１４６「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１４）」

これまでに数学オリンピック問題を６９問解き、ネット上で発表した。間違いがあってはいけないので、充分確認した上で発表してきたつもりだが、１問だけ明らかに誤った解答があったことに気付いたので、ここでお詫びと共に訂正したい。

問題は、「**１２８　日本数学オリンピック問題を解いてみた（２）」**で発表した、

「**１９９２年　第２回　日本数学オリンピック本選（第２問）」**次の問題である。

> **2. 面積 1 の $\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上の点をそれぞれ D, E とし，線分 BE, CD の交点を P とする．四角形 $BCED$ の面積が $\triangle PBC$ の面積の 2 倍に等しいという条件を満たしながら点 D, E が辺 AB, AC 上を動くとき，$\triangle PDE$ の面積の最大値を求めよ．**

解答を $x=\dfrac{c}{3}$，$y=\dfrac{b}{3}$ のとき⊿ＰＤＥの面積が最大となり、最大値は$\dfrac{1}{6}$ としたが誤りであった。

解答を振り返ると、図１において、⊿ＡＤＥを S_5 として、

S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 を式で表し、

$$S_1=\frac{bx+cy-3xy}{2bc},\quad S_2=\frac{bx-cy+xy}{2bc},$$

$$S_3=\frac{-bx+cy+xy}{2bc},\quad S_4=\frac{bx+cy-xy}{2bc},$$

$$S_5=\frac{bc-bx-cy+xy}{bc}$$ とした。

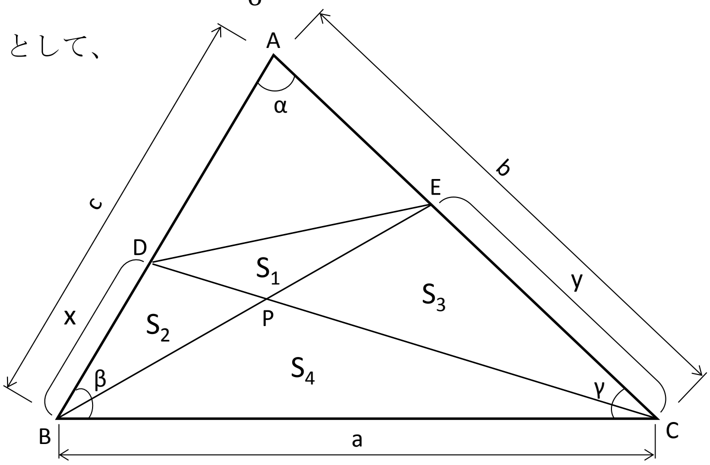


図１

四角形ＢＣＥＤの面積$=S_1+S_2+S_3+S_4$ から、

$=\dfrac{bx+cy-xy}{bc}$，⊿ＰＢＣの面積$=S_4=\dfrac{bx+cy-xy}{2bc}$ であるから、

四角形ＢＣＥＤの面積は⊿ＰＢＣの面積の２倍であり、問題の条件を満たしている。

$x=\dfrac{c}{3}$，$y=\dfrac{b}{3}$ として S_1～S_5を計算すると、$S_1=\dfrac{1}{6}$，$S_2=\dfrac{1}{18}$，$S_3=\dfrac{1}{18}$，$S_4=\dfrac{5}{18}$，$S_5=\dfrac{8}{18}$

となり、$S_1+S_2+S_3=S_4$ を満たす。

ところが、$x=\dfrac{c}{3}$，$y=\dfrac{b}{3}$ として図を描いてみると、図２のとおりであり、明らかに $S_1+S_2+S_3=S_4$ とならず、

