

148 「日本数学オリンピック問題を解いてみた(16)」

ここまで、日本数学オリンピック本選問題について、主に幾何学問題を中心に第1回から順に解いてきたが、中に何問か解けない問題がありそのままになっていた。

今回から、そうした問題に再挑戦した結果を書いていく。

1997年 第7回 日本数学オリンピック本選(第4問)

4. A, B, C, D は空間内の4点で、同一平面上になく、また、その中のどの3点も一直線上にないとする。線分の長さの和 $AX + BX + CX + DX$ が A, B, C, D と異なる点 $X = X_0$ で最小となるとすれば、 $\angle AX_0B = \angle CX_0D$ が成り立つことを証明せよ。

『平面上』にある4つの点から最短距離にある点を求めるのは易しい。

図1のように4点を頂点とする四角形の対角線の交点Pである。

三角形において、2辺の和は他の1辺より大きいので、 $AP + PC + BP + PD < AQ + QC + BQ + QD$ である。

3点の場合はフェルマーの問題で、その点をFとすると、 $AF + BF + CF$ が最小となる点がフェルマー点である。

フェルマー点は、図2のとおり3辺に対して成す角度が 120° となる点である。($\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$)

幾何学的には、各辺を一辺とする正三角形の頂点と対向する頂点を結ぶ直線の交点として与えられる。

この問題は、3地域に電力を送る場合、どの位置に変電所を置けば送電線の距離を最も短くできるか? といった問題に適用できる。

「114 エルデシュ・モーデル定理の新しい証明」では、フェルマー点の位置を三角形の3辺で表す式を示した。

フェルマー点が、三角形の3辺に対して成す角度が 120° の点であることの証明を後述する。

さて、この問題はフェルマー点の問題を2次元から3次元に拡張したものである。

図3に示すように、空間内の4点を A, B, C, D とする。

X_0 を $AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0$ が最小となる点とする。

$ABCD$ を頂点とする四面体を考え、3点 A, B, C は同一平面上にあるものとする。(空間内の3点は、一つの平面を形成するので3点が同一平面にあるとしても一般性を失うことはない)

図3において、 $AB = a, BC = b, CA = c, DA = d, DB = e, DC = f, AX_0 = k, BX_0 = l, CX_0 = m, DX_0 = n$ とする。点 X_0 の周りにできる6つの角のうち対向する角は、

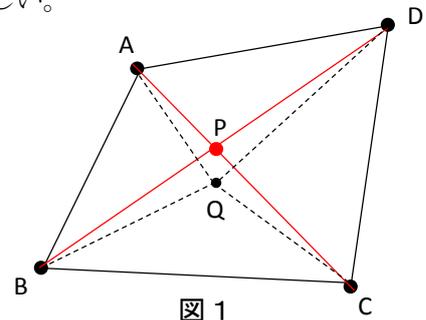


図1

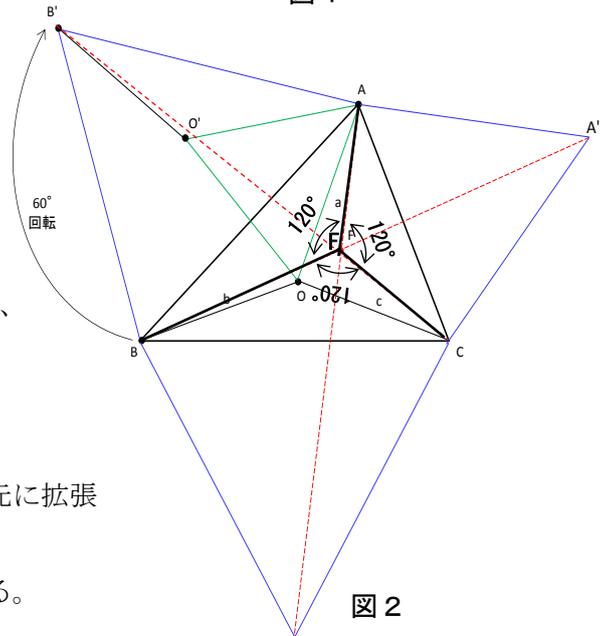


図2

$\angle AX_0B \Leftrightarrow \angle CX_0D$, $\angle BX_0C \Leftrightarrow \angle AX_0D$,
 $\angle CX_0A \Leftrightarrow \angle BX_0D$ である。

問題は、 $k+l+m+n$ が X_0 で最小になるとき、対向する角度 $\angle AX_0B$ と $\angle CX_0D$ が等しいことを証明する問題である。

同様に対向する角度、 $\angle BX_0C = \angle AX_0D$,
 $\angle CX_0A = \angle BX_0D$ が成り立つことも証明できる。

