１４７「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１５）」

２０２１年 第３１回 日本数学オリンピック本選（第２問）

3. 鋭角三角形 ABC の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり, $BD = CE$ をみたしている. また, 線分 DE 上に点 P が, 三角形 ABC の外接円の A を含まない方の弧 BC 上に点 Q があり, $BP : PC = EQ : QD$ をみたしている. ただし, 点 A, B, C, D, E, P, Q は相異なるものとする. このとき $\angle BPC = \angle BAC + \angle EQD$ が成り立つことを示せ.

なお, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

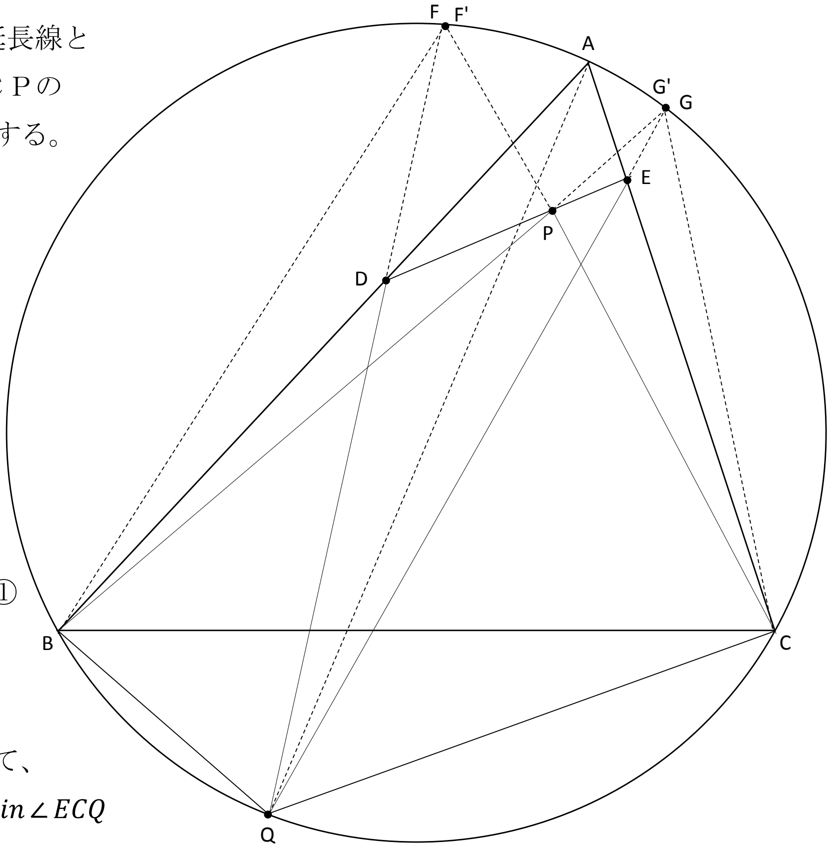


図１

図１において、直線ＱＤ，ＱＥの延長線と外接円の交点をＦ，Ｇ、直線ＢＰ，ＣＰの延長線と外接円の交点をＦ’，Ｇ’とする。

⊿ＢＤＱと⊿ＣＥＱに正弦定理を適用すると、

$$\frac{BD}{\sin\angle BQD} = \frac{DQ}{\sin\angle DBQ}$$

$$\frac{CE}{\sin\angle CQE} = \frac{EQ}{\sin\angle ECQ}$$

$BD = CE$ から、

$$DQ\frac{\sin\angle BQD}{\sin\angle DBQ} = \mathrm{EQ}\frac{\sin\angle CQE}{\sin\angle ECQ} \cdots ①$$

$\angle DBQ$，$\angle ECQ$ は円内接四角形ＡＢＱＣの対角だから、

$\angle DBQ + \angle ECQ = 180°$ である。よって、

$\sin\angle DBQ = \sin(180° - \angle ECQ) = \sin\angle ECQ$

$BP : CP = EQ : DQ$ から、$\frac{CP}{BP} = \frac{DQ}{EQ} = k$ とおき、

①を変形すると、$\frac{\sin\angle CQE}{\sin\angle BQD} = k$ ･････････ ② が得られる。

⊿ＢＦＱと⊿ＣＧＱは円内接三角形なので、$\frac{\sin\angle CQG}{\sin\angle BQF} = \frac{CG}{BF}$、$\angle BQF = \angle BQD$ 、$\angle CQG = \angle CQE$