$S_1+S_2+S_3>S_4$ であり、$x=\dfrac{c}{3}$，$y=\dfrac{b}{3}$ は問題の条件を満たした解ではない。

再度検討し直すと、かなり難しい問題だった。

以下に正解を記す。

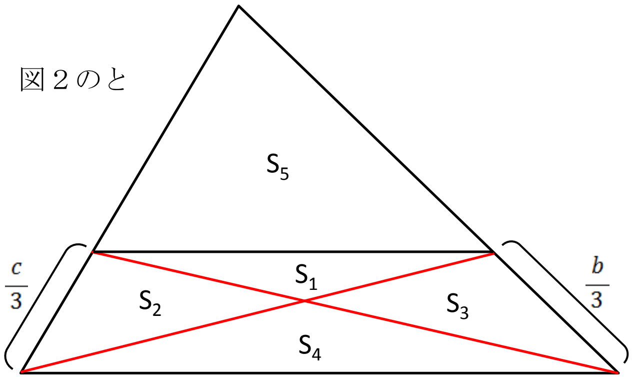


図２

図３の三角形ＡＢＣにおいて、３辺を a，b，c、

$AD = x$，$AE = y$、

$BP = m_1$，$PE = m_2$，$CP = n_1$，$PD = n_2$，

$\triangle PDE = S_1$，$\triangle PBD = S_2$，$\triangle PCE = S_3$，

$\triangle PBC = S_4$，$\triangle ADE = S_5$ とすると、

メネラウスの定理より、

$$\frac{c-x}{x}\cdot\frac{b}{b-y}\cdot\frac{m_2}{m_1} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{b-y}{y}\cdot\frac{c}{c-x}\cdot\frac{n_2}{n_1} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

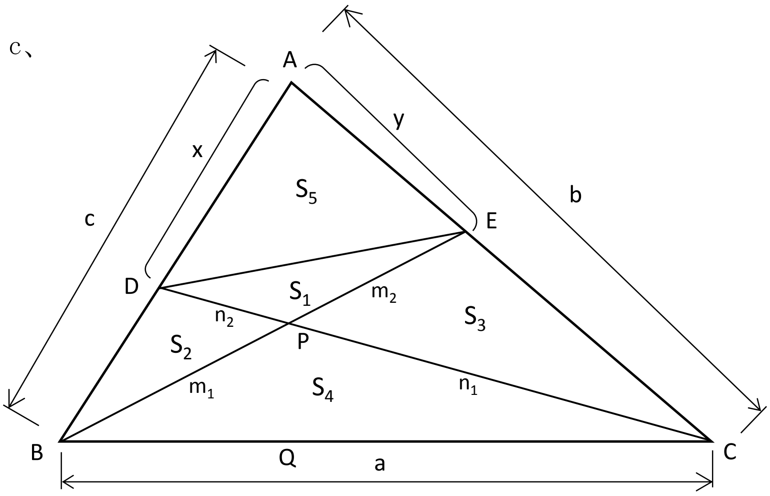


図３

① より $\frac{m_2}{m_1} = \frac{x(b-y)}{b(c-x)}$ ，②より $\frac{n_2}{n_1} = \frac{y(c-x)}{c(b-y)}$

$\triangle$ＡＢＣの面積は１だから、

$$\triangle ABE = S_1 + S_2 + S_5 = \frac{y}{b}，\triangle BED = S_1 + S_2 = \frac{y}{b}\cdot\frac{c-x}{c}，\triangle BPD = S_2 = \frac{y}{b}\cdot\frac{c-x}{c}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$\triangle ACD = S_1 + S_3 + S_5 = \frac{x}{c}，\triangle CDE = S_1 + S_3 = \frac{x}{c}\cdot\frac{b-y}{b}，\triangle CPE = S_3 = \frac{x}{c}\cdot\frac{b-y}{b}\cdot\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

$\triangle PDE = S_1 = \triangle BED\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{y}{b}\cdot\frac{c-x}{c}\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2}$、$m_2 = \frac{x(b-y)}{b(c-x)}m_1$ だから、

$$S_1 = \frac{y}{b}\cdot\frac{c-x}{c}\cdot\frac{\frac{x(b-y)}{b(c-x)}m_1}{m_1 + \frac{x(b-y)}{b(c-x)}m_1} = \frac{xy(b-y)(c-x)}{bc(bc-xy)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$S_2 = \frac{y}{b}\cdot\frac{c-x}{c}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{y}{b}\cdot\frac{c-x}{c}\cdot\frac{m_1}{m_1 + \frac{x(b-y)}{b(c-x)}m_1} = \frac{y(c-x)^2}{c(bc-xy)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$S_3 = \frac{x}{c}\cdot\frac{b-y}{b}\cdot\frac{n_1}{n_1+n_2}$、$n_2 = \frac{y(c-x)}{c(b-y)}n_1$ だから、

$$S_3 = \frac{x}{c}\cdot\frac{b-y}{b}\cdot\frac{n_1}{n_1 + \frac{y(c-x)}{c(b-y)}n_1} = \frac{x(b-y)^2}{b(bc-xy)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

$\triangle BCD = S_2 + S_4 = \frac{c-x}{c}$ より、$S_4 = \frac{c-x}{c} - S_2$、④を代入して、$S_4 = \frac{c-x}{c} - \frac{y(c-x)^2}{c(bc-xy)}$ から、

$$S_4 = \frac{(c-x)\,(b-y)}{bc-xy} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