四面体内にできた $\triangle CX_0D$ を X_0 を支点として、 AX_0B と同一平面になるように回転させる。次に、 X_0 近傍の点 Y_0 をとり、 $AY_0 + BY_0 + CY_0 + DY_0 = k' + l' + m' + n'$ として、四面体内にできた $\triangle CY_0D$ を Y_0 を支点として、 $\triangle AY_0B$ と同一平面になるように回転させる。それぞれ2つの三角形が対向した平面図形の面は一致しないが、どちらかの図形をさらに回転させ、同一平面にすると図4のようになる。

長さを比較する上で図形を回転させても長さの大小関係は変わらない。

図4において、 $\triangle AX_0B$ と $\triangle AY_0B$ 及び $\triangle CX_0D$ と $\triangle CY_0D$ の関係は、図1に示すのと同様であり、 $k+n < k'+n'$, $l+m < l'+m'$ である。両辺を加えれば、 $k+l+m+n < k'+l'+m'+n'$ が成り立つ。従って、 $k+l+m+n$ が最小のとき、対向する角度は等しい。

(証明終わり)

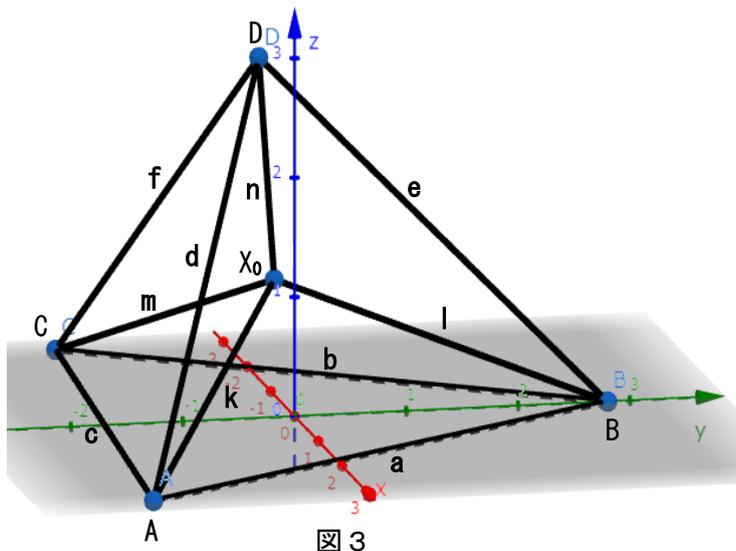


図3

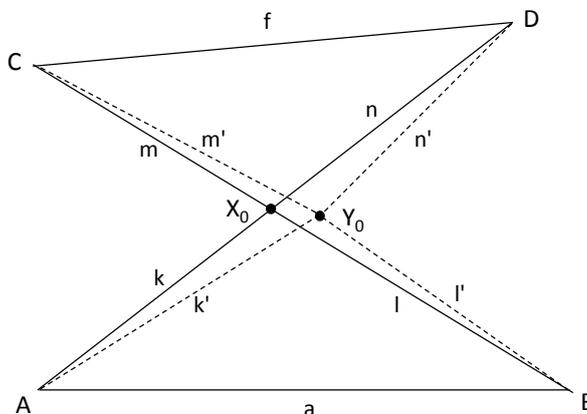


図4

図5において、三角形ABCのフェルマー点Fは、前記のとおりFの周りの角がすべて 120° になるように各頂点を結んだものである。

これをベクトルで表すと、

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} + \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} + \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} = 0, \quad \frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} = \vec{e}_A, \quad \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} = \vec{e}_B, \quad \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} = \vec{e}_C$$

とおくと、 $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C$ は大きさが1の単位ベクトルである。

従って、 $\vec{e}_A + \vec{e}_B + \vec{e}_C = 0$, $|\vec{e}_A| = |\vec{e}_B| = |\vec{e}_C| = 1$ である。

$\vec{e}_A = -\vec{e}_B - \vec{e}_C$ として両辺のベクトルの大きさを二乗して、 $|\vec{e}_A|^2 = |-\vec{e}_B - \vec{e}_C|^2 = |\vec{e}_B|^2 + |\vec{e}_C|^2 + 2\vec{e}_B \cdot \vec{e}_C$ 、

$$1^2 = 1^2 + 1^2 + 2\vec{e}_B \cdot \vec{e}_C \text{ より、} \vec{e}_B \cdot \vec{e}_C = -\frac{1}{2}, \text{ 内積の定義から、} |\vec{e}_B||\vec{e}_C| \cos(\angle BFC) = -\frac{1}{2},$$

よって、 $\cos(\angle BFC) = -\frac{1}{2}$ から $\angle BFC = 120^\circ$ が得られる。

他の角も同様に計算すれば、 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$ が導かれる。

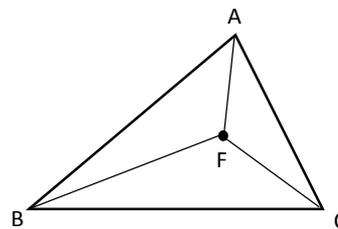


図5

同様の計算を3次元で行うと、

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} + \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} + \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} + \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = 0, \quad \frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} = \vec{e}_A, \quad \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} = \vec{e}_B, \quad \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} = \vec{e}_C, \quad \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \vec{e}_D$$

