定理を適用すると、

$$IJ^2=d^2=R^2+\left(\frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2-2\cdot R\cdot\frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}\cdot cos\frac{\beta-\gamma}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

Γ が ω に接するには Ｒ－ｒ＝ｄとなることが条件なので、両辺を二乗して①に入れｄを消去し、Ｒとｒの関係を導くと、

$$R^2+r^2-2Rr=R^2+\left(\frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2-2\cdot R\cdot\frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}\cdot cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$ これを整理して、$R=r\dfrac{1-\dfrac{1}{sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\left(1-\dfrac{cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}\right)}$

ここでｒを求めると、$c=\dfrac{r}{tan\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{r}{tan\frac{\beta}{2}}=r\left(\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)$ より、$r=c\dfrac{sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}$

以上より、$R=r\dfrac{1-\dfrac{1}{sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}{2\left(1-\dfrac{cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)}=c\dfrac{sin\dfrac{\alpha}{2}sin\dfrac{\beta}{2}}{cos\dfrac{\gamma}{2}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}{2\left(1-\dfrac{cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)}$

分母分子に$sin^2\dfrac{\alpha}{2}$を掛けて、

$$R=c\frac{sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\ sin\frac{\alpha}{2}\left(sin\frac{\alpha}{2}-cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}=c\frac{sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{-cos^2\frac{\alpha}{2}}{-4\,sin\frac{\beta}{2}\ sin\frac{\gamma}{2}}=c\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\,sin\gamma}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

一方、円Γの直径はＡＤ＋ＤＫなので、２Ｒ＝ＡＤ＋ＤＫである。

$AD=\ c\,sin\beta$，$DK=DM\,tan(\angle DMK)$，$DM=\dfrac{a}{2}-c\,cos\beta$，$\angle DMK=\angle$IAJ$=\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ だから

$$DK=\left(\frac{a}{2}-c\,cos\beta\right)tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\left(\frac{a}{2}-c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b^2-c^2}{2a}tan\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{sin^2\beta-sin^2\gamma}{sin^2\alpha}tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{(sin\beta+sin\gamma)(sin\beta-sin\gamma)}{sin^2\alpha}tan\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{2\,sin\frac{\beta+\gamma}{2}cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot2\,sin\frac{\beta-\gamma}{2}cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{sin^2\alpha}tan\frac{\beta-\gamma}{2}=a\frac{sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\alpha}=c\frac{sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}$$

以上から、

$$AD+DK=\ c\,sin\beta+c\frac{sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}=c\left[sin\beta+\frac{sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}\right]=c\frac{sin\beta\ sin\gamma+sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}$$

$$=c\frac{\frac{1}{2}[cos(\beta-\gamma)+cos\alpha]+sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}=c\frac{\frac{1}{2}\left[1-2\,sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}+2\,cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right]+sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}$$

$c\dfrac{cos^2\dfrac{\alpha}{2}-sin^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}+sin^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{sin\gamma}=c\dfrac{cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{sin\gamma}$ よって、$R=c\dfrac{cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2sin\gamma}$ が導かれ②と一致する。

以上の計算により、Γがωに接するためのＲ－ｒ＝ｄから導かれた条件と一致することが確認され、２つの円は接することが証明された。

２０２０年 第３０回 日本数学オリンピック本選（第２問）

2. $BC<AB$, $BC<AC$ なる三角形 ABC の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり，$BD=CE=BC$ をみたしている．直線 BE と直線 CD の交点を P とする．三角形 ABE の外接円と三角形 ACD の外接円の交点のうち A でない方を Q としたとき，直線 PQ と直線 BC は垂直に交わることを示せ．ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、三辺をａ，ｂ，ｃ（ａ＜ｃ，ａ＜ｂ）、３つの角をα，β，γ、⊿ＡＢＥ、⊿ＡＣＤの外接円の中心をＣ$_1$，Ｃ$_2$、半径をＲ$_1$，Ｒ$_2$、直線ＰＱと直線ＢＣの交点をＲとする。⊿ＢＣＥにおいて、ＣＢ＝ＣＥ＝a、∠ＢＣＥ＝γから、

∠ＣＢＥ＝∠ＣＥＢ＝$\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$、⊿ＢＣＤにおいて、ＢＣ＝ＢＤ＝a、

∠ＣＢＤ＝βから、∠ＢＣＤ＝∠ＢＤＣ＝$\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$である。∠ＡＥＢ

＝$\pi-$∠ＣＥＢ＝$\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}$から、

⊿ＡＢＥに正弦定理を用いて、

$$R_1=\frac{c}{2\,sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{c}{2\,cos\,\frac{\gamma}{2}}$$

∠ＡＤＣ＝$\pi-$∠ＢＤＣ＝$\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$

＝$\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}$ から、⊿ＡＣＤに正弦定理を用いて、

$$R_2=\frac{b}{2\,sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{b}{2\,cos\,\frac{\beta}{2}}$$