だから、$\frac{\sin\angle CQE}{\sin\angle BQD} = \frac{CG}{BF} = k$ から、$CG = kBF$ ･････････ ③

次に⊿Ｆ’ＢＣと⊿Ｇ’ＢＣに正弦定理を適用する。

いずれも円内接三角形なので次式が成り立つ。

$\dfrac{BF'}{\sin\angle BCF'}=\dfrac{CG'}{\sin\angle CBG'}$ より、$\dfrac{\sin\angle CBG'}{\sin\angle BCF'}=\dfrac{CG'}{BF'}$

⊿ＢＣＰに正弦定理を適用して、$\dfrac{BP}{\sin\angle BCP}=\dfrac{CP}{\sin\angle CBP}$、$CP=kBP$ だから、$\dfrac{\sin\angle CBP}{\sin\angle BCP}=\dfrac{CP}{BP}=k$

$\angle BCP=\angle BCF'$，$\angle CBP=\angle CBG'$ から、$\dfrac{\sin\angle CBG'}{\sin\angle BCF'}=k$

よって、$\dfrac{\sin\angle CBG'}{\sin\angle BCF'}=\dfrac{CG'}{BF'}=k$ より、$CG'=kBF'$　　･･････････････ ④

以上より Ｂ，Ｃ，Ｆ，Ｆ’，Ｇ，Ｇ’は同一円周上にあり、③，④が成り立つので、ＦとＦ’，ＧとＧ’は一致する。

従って、直線ＱＤ，ＣＰの延長線と直線ＱＥ，ＢＰの延長線は外接円上の同一の点Ｆ，Ｇで交わる。

ここで､点Ａ，Ｑを結ぶと､$\angle ABF=\angle AQF$，$\angle ACG=\angle AQG$，$\angle AQF+\angle AQG=\angle FQG$，$\angle FQG=\angle DQE$

⊿ＦＢＰにおいて、$\angle BFP=\angle BAC$，$\angle FBP=\angle FQG=\angle DQE$ だから、⊿ＦＢＰの $\angle FPB$ の外角である $\angle BPC$ は、$\angle BPC=\angle BFP+\angle FBP=\angle BAC+\angle DQE$ である。

よって、$\angle BPC=\angle BAC+\angle DQE$ が成り立つ。

２０２２年 第３２回 日本数学オリンピック本選（第４問）

3. $AB=AC$ なる二等辺三角形 ABC があり，その内部 (周上を含まない) の点 O を中心とし C を通る円 ω が辺 BC, AC (端点を除く) とそれぞれ D, E で交わっている．三角形 AEO の外接円 Γ と ω の交点のうち E でない方を F とする．このとき，三角形 BDF の外心は Γ 上にあることを示せ．ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

図１に示す二等辺三角形ＡＢＣにおいて、ＡＢ＝ＡＣである。

∠ＢＡＣ＝α，∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ＝β，円ωの中心をＯ，円Γの中心をＰ，⊿ＢＤＦの外接円の中心（外心）をＱ，この外接円と辺ＡＢの延長線との交点をＧとする。

∠ＥＡＧ＝αより、∠ＥＦＧ＝$\pi-\alpha$、ＯＰ⊥ＥＦ，ＰＱ⊥ＦＧより∠ＯＰＱ＝αである。

また、∠ＤＣＥ＝∠ＤＦＥ＝β、ＯＰ⊥ＥＦ，ＯＱ⊥ＤＦより∠ＰＯＱ＝βである。

以上より、⊿ＡＢＣと⊿ＰＯＱは相似である。⊿ＡＢＣは、ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形であるから、三角形ＰＯＱにおいて、ＯＰ＝ＰＱである。よって、三角形ＢＤＦの外接円の中心（外心）Ｑは円Γ上にあることが証明された。