とおくと、 $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C, \vec{e}_D$ は大きさが1の単位ベクトルである。

従って、 $\vec{e}_A + \vec{e}_B + \vec{e}_C + \vec{e}_D = 0, |\vec{e}_A| = |\vec{e}_B| = |\vec{e}_C| = |\vec{e}_D| = 1$ である。

$$\vec{e}_A + \vec{e}_B = -\vec{e}_C - \vec{e}_D \text{ として両辺のベクトルの大きさを二乗して、} |\vec{e}_A + \vec{e}_B|^2 = |-\vec{e}_C - \vec{e}_D|^2,$$

$$|\vec{e}_A|^2 + |\vec{e}_B|^2 + 2\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B = |\vec{e}_C|^2 + |\vec{e}_D|^2 + 2\vec{e}_C \cdot \vec{e}_D,$$

$$1^2 + 1^2 + 2\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B = 1^2 + 1^2 + 2\vec{e}_C \cdot \vec{e}_D \text{ から、} \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B = \vec{e}_C \cdot \vec{e}_D$$

同様に、 $\vec{e}_A \cdot \vec{e}_C = \vec{e}_B \cdot \vec{e}_D = \vec{e}_B \cdot \vec{e}_C$ である。

また、 $\vec{e}_A = -\vec{e}_B - \vec{e}_C - \vec{e}_D$ としての両辺のベクトルの大きさを二乗して、 $|\vec{e}_A|^2 = |-\vec{e}_B - \vec{e}_C - \vec{e}_D|^2,$

$$|\vec{e}_A|^2 = |\vec{e}_B|^2 + |\vec{e}_C|^2 + |\vec{e}_D|^2 + 2\vec{e}_B \cdot \vec{e}_C + 2\vec{e}_C \cdot \vec{e}_D + 2\vec{e}_D \cdot \vec{e}_B \text{ より、}$$

$$1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(\vec{e}_B \cdot \vec{e}_C + \vec{e}_C \cdot \vec{e}_D + \vec{e}_D \cdot \vec{e}_B) = 3 + 2 \cdot 3 \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B,$$

$$\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B = -\frac{1}{3}, \text{ 内積の定義から、} |\vec{e}_A| |\vec{e}_B| \cos(\angle AFB) = -\frac{1}{3}, \cos(\angle AFB) = -\frac{1}{3} \text{ から}$$

$\angle BFC \cong 109.5^\circ$ が得られる。他の角も同様に計算すれば、 $\angle AFB = \angle BFD = \angle DFC = \angle AFB = \angle CFA = \angle BFC \cong 109.5^\circ$ が得られる。(以上、飛田 泰雅氏の投稿を引用)

以下、具体的な数値を入れて計算した例を示す。

A, B, C, D 4点の3次元座標を表1(a), 表1(b)に示す。

表1(a)の X_0 は $AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0$ が最小となる点の座標(飛田 泰雅氏の算出による)(図3に示す)

表1(b)の Y_0 はA, B, C, D 4点の平均(A, Bの中点とC, Dの中点を結んだ線の中点とした。これは、 $AY_0 + BY_0 + CY_0 + DY_0$ が最小値に近いと予想したことによる。

	X	Y	Z
A	3	-1.9	0
B	0	2.8	0
C	-3	-1.5	0
D	-0.1	-0.3	3
X_0	-0.093	-0.163	1.136

表 1 (a)

	X	Y	Z
A	3	-1.9	0
B	0	2.8	0
C	-3	-1.5	0
D	-0.1	-0.3	3
Y_0	-0.025	-0.225	0.75

表 1 (b)

$AX_0(k)$	3.73	$\angle AX_0B$	107.6°
$BX_0(l)$	3.18	$\angle AX_0C$	115.2°
$CX_0(m)$	3.40	$\angle AX_0D$	105.8°
$DX_0(n)$	1.87	$\angle BX_0C$	105.8°
AB(a)	5.58	$\angle BX_0D$	115.2°
BC(b)	5.24	$\angle CX_0D$	107.6°
AC(c)	6.01		
AD(d)	4.60		
BD(e)	4.32		
CD(f)	4.34		

表 2 (a)

$AY_0(k)$	3.54	$\angle AY_0B$	113.7°
$BY_0(l)$	3.12	$\angle AY_0C$	122.4°
$CY_0(m)$	3.32	$\angle AY_0D$	103.0°
$DY_0(n)$	2.25	$\angle BY_0C$	109.0°
AB(a)	5.58	$\angle BY_0D$	105.8°
BC(b)	5.24	$\angle CY_0D$	100.5°
AC(c)	6.01		
AD(d)	4.60		
BD(e)	4.32		
CD(f)	4.34		

