１４９「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１７）」

１９９９年 第１９回 日本数学オリンピック本選（第５問）

5. 全ての辺の長さが 1 である凸六角形 $ABCDEF$ に対し，

$$\max\{|AD|, |BE|, |CF|\}, \quad \min\{|AD|, |BE|, |CF|\}$$

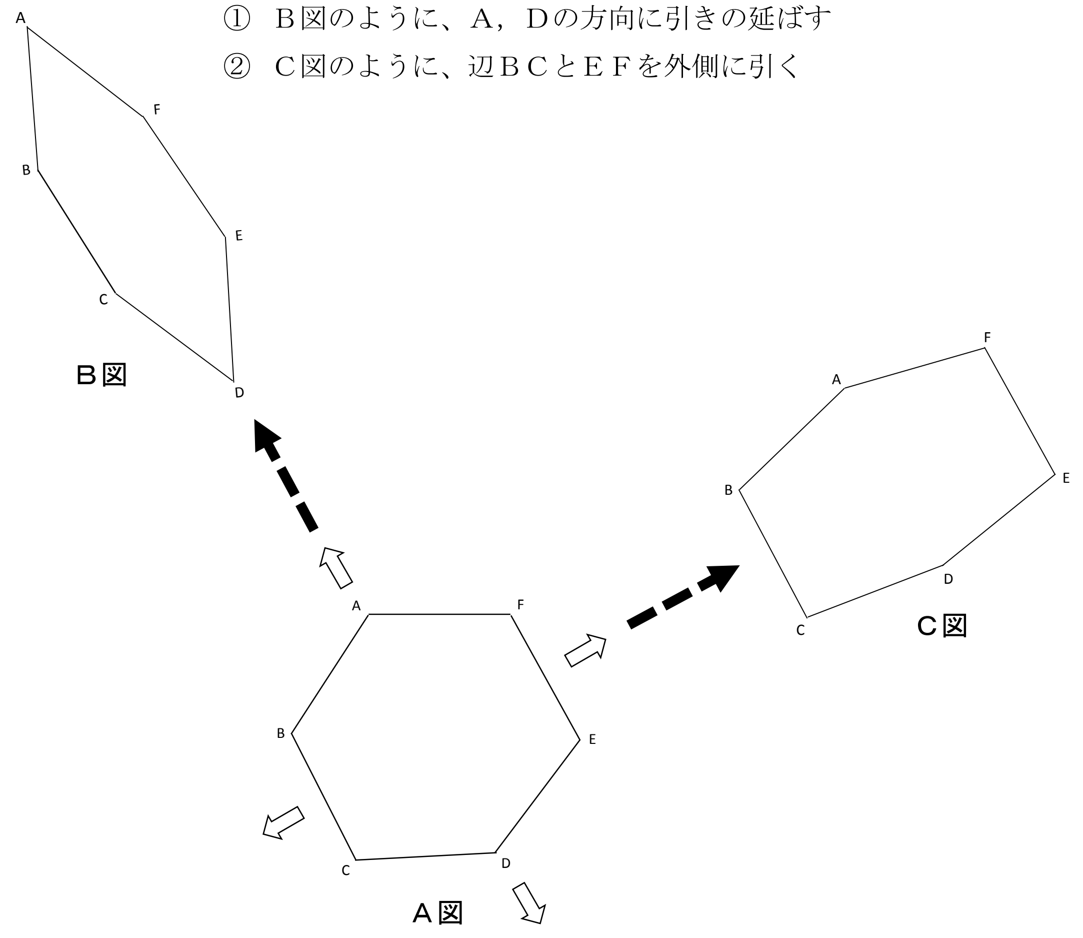
の取り得る範囲を求めよ．

$max\{|AD|,|BE|,|CF|\}$は、凸六角形の３組の対角線ＡＤ，ＢＥ，ＣＦの中で最大の長さ、$min\{|AD|,|BE|,|CF|\}$は最小の長さを指す。