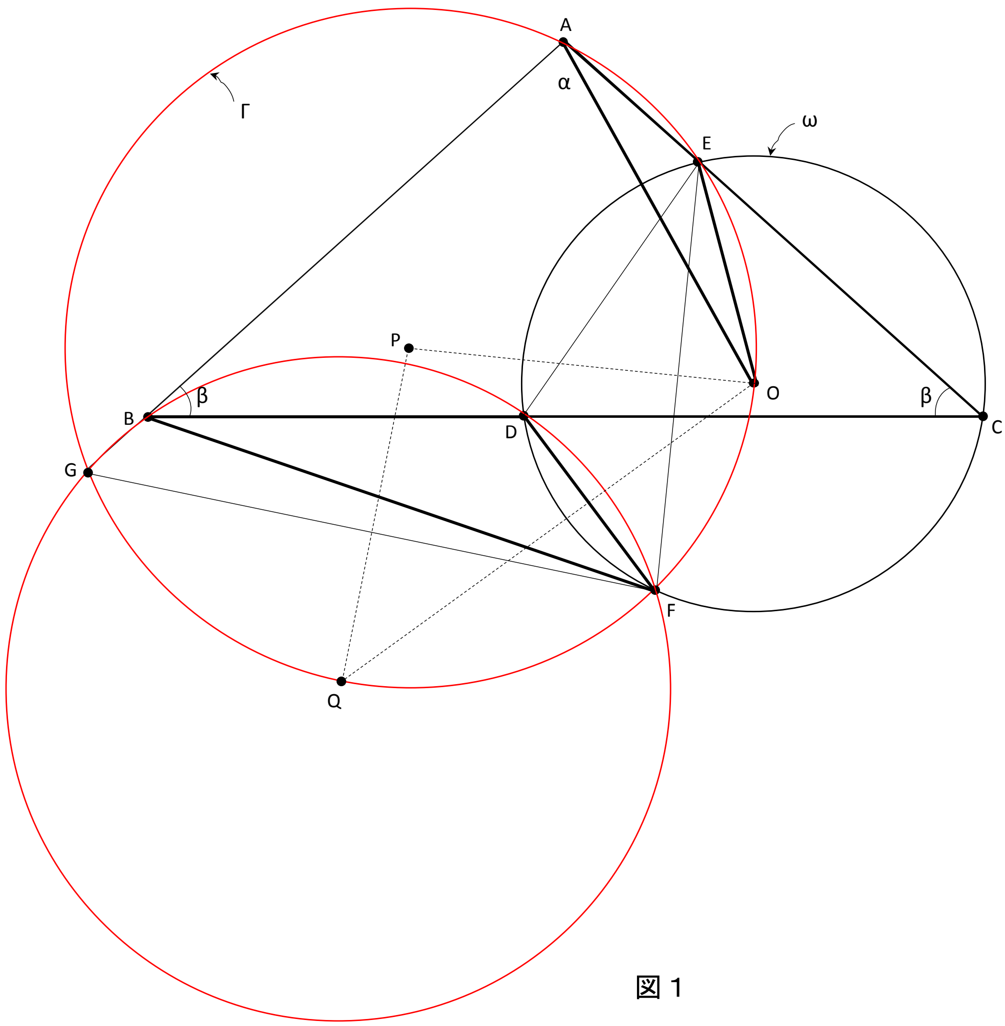


図１

２０２１年 第３１回 日本数学オリンピック本選（第２問）

2. 鋭角三角形 ABC があり，辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とし，D から辺 AB, AC におろした垂線の足をそれぞれ X, Y とする．F を通り直線 XY に平行な直線と直線 DY が E と異なる点 P で交わっている．このとき，直線 AD と直線 EP は垂直に交わることを示せ．

問題を図に表すと右図（図１）のとおりである。直線ＡＤと直線ＥＰの交わる点をＱとすると、２つの直線が垂直に交わることを示すためには、⊿ＡＥＱが直角三角形ＰＥＹと相似であることを言えばよい