表 2 (b)

以上のデータをもとに計算したところ、

$$AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0 = 3.73 + 3.18 + 3.40 + 1.87 = 12.18$$

$$AY_0 + BY_0 + CY_0 + DY_0 = 3.54 + 3.12 + 3.32 + 2.25 = 12.23 \text{ という結果となり、}$$

$AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0 < AY_0 + BY_0 + CY_0 + DY_0$ が確認された。

また、表 2 (a) (b) で分かるように、点 X_0 の周りの角度は、

$$\angle AX_0B = \angle CX_0D = 107.6^\circ, \quad \angle AX_0C = \angle BX_0D = 115.2^\circ, \quad \angle AX_0D = \angle BX_0C = 105.8^\circ$$

となり、対向する角度はそれぞれ一致している。

$$\text{それら 6 つの角度の合計は、} (107.6^\circ + 115.2^\circ + 105.8^\circ) \times 2 = 657.2^\circ \text{ (平均 } 109.53^\circ \text{)}$$

となり、平均値は $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ を満たす $\theta = 109.47\cdots^\circ$ に非常に近い値となっている。

一方、点 Y_0 の周りの角度は、

$$\angle AY_0B = 113.7^\circ \quad \angle CY_0D = 100.5^\circ \quad \angle AY_0C = 122.4^\circ \quad \angle BY_0D = 105.8^\circ$$

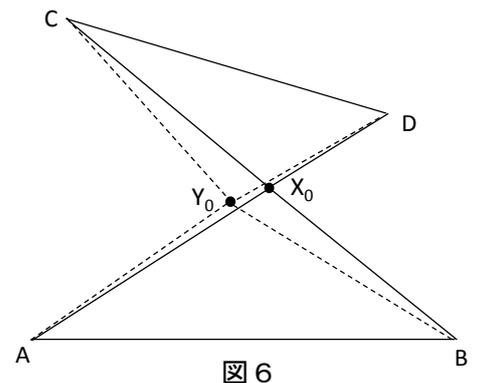
$$\angle AY_0D = 103.0^\circ \quad \angle BY_0C = 109.0^\circ \text{ となり、対向する角度は一致しない。}$$

それら 6 つの角度の合計は、

$$113.7^\circ + 100.5^\circ + 122.4^\circ + 105.8^\circ + 103.0^\circ + 109.0^\circ$$

$$= 654.4^\circ \text{ (平均 } 109.07^\circ \text{) となり、} 109.47^\circ \text{ から少し離れた値である。}$$

以上の計算に基づき、図 4 に準ずる図を描くと図 6 のようになった。



次に、平面におけるフェルマー点について、三角関数による証明を示す。

図 7 に示す三角形において、 $AF + BF + CF$ が最小となる点 F がフェルマー点である。

図 7 のとおり、三辺を a, b, c 、三角を α, β, γ 、

$$\angle CAF = \alpha_1, \quad \angle ABF = \beta_1, \quad \angle BCF = \gamma_1,$$

$$AF = k, \quad BF = l, \quad CF = m \text{ とする。}$$

正弦定理より、以下の①～⑥が成り立つ。

$\triangle ABF$ において、

$$k = \frac{c \sin \beta_1}{\sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)}, \quad l = \frac{c \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)} \quad \dots\dots\dots \text{①②}$$

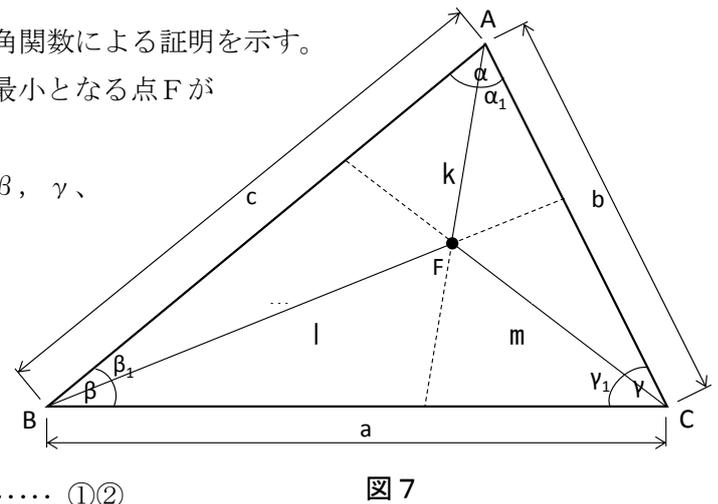
$\triangle ACF$ において、

$$k = \frac{b \sin(\gamma - \gamma_1)}{\sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1)}, \quad m = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1)} \quad \dots\dots\dots \text{③④}$$