③④⑤より、

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{xy(b-y)(c-x)}{bc(bc-xy)} + \frac{y(c-x)^2}{c(bc-xy)} + \frac{x(b-y)^2}{b(bc-xy)} = \frac{bc(bx+cy) - 3bcxy + x^2y^2}{bc(bc-xy)} \quad \cdots\cdots ⑦$$

四角形ＢＣＥＤの面積は⊿ＰＢＣの面積の２倍であるから、$S_1+S_2+S_3=S_4$ である。

従って、⑥と⑦は等しくなければならないので、次式が成り立つ。

$\dfrac{(c-x)\,(b-y)}{bc-xy}=\dfrac{bc(bx+cy)-3bcxy+x^2y^2}{bc(bc-xy)}$ これを整理して、

$x^2y^2+2bc(bx+cy)-4bcxy-b^2c^2=0$ ……………………… ⑧

③より、$S_1=\dfrac{xy(b-y)(c-x)}{bc(bc-xy)}$ であるから、⑧式の条件の上で、S_1の最大値を求めればよい。

S_1 をx，yで偏微分して 0 とおくと、

$\dfrac{\delta S_1}{\delta x}=\dfrac{2b^2c^2-2bcy(2c+x)+y^2(c^2+x^2)}{c(bc-xy)^2}=0$，$\dfrac{\delta S_1}{\delta y}=\dfrac{2b^2c^2-2bcx(2b+y)+x^2(b^2+y^2)}{b(bc-xy)^2}=0$

b，$c\neq 0$，$bc-xy\neq 0$ なので、

$2b^2c^2-2bcy(2c+x)+y^2(c^2+x^2)=0$ ……………………… ⑨

$2b^2c^2-2bcx(2b+y)+x^2(b^2+y^2)=0$ ……………………… ⑩

⑨−⑩を作ると、$4bc(bx-cy)-b^2x^2+c^2y^2=0$、　整理して、$(bx-cy)[4bc-(bx+cy)]=0$

$bx-cy=0$ から $bx=cy$、及び $bx+cy=4bc$ から $x=2c$，$y=2b$ が得られるが、

$x<c$，$y<b$ であるから $x=2c$，$y=2b$ は該当しない。従って $bx=cy$ のとき、S_1は最大となる。

$bx=cy$ から、$y=\dfrac{b}{c}x$ を⑧に入れて、$x^2\left(\dfrac{b}{c}x\right)^2+2bc\left(bx+c\cdot\dfrac{b}{c}x\right)-4bcx\cdot\dfrac{b}{c}x-b^2c^2=0$ より、

$x^4+4c^3x-4c^2x^2-c^4=0$、 これを因数分解して $(x-c)(x^2+2cx-c^2)=0$ から、

$x=c$ または、 $x=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)c$ を得る。

$0<x<c$ であるから、$x=\left(\sqrt{2}-1\right)c$，　$y=\dfrac{b}{c}x=\left(\sqrt{2}-1\right)b$ のとき、S_1が最大となることがわかる。

$x=\left(\sqrt{2}-1\right)c$，$y=\left(\sqrt{2}-1\right)b$ を $S_1=\dfrac{xy(b-y)(c-x)}{bc(bc-xy)}$ に入れて計算すると、

$$S_1=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)c\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)b\cdot\left[b-\left(\sqrt{2}-1\right)b\right]\cdot\left[c-\left(\sqrt{2}-1\right)c\right]}{bc\cdot\left[bc-\left(\sqrt{2}-1\right)c\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)b\right]}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2bc\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2bc}{bc\cdot 2\left(\sqrt{2}-1\right)bc}$$

$=\underline{\underline{\left(\sqrt{2}-1\right)^3=5\sqrt{2}-7=0.07107}}$

これが求める面積の最大値である。

$x=\left(\sqrt{2}-1\right)c$，$y=\left(\sqrt{2}-1\right)b$ の場合を図４に示す。

この時の S_1～S_5 を計算すると以下のとおりとなる。

$S_1=\left(\sqrt{2}-1\right)^3=5\sqrt{2}-7=0.07107$

$S_2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}=0.17157$

$S_3=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}=0.17157$

$S_4=\sqrt{2}-1=0.41421$

$S_5=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}=0.17157$

$S_1+S_2+S_3=\left(\sqrt{2}-1\right)^3+\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