次ページに示す図２において、三角形ＡＢＣの三辺をａ，ｂ，ｃ、それぞれの角をα，β，γとする。

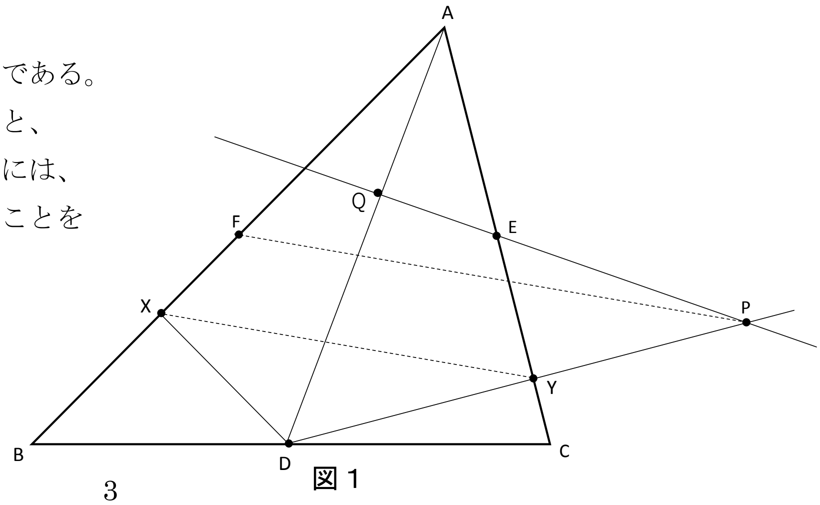


図１

⊿ＡＥＱが⊿ＰＥＹと相似であることをいうためには、∠ＡＥＱ＝∠ＰＥＹだから、∠ＥＡＱ＝∠ＥＰＹであることを言えばよい。

四角形ＡＸＤＹにおいて、∠ＡＸＤ＝∠ＡＹＤ＝９０°だから、∠ＸＡＹ＋∠ＸＤＹ＝１８０°となり、体角の和が１８０°であるから、四角形ＡＸＤＹは円に内接する。

⊿ＡＤＸと⊿ＰＦＤにおいて、∠ＸＡＤ＝∠ＸＹＤ、ＸＹとＦＰは平行だから∠ＦＰＤ＝９０°である。よって、⊿ＡＤＸと⊿ＰＦＤは相似である。

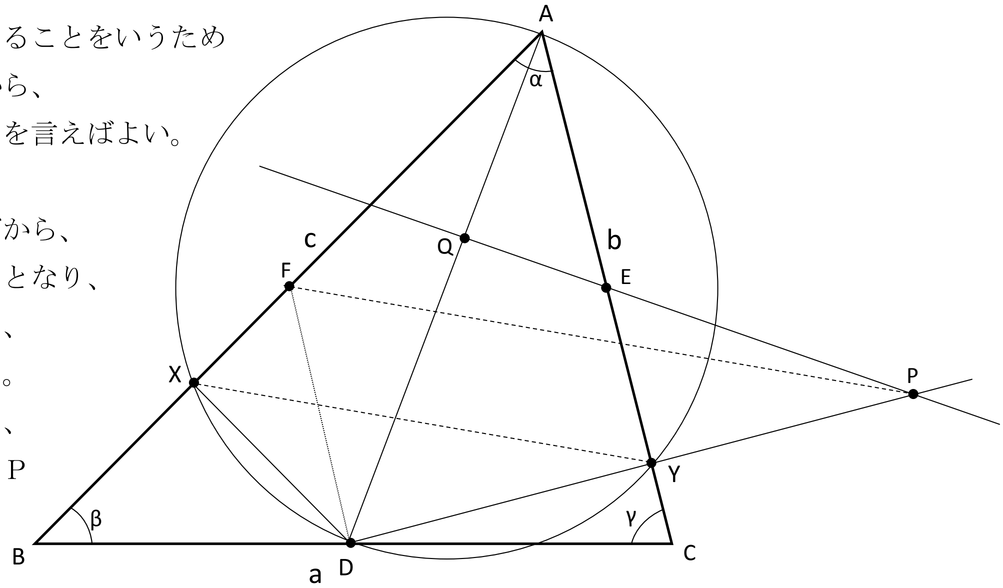


図２

従って、$\dfrac{FD}{XD}=\dfrac{DP}{AX}$ より $DP=\dfrac{FD\cdot AX}{XD}$、これに $FD=\dfrac{b}{2}$, $XD=\dfrac{a}{2}\sin\beta$, $AX=c-\dfrac{a}{2}\cos\beta$ を入れると、$DP=\dfrac{\frac{b}{2}\cdot\left(c-\frac{a}{2}\cos\beta\right)}{\frac{a}{2}\sin\beta}$, $DY=\dfrac{a}{2}\sin\gamma$ より、$PY=DP-DY=\dfrac{\frac{b}{2}\cdot\left(c-\frac{a}{2}\cos\beta\right)}{\frac{a}{2}\sin\beta}-\dfrac{a}{2}\sin\gamma$

∠ＤＡＹ（＝∠ＥＡＱ）と∠ＥＰＹが等しことをいうために、

$\tan\angle EPY=\dfrac{YE}{PY}$, $\tan\angle DAY=\dfrac{DY}{AY}$ が等しいことを示す。

$YE=\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}\cos\gamma$ から、$\dfrac{YE}{PY}=\dfrac{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\cos\gamma}{\frac{\frac{b}{2}\cdot\left(c-\frac{a}{2}\cos\beta\right)}{\frac{a}{2}\sin\beta}-\frac{a}{2}\sin\gamma}$ ………… ①