$\triangle BCF$ において、

$$l = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin(\beta - \beta_1 + \gamma_1)}, \quad m = \frac{a \sin(\beta - \beta_1)}{\sin(\beta - \beta_1 + \gamma_1)} \quad \dots\dots\dots \text{⑤⑥}$$

① ～⑥の左辺、右辺をそれぞれ加えると、



$$\begin{aligned}
2(k+l+m) &= \frac{a \sin \gamma_1}{\sin(\beta - \beta_1 + \gamma_1)} + \frac{a \sin(\beta - \beta_1)}{\sin(\beta - \beta_1 + \gamma_1)} + \frac{b \sin(\gamma - \gamma_1)}{\sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1)} + \frac{b \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1)} \\
&+ \frac{c \sin \beta_1}{\sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)} + \frac{c \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)} \\
&= a \frac{2 \sin \frac{\beta - \beta_1 + \gamma_1}{2} \cos \frac{-\beta + \beta_1 + \gamma_1}{2}}{2 \sin \frac{\beta - \beta_1 + \gamma_1}{2} \cos \frac{\beta - \beta_1 + \gamma_1}{2}} + b \frac{2 \sin \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \gamma + \gamma_1}{2}}{2 \sin \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2}} + c \frac{2 \sin \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cos \frac{-\alpha + \alpha_1 + \beta_1}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2}} \\
&= a \frac{\cos \frac{-\beta + \beta_1 + \gamma_1}{2}}{\cos \frac{\beta - \beta_1 + \gamma_1}{2}} + b \frac{\cos \frac{\alpha_1 - \gamma + \gamma_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2}} + c \frac{\cos \frac{-\alpha + \alpha_1 + \beta_1}{2}}{\cos \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2}}
\end{aligned}$$

以上より、 $k+l+m$ は $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ の関数で表される。それを $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ とすると、

$$2(k+l+m) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = a \frac{\cos \frac{-\beta + \beta_1 + \gamma_1}{2}}{\cos \frac{\beta - \beta_1 + \gamma_1}{2}} + b \frac{\cos \frac{\alpha_1 - \gamma + \gamma_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2}} + c \frac{\cos \frac{-\alpha + \alpha_1 + \beta_1}{2}}{\cos \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2}} \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

⑦式を $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = b \frac{\sin(\gamma - \gamma_1)}{\cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2}} - c \frac{\sin \beta_1}{\cos^2 \frac{-\alpha + \alpha_1 - \beta_1}{2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = c \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos^2 \frac{\alpha_1 - \alpha - \beta_1}{2}} - a \frac{\sin \gamma_1}{\cos^2 \frac{-\beta_1 + \beta + \gamma_1}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_1} = a \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{\cos^2 \frac{-\beta_1 + \beta + \gamma_1}{2}} - b \frac{\sin \alpha_1}{\cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2}}$$

$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} = 0$ とおいて、

$$b \sin(\gamma - \gamma_1) \cos^2 \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} = c \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

$$c \sin(\alpha - \alpha_1) \cos^2 \frac{-\beta_1 + \beta + \gamma_1}{2} = a \sin \gamma_1 \cos^2 \frac{\alpha_1 - \alpha - \beta_1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

$$a \sin(\beta - \beta_1) \cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} = b \sin \alpha_1 \cos^2 \frac{-\beta_1 + \beta + \gamma_1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

① ③より、

$$\frac{c \sin \beta_1}{\sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)} = \frac{b \sin(\gamma - \gamma_1)}{\sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1)} \text{ から、 } c \sin \beta_1 \sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1) = b \sin(\gamma - \gamma_1) \sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)$$

これを⑧の両辺に掛けて整理すると、

$$b \sin(\gamma - \gamma_1) \cos^2 \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cdot c \sin \beta_1 \sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1) = c \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cdot b \sin(\gamma - \gamma_1) \sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cdot \sin(\alpha_1 + \gamma - \gamma_1) = \cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cdot \sin(\alpha - \alpha_1 + \beta_1)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} = \cos^2 \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} = \cos \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha - \alpha_1 + \beta_1}{2} = \tan \frac{\alpha_1 + \gamma - \gamma_1}{2}$$

$\alpha - \alpha_1 + \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 + \gamma - \gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}$ だから、 $\alpha - \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \gamma - \gamma_1$ である。

よって、 $\alpha - \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \gamma - \gamma_1$ であるから、 $\angle ABF + \angle BAF = \angle ACF + \angle CAF$

同様に、②⑤と⑨より、 $\alpha - \alpha_1 + \beta_1 = \beta - \beta_1 + \gamma_1$ 、④⑥と⑩より、 $\alpha_1 + \gamma - \gamma_1 = \beta - \beta_1 + \gamma_1$

以上から、 $\angle ABF + \angle BAF = \angle BCF + \angle CBF = \angle ACF + \angle CAF$ が導かれた。

従って、 $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ (証明終わり)