全ての辺の長さが１である凸六角形の一般的な形は下図（A図）のとおりである。この六角形を変形していくとき、その仕方は２通りあり、

① Ｂ図のように、Ａ，Ｄの方向に引きの延ばす

② Ｃ図のように、辺ＢＣとＥＦを外側に引く



凸六角形を保ちながらＢ図のように変形していくと、最終的に辺ＡＢＣＤ及び辺ＡＦＥＤは限りなく直線に近づき、対角線ＡＤの長さは３に、対角線ＢＥ，ＣＦは１に近づく。

次にＣ図のように変形していくと、長辺２、短辺１の長方形に近づき、対角線ＡＤの長さは１に、対角線ＢＥ，ＣＦは$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ に近づく。

記号で表せば、$max\{|AD|,|BE|,|CF|\} = max\{|AD| < 3, |BE| > 1, |CF| > 1\}$ から < 3 、$min\{|AD|,|BE|,|CF|\} = min\{|AD| < 3, |BE| > 1, |CF| > 1\}$ から> 1 となる。

従って 取り得る範囲は、 $max\{|AD|,|BE|,|CF|\} < 3$ ，$min\{|AD|,|BE|,|CF|\} > 1$ である。

２０００年 第１０回 日本数学オリンピック本選（第３問）

問題　３．平面上に異なる 5点 A， B， C， P， Q があり,

どの3点も同一直線上にない. このとき,次の不等式を示せ. ここで XY は2点 X, Y 間の距離を示す.

AB+BC+CA+PQ < AP+AQ+BP+BQ+CP+CQ

３点Ａ，Ｂ，Ｃによって作られる⊿ＡＢＣと点Ｐ，Ｑの位置関係は３つのパターンに分けられる。

① 点Ｐ，Ｑが⊿ＡＢＣの外部にある
② 点Ｐ，Ｑのいずれかが⊿ＡＢＣの外部にある
③ 点Ｐ，Ｑが⊿ＡＢＣの内部にある

以下、各パターンごとにＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ＋ＰＱ＜ＰＡ＋ＱＡ＋ＰＢ＋ＱＢ＋ＰＣ＋ＱＣが成り立つことを証明する。

① 点Ｐ，Ｑが⊿ＡＢＣの外部にある場合

図１において、ＡＢ＜ＰＡ＋ＰＢ、ＢＣ＜ＢＱ＋ＣＱ
が成り立つ。（三角形の２辺の和は残りの１辺より大きい）
ＡＱとＰＣの交点をＸとすると、
ＣＡ＜ＡＸ＋ＣＸ、ＰＱ＜ＰＸ＋ＱＸである。
それぞれの不等式の両辺を加えると、
ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ＋ＰＱ＜ＰＡ＋ＰＢ＋ＢＱ＋ＣＱ
＋ＡＸ＋ＣＸ＋ＰＸ＋ＱＸとなる。ＡＸ＋ＱＸ＝ＡＱ，
ＰＸ＋ＣＸ＝ＣＰだから、それぞれ置きかえると、
ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ＋ＰＱ＜ＰＡ＋ＱＡ＋ＰＢ＋ＱＢ＋ＰＣ＋ＱＣ
となり証明された。