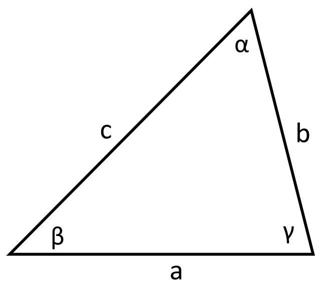
$AY=b-\dfrac{a}{2}\cos\gamma$ から、$\dfrac{DY}{AY}=\dfrac{\frac{a}{2}\sin\gamma}{b-\frac{a}{2}\cos\gamma}$ ………… ②

① ，②式について下図に基づき、$b\sin\alpha=a\sin\beta$, $c\sin\beta=b\sin\gamma$, $a\sin\gamma=c\sin\alpha$、$a-b\cos\gamma=c\cos\beta$, $b-c\cos\alpha=a\cos\gamma$, $c-a\cos\beta=b\cos\alpha$ を使って変形する。

① 式分母について、

$$\frac{\frac{b}{2}\cdot\left(c-\frac{a}{2}\cos\beta\right)}{\frac{a}{2}\sin\beta}-\frac{a}{2}\sin\gamma=\frac{2bc-ab\cos\beta-a^2\sin\beta\sin\gamma}{2a\sin\beta}$$

$$=\frac{2c-a\cos\beta-a\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\alpha}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$



$$= \frac{c + b\cos\alpha - a\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{c + b\cos\alpha - c\sin^2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{c\cos^2\alpha + b\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\,(c\cos\alpha + b\,)}{2\sin\alpha}$$

① 式分子について、

$$\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\cos\gamma = \frac{1}{2}(b - a\cos\gamma\,) = \frac{1}{2}c\cos\alpha$$

② 式分母について、

$$b - \frac{a}{2}\cos\gamma = \frac{1}{2}(b + b - a\cos\gamma\,) = \frac{1}{2}(b + c\cos\alpha\,)$$

以上を整理すると、

$$\frac{YE}{PY} = \frac{\frac{1}{2}c\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha\,(c\cos\alpha + b\,)}{2\sin\alpha}} = \frac{c\sin\alpha}{b + c\cos\alpha}, \quad \frac{DY}{AY} = \frac{\frac{a}{2}\sin\gamma}{\frac{1}{2}(b + c\cos\alpha\,)} = \frac{a\sin\gamma}{b + c\cos\alpha} = \frac{c\sin\alpha}{b + c\cos\alpha}$$

よって、$\frac{YE}{PY} = \frac{YD}{AY}$ が示された。従って $\triangle PEY$ と $\triangle AEQ$ は相似である。

以上より、∠ＡＱＥ＝は直角であるから、ＡＤとＰＥは垂直に交わることが証明された。

「２０２１年本選第２問」が難しく、解くのにかなり時間を要した。

点Ａ，Ｐの延長線と外接円の交点をＲとすると、$\angle BPR$ は、その外角の和 $\angle BAR + \angle ABG$ に等しいから、

$\angle BPR = \angle BAR + \angle ABG$，$\angle ABG = \angle ARG = \angle AQG$ だから、$\angle BPR = \angle BAR + \angle AQG$

同様に $\angle CPR$ は、その外角の和 $\angle CAR + \angle ACF$ に等しいから、

$\angle CPR = \angle CAR + \angle ACF$，$\angle ACF = \angle ARF = \angle AQF$ だから、$\angle CPR = \angle CAR + \angle AQF$

$\angle BPR + \angle CPR = \angle BPC$，$\angle BAR + \angle CAR = \angle BAC$，

$\angle AQF + \angle AQG = \angle EQD$ から、$\angle BPC = \angle BPR + \angle CPR$

$= (\angle BAR + \angle AQG) + (\angle CAR + \angle AQF)$

$= (\angle BAR + \angle CAR) + (\angle AQF + \angle AQG)$

$= \angle BAC + \angle EQD$ というように、比較的簡単に

$\angle BPC = \angle BAC + \angle EQD$ が示せるが、

直線 BP と QE の延長線と、直線 CP と QD の延長線がそれぞれ外接円の同一の点で交わることの証明が難しく、今回の解答にたどり着くまでに相当の時間を要した。

（２０２４．０１．１６）