少し複雑な計算となったが、きっちり 120° が数値として導かれた。

それでは、空間内の4つの点からの距離の合計が最も小さくなる点はどのように求められるだろうか？

4点A, B, C, Dの3次元座標を $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$, $C(C_x, C_y, C_z)$, $D(D_x, D_y, D_z)$, とし、4点からの距離の和が最小となる点を $F(x, y, z)$ とすると、

$$\begin{aligned} AF + BF + CF + DF = & \sqrt{(A_x - x)^2 + (A_y - y)^2 + (A_z - z)^2} + \sqrt{(B_x - x)^2 + (B_y - y)^2 + (B_z - z)^2} \\ & + \sqrt{(C_x - x)^2 + (C_y - y)^2 + (C_z - z)^2} + \sqrt{(D_x - x)^2 + (D_y - y)^2 + (D_z - z)^2} \end{aligned}$$

の最小値を求めればよい。

計算を簡単にするため、「125 四面体」で述べたように、配置の条件として、

- ①頂点DはZ軸上に一致させる
- ②辺BCはX軸に平行にする
- ③ $\triangle ABC$ はXY平面上とする

のように、ある面をXY平面に一致させ、うち1辺をX軸と平行にし、そのときの頂点DをX, Y軸の交点に配置することは、どのような四面体についても可能であり、この3つの配置上の条件は特別なものではなく一般性は失われない。この条件により、 $A_z = 0$, $B_z = 0$, $C_z = 0$, $B_y = C_y$, $D_x = D_y = 0$ とすることができ、

$$\begin{aligned} AF + BF + CF + DF = & \sqrt{(A_x - x)^2 + (A_y - y)^2 + z^2} + \sqrt{(B_x - x)^2 + (B_y - y)^2 + z^2} \\ & + \sqrt{(C_x - x)^2 + (B_y - y)^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (D_z - z)^2} \end{aligned}$$

と式が簡略化される。それでもこの式の値を最小にする (x, y, z) を求めるのは難しい。

そこで、4点からの距離の和が最小となる点 $F(x, y, z)$ においては、「3組の対向する角度はそれぞれ一致する」という特性を用いて、その点を求める方法を考えた。

図8に示すとおり、四面体の1辺ACとFを結ぶ角 $\angle AFC$ 、対向する辺BDとFを結ぶ角 $\angle BFD$ が等しくなるように2つの球の位置及び半径を決める。

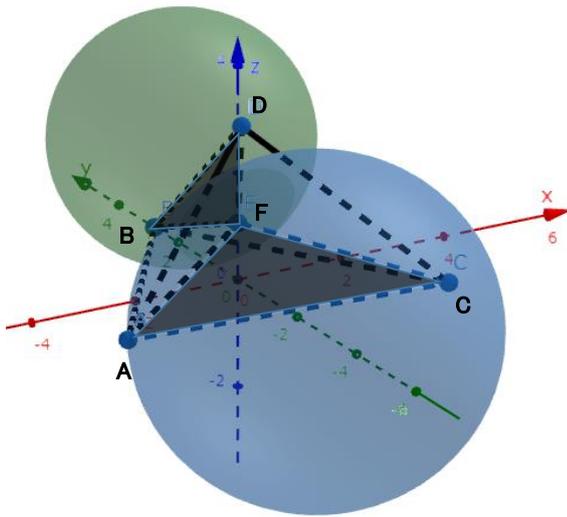


図 8

四面体内部で 109.47° の円周角（球面角）となる球の中心は、9図に示すように辺ACの中心

から垂直に $\frac{AC}{2} \tan \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$ の距離で、