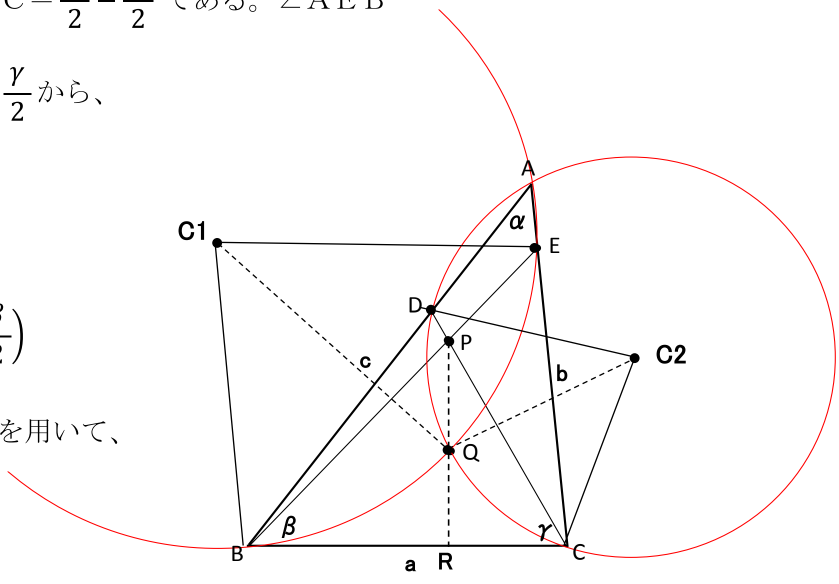

図１

⊿ＡＢＥの外接円の中心Ｃ$_1$、⊿ＡＣＤの外接円の中心Ｃ$_2$はそれぞれ直線ＢＥ，直線ＣＤの垂直２等分線上にあり、２つの円の外接円と直線ＰＲの交点がＱである。

問題を証明するには、$PB\,cos(\angle PBC)=QB\,cos(\angle QBC)=BR$、$PR\perp BC$ であることを示せばよい。

⊿ＰＢＣにおいて、∠ＢＰＣ＝π$-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$

⊿ＰＢＣに正弦定理を適用して、$\frac{PB}{sin(\angle BCP)}=\frac{PC}{sin(\angle CBP)}=\frac{a}{sin(\angle BPC)}$ より、

$$\frac{PB}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{PC}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{a}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$ であるから、

$$PB=a\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=a\frac{cos\,\frac{\beta}{2}}{cos\,\frac{\alpha}{2}},\quad PC=a\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=a\frac{cos\,\frac{\gamma}{2}}{cos\,\frac{\alpha}{2}}$$

ＰからＢＣに下ろした垂線の足をＲ’とすると、ＢＲ’は次のように表せる。

$$BR' = PB\,cos(\angle PBC) = PB\,cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = a\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = a\frac{cos\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

次に、ＱＢと∠ＱＢＣから、$QB\,cos(\angle QBC)$ によりＢＲ’を求める。

$BE\,sin(\angle \mathrm{EBC})$＝$BE\,sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$＝$CE\,sin\,\gamma = a\,sin\,\gamma$ より、$BE = \dfrac{a\,sin\,\gamma}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)} = \dfrac{2a\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}$

$= 2a\,sin\dfrac{\gamma}{2}$、$\angle BC_1E$ を求めるため、$\triangle BC_1E$ に余弦定理を適用して、

$$cos(\angle BC_1E) = \frac{R_1^2+R_1^2-BE^2}{2\cdot R_1\cdot R_1} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{BE}{R_1}\right)^2 = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{2a\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}}{\frac{c}{2\,cos\frac{\gamma}{2}}}\right)^2 = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{4a\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}{c}\right)^2$$

$= 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a\,sin\,\gamma}{c}\right)^2$ $a\,sin\,\gamma = c\,sin\,\alpha$ だから、$1-\dfrac{1}{2}(2\,sin\,\alpha)^2 = 1-2\,sin^2\alpha = cos\,2\alpha$

より $\angle BC_1E = 2\alpha$ である。よって、$\angle BQE = \pi - \alpha$ から、$\angle QBE = \dfrac{\alpha}{2}$ であり、

$$\angle QBC = \angle EBC - \angle QBE = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)-\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-(\gamma+\alpha)}{2} = \frac{\beta}{2}$$

以上より、$BR' = QB\,cos\dfrac{\beta}{2}$，$QB = \dfrac{BE}{2}\cdot\dfrac{1}{cos(\angle QBE)} = \dfrac{BE}{2}\cdot\dfrac{1}{cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\dfrac{1}{cos\frac{\alpha}{2}}$

$= \dfrac{a\,sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}$ であるから、$BR' = \dfrac{a\,cos\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}$ ……………………②

以上より、ＰＢから求めたＢＲ’①とＱＢから求めたＢＲ’②とが一致することが確認された。また、①②はそれぞれＰＢ，ＱＢの余弦から求めたものであるから、∠ＰＲ’Ｂ＝∠ＱＲ’Ｂ＝直角である。よってＲ’はＲに一致し、直線ＰＱと直線ＢＣは垂直に交わることが証明された。

この日本数学オリンピック問題を解いてみた（１３）の３問の中で最も難しかったのは、２０１９年の第４問である。その理由は、内接円ωの中心Ｉと、ＡＫを直径とする円Γの中心Ｊを通る直線の勾配を求めることができず、そのためΓの直径（R）を導くことが非常に難しい。

いろいろ試行錯誤しながら計算を行ったところ、$R = c\dfrac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\,sin\,\gamma}$ という比較的簡単な式で表せることに気付いたことで解答にたどり着くことができた。（２０２３．０５．０８）