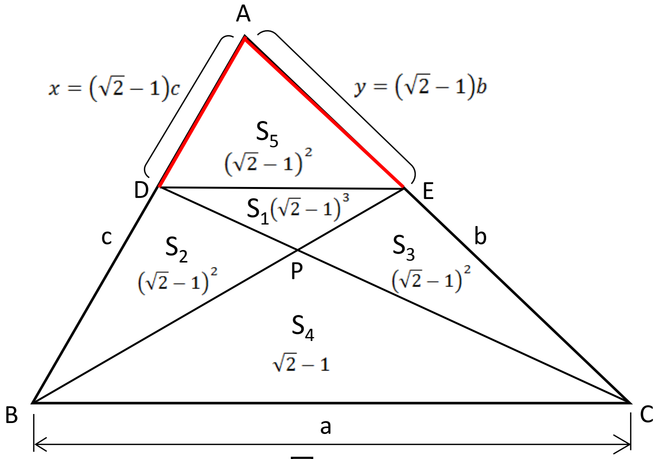


図４

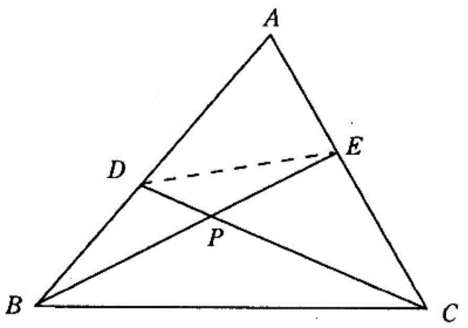
$= \left(\sqrt{2}-1\right)^2\left[\sqrt{2}-1+1+1\right] = \left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+1\right)$
$= \sqrt{2}-1 = S_4$ となり条件を満たす。
S_1 が最大となるとき、ＤＥは底辺ＢＣと平行であり、$S_2 = S_3 = S_5$ である。

解答に当たって、一般的な三角形で検討を行ったが、得られた解答から直角三角形や二等辺三角形などの特別な三角形として解いても同一の解答を得ることができると考えられる。

従って、最大値を求めるだけなら、上記のような特別な三角形で解くことも可能である。例えば、二等辺三角形とした場合は、$b = c$ であるから $bx = cy$ が $x = y$ となり、より簡単に同じ最大値を求めることができる。（２０２４．０１．０４）

以下に模範解答を示す

【2】 $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AC}$ とおく．以下で，記号 $\square BCED$ や $\triangle ABC$ は，それらの面積も示すこととする．



$$\square BCED = \triangle ABC - \triangle ADE = 1 - st$$

$\triangle ABE$ と直線 CD にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{EC}{AC} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{s}{1-s}\cdot\frac{BP}{PE}\cdot\frac{1-t}{1} = 1$$

ゆえに，

$$\frac{BP}{PE} = \frac{1-s}{s(1-t)}, \qquad \frac{BE}{BP} = \frac{PE}{BP} + 1 = \frac{1-st}{1-s}$$

同様に， $\dfrac{CP}{PD} = \dfrac{1-t}{t(1-s)}$.

$$\begin{aligned} \triangle PBC &= \triangle BEC \times \frac{BP}{BE} = (1-t)\cdot\frac{1-s}{1-st} \\ &= \frac{(1-s)(1-t)}{1-st} \end{aligned}$$

ゆえに，条件 $\square BCED = 2\triangle PBC$ は

$$1 - st = 2\frac{(1-s)(1-t)}{1-st}$$

整理して，

$$(1-st)^2 = 2(1-s)(1-t) \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

となる．ゆえに，

$$s+t = \frac{4st - s^2t^2 + 1}{2} \qquad \cdots\cdots \quad (1)'$$

$$\begin{aligned}\triangle PDE &= \triangle PBC \cdot \frac{PD}{CP} \cdot \frac{PE}{BP} \\ &= \frac{(1-s)(1-t)}{1-st} \cdot \frac{t(1-s)}{1-t} \cdot \frac{s(1-t)}{1-s} \\ &= \frac{st(1-s)(1-t)}{1-st}\end{aligned}$$

(1) より

$$\triangle PDE = \frac{st(1-st)^2}{2(1-st)} = \frac{st(1-st)}{2} \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

ここで $st = x$, $s+t = y$ とおく．すると，xy 平面上で，判別式 $y^2 - 4x$ で定まる曲線 $x = \dfrac{y^2}{4}$, 直線 $y = 2$, y 軸で囲まれた領域内に (x, y) があるときのみ，$st = x$, $s+t = y$ を満たす s, t が存在する．この領域内で，

$$y = \frac{4x - x^2 + 1}{2} \qquad \cdots\cdots \quad (1)'$$

を満たす (x, y) の中で $\triangle PDE$ が最大となる点は ($x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき) x 最大となる点，つまり $x = \dfrac{y^2}{4}$ 上にあり，よって $s = t$ である．

これを (1)′ に代入して，$s = \sqrt{2} - 1$, $\triangle PDE = (\sqrt{2} - 1)^3$.