球の中心を通る直線と、辺BDが垂直に交差する面上に位置する。

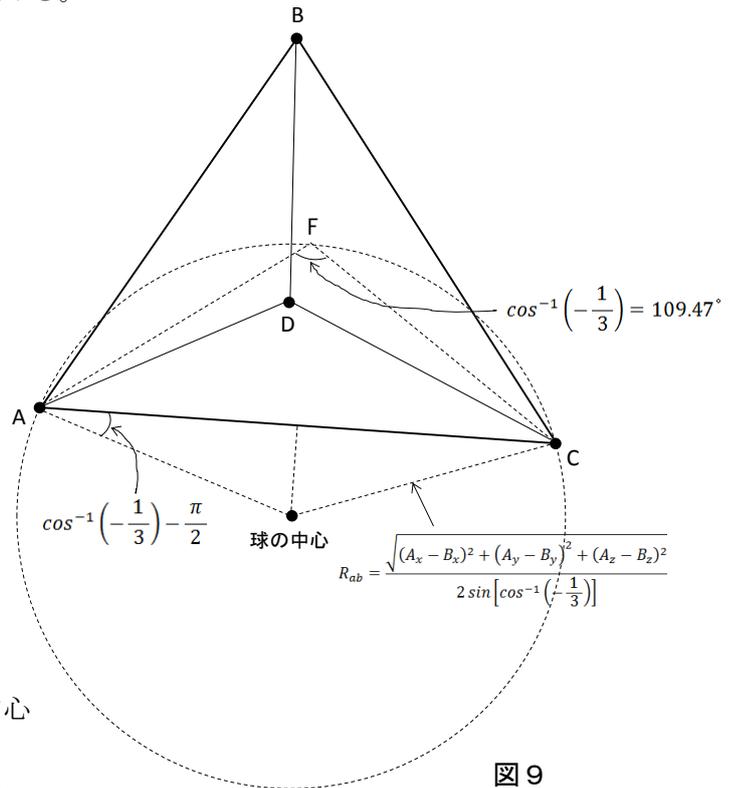


図 9

球の半径は、辺ACの $\frac{1}{2}$ を $\sin \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right]$ で割った $\frac{\sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 + (A_z - C_z)^2}}{2 \sin \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right]}$ である。

辺BDについても同じ条件で球を形成する。2つの球の交点だけでは求めるF点は決まらないので、もう1つ球が必要になる。

以下、点F(x,y,z)を求める計算式を掲げる。

4点A, B, C, Dの3次元座標をA(A_x,A_y,A_z), B(B_x,B_y,B_z), C(C_x,C_y,C_z), D(D_x,D_y,D_z) とすると、

◆ 1-① 辺ACに対する球の中心座標

$$\tan \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \sin \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

であるから、それで書き直すと、

X座標 (x_{ac})

$$\frac{A_x + C_x}{2} - \frac{\sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 + (A_z - C_z)^2}}{4\sqrt{2}} \cdot \cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{A_x - C_x}{A_y - C_y} \right) \right]$$

Y座標 (y_{ac})

$$\frac{A_y + C_y}{2} - \frac{\sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 + (A_z - C_z)^2}}{4\sqrt{2}} \cdot \sin \left[\tan^{-1} \left(-\frac{A_x - C_x}{A_y - C_y} \right) \right]$$

Z座標 (z_{ac}) = 0

◆ 1-② 球の半径

$$R_{ac} = \frac{\sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 + (A_z - C_z)^2}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

◆ 2-① 辺BDに対する球の中心座標

X座標 (x_{bd})

$$\frac{B_x + D_x}{2} - \frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2 + (B_z - D_z)^2}}{4\sqrt{2}} \cdot \sin \left[\tan^{-1} \left(-\frac{B_y - D_y}{B_x - D_x} \right) \right] \cdot \cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2}}{D_z} \right) \right]$$

Y座標 (y_{bd})

$$\frac{B_y + D_y}{2} - \frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2 + (B_z - D_z)^2}}{4\sqrt{2}} \cdot \cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{B_y - D_y}{B_x - D_x} \right) \right] \cdot \cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2}}{D_z} \right) \right]$$

Z座標 (z_{bd})

$$\frac{B_z + D_z}{2} - \frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2 + (B_z - D_z)^2}}{2} \cdot \tan \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$R_{bd} = \sin \left[\tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2}}{D_z} \right) \right]$$

◆ 2-② 球の半径

$$R_{bd} = \frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2 + (B_z - D_z)^2}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

以上の計算で得られた (x_{ac} , y_{ac} , z_{ac}), (x_{bd} , y_{bd} , z_{bd}), R_{ac} , R_{bd} , 及びもう1つの球(第3の球)の諸元を次式

$$(x - x_{ac})^2 + (y - y_{ac})^2 + (z - z_{ac})^2 = R_{ac}^2$$

$$(x - x_{bd})^2 + (y - y_{bd})^2 + (z - z_{bd})^2 = R_{bd}^2$$

$$(x - x_{xx})^2 + (y - y_{xx})^2 + (z - z_{xx})^2 = R_{xx}^2$$

に入れ、求められた点(x , y , z)がF点である。

上式でシミュレーションしたところ、得られる解は全て虚数解のみで、3つの球の式を同時に満たす実数解は存在しないことが判明した。

そこで、辺AB, AC, BCまたは、辺AD, BD, CDによって形成される3つの球の交点として求めたところ実数解が得られたので、どちらかの点がF(x,y,z)であると想定される。

前記、表1(a)に示した飛田 泰雅氏の例を用いて、具体的な数値を入れて計算した結果を記す。

	X	Y	Z
A	3	-1.9	0
B	0	2.8	0
C	-3	-1.5	0
D	-0.1	-0.3	3
X ₀	-0.093	-0.163	1.136

表 1 (a)

下記のとおり計算表を作成し、作成した式に基づき計算を行った

$$\frac{A_x + C_x}{2}$$

$$\frac{\sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 + (A_z - C_z)^2}}{2}$$

$$\tan \left[\cos^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{A_x - C_x}{A_y - C_y} \right) \right]$$

$$\cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2}}{D_z} \right) \right]$$

		①	②	③	④	⑤	①-②③④⑤
AB球	Xab	-1.5	2.6215	0.3536	0.8201		-2.2601
	Yab	0.65	2.6215	0.3536	-0.5722		1.1803
	Zab						0
	Rab						2.7806
AC球	Xac	0	3.0067	0.3536	0.0665		-0.0707
	Yac	-1.7	3.0067	0.3536	-0.9978		-2.7607
	Zac						0
	Rac						3.1890
BC球	Xbc	1.5	2.7879	0.3536	0.8429		2.3309
	Ybc	0.45	2.7879	0.3536	0.5380		0.9803
	Zbc						0
	Rbc						2.9570
AD球	Xad	-1.55	2.1708	0.3536	0.6910	-0.9240	-2.0400
	Yad	-0.9	2.1708	0.3536	0.6910	-0.3824	-1.1028
	Zad	1.5	2.1708	0.3536	-0.7229		2.0548
	Rad						2.3025
BD球	Xbd	-0.05	2.1575	0.3536	0.6952	-0.0322	-0.0671
	Ybd	1.25	2.1575	0.3536	0.6952	0.9995	1.7801
	Zbd	1.5	2.1575	0.3536	-0.7188		2.0483
	Bbd						2.2884
CD球	Xcd	1.45	2.3005	0.3536	0.6520	0.8886	1.9213
	Ycd	-1.1	2.3005	0.3536	0.6520	-0.4586	-1.3432
	Zcd	1.5	2.3005	0.3536	-0.7582		2.1167
	Rcd						2.4401

表 3

求められたAB球, AC球 -----, CD球の座標を以下の式に入れ、方程式を解いた。

$$\begin{array}{l}
 \text{AB, AC, BC} \\
 \text{球の計算式} \\
 \\
 \text{AD, BD, CD} \\
 \text{球の計算式}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 (x + 2.2601)^2 + (y - 1.1803)^2 + z^2 = 2.7806^2 \\
 (x + 0.0707)^2 + (y + 2.7607)^2 + z^2 = 3.1890^2 \\
 (x - 2.3309)^2 + (y - 0.9803)^2 + z^2 = 2.9570^2 \\
 \\
 (x + 2.0400)^2 + (y + 1.1028)^2 + (z - 2.0548)^2 = 2.3025^2 \\
 (x + 0.0671)^2 + (y - 1.7801)^2 + (z - 2.0483)^2 = 2.2884^2 \\
 (x - 1.9213)^2 + (y + 1.3432)^2 + (z - 2.1167)^2 = 2.4401^2
 \end{array} \right.$$

計算結果をまとめると表4、表5の通りである。

	飛田氏	AB,AC,BC球	AD,BD,CD球
AB	5.2431		
BC	5.5758		
CA	6.0133		
DA	4.3417		
DB	4.3151		
DC	4.6011		
AF	3.3951	3.5846	3.3573
BF	3.1747	3.0452	3.3285
CF	3.7250	3.9624	3.6390
DF	1.8691	1.6439	1.8528
角度AFB	105.84	104.23	103.30
角度DFC	105.84	102.26	109.47
角度BFC	107.56	104.68	106.23
角度DFA	107.56	106.25	109.47
角度CFA	115.17	105.54	118.47
角度DFB	115.17	131.58	109.46

表4

F 点	X座標	Y座標	Z座標	AF+BF+CF+DF
飛田氏の計算結果	-0.0933	-0.1631	1.1359	12.1639
AB,AC,BC球による計算結果	-0.1175	0.1013	1.4059	12.2362
AD,BD,CD球による計算結果	-0.0725	-0.3236	1.1475	12.1775

表5

飛田氏による AF+BF+CF+DF の数値 12.1639 は数学ソフト Mathematica で求めたものとされている。3つの球による私の計算結果は、AB, AC, BC球によるものが 12.2362、AD, BD, CD球によるものが 12.1775 となり、後者の結果が飛田氏の結果に非常に近く、誤差 0.1% の精度だった。

角度について、飛田氏の結果は対向する角度が一致しているのに対し、AB, AC, BC球による∠DFB は大きく異なり、AD, BD, CD球の場合、それぞれ少しずつ異なっているので、最短距離の点を求める一般式としては不完全なものと思われる。

その理由は、対向する2つの球だけでは空間内の交点が決まらないこと、正四面体以外の一般の四面体では、対向する角度は同じであっても、全てが 109.5° になるわけではないためと考えられる。

2次元におけるフェルマー点の証明は、幾何学的には容易にでき理解しやすいが、代数的、解析的に証明しようとするとなかなか複雑な計算になった。2次元の問題を3次元に拡張すると、難しさは格段に上がる。

今回、代数的、解析的なアプローチを行ったが、空間におけるF点を求める一般式を導くことはできなかった。幾何学的方法で画期的なものはないものだろうか？ (2024. 02. 15)