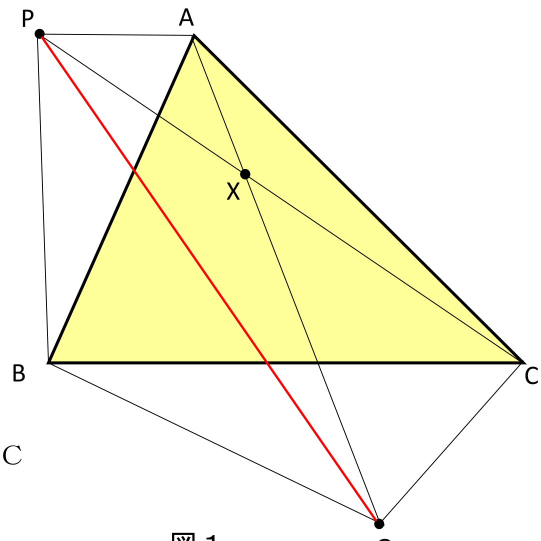


図１

図１に限らず、点Ｐ，Ｑが⊿ＡＢＣの外部にある場合、
以下のことが普遍的に言える。

⊿ＡＢＣの３辺のうち、１辺についてはＰ、もう１辺についてはＱを頂点とする三角形に着目して、「点Ｐの対辺＜他の２辺」（図１の場合は、ＡＢ＜ＡＰ＋ＢＰ，ＢＣ＜ＢＱ＋ＣＱ）が言える。
⊿ＡＢＣの３辺のうち、残りの１辺については、その辺の両端とＰ，Ｑを結ぶ線は必ず交わり、その交点をＸとすると、Ｘを頂点とする三角形が２つできる。それぞれの三角形に対し「点Ｘの対辺＜他の２辺」（図１の場合は、ＣＡ＜ＡＸ＋ＣＸ，ＰＱ＜ＰＸ＋ＱＸ）となることが、⊿ＡＢＣの外部にあるすべ

ての点Ｐ，Ｑに対して成り立つ。

② 点Ｐ，Ｑのいずれかが⊿ＡＢＣの外部にある場合

⊿ＡＢＣの外部にある点をＱとする。

図２において、ＢＣ＜ＢＱ＋ＣＱ、ＣＡ＜ＡＰ＋ＣＰが成り立つ。
ＡＱ，ＢＰの交点をＸとすると、ＡＢ＜ＡＸ＋ＢＸ、
ＰＱ＜ＰＸ＋ＱＸとなる。それぞれの不等式の両辺を加えると、
ＢＣ＋ＣＡ＋ＡＢ＋ＰＱ＜ＢＱ＋ＣＱ＋ＡＰ＋ＣＰ＋ＡＸ
＋ＢＸ＋ＰＸ＋ＱＸ、ＡＸ＋ＱＸ＝ＡＱ，ＢＸ＋ＰＸ＝ＢＰ
だからそれぞれ置きかえると、
ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ＋ＰＱ＜ＰＡ＋ＱＡ＋ＰＢ＋ＱＢ＋ＰＣ＋ＱＣ
が成り立つ。

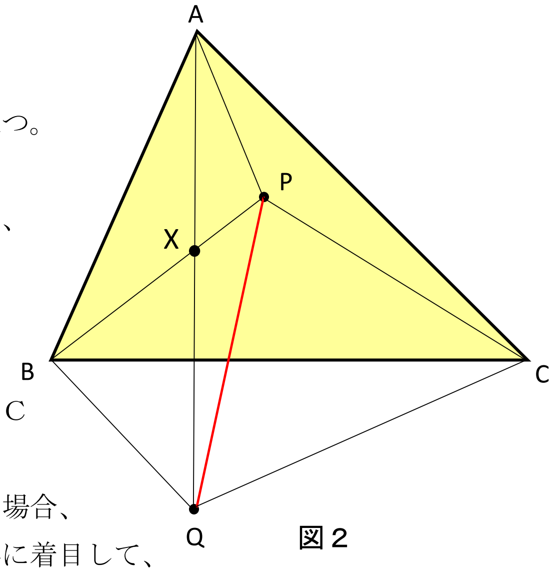


図２

図２に限らず、点Ｐ，Ｑのいずれかが⊿ＡＢＣの外部にある場合、
⊿ＡＢＣの３辺のうち、２辺についてはＰを頂点とする三角形に着目して、
「点Ｐの対辺＜他の２辺」(図２の場合は、ＣＡ＜ＡＰ＋ＣＰ，ＢＣ＜ＢＰ＋ＣＰ）が言える。
⊿ＡＢＣの３辺のうち、残りの１辺については、その辺の両端とＰ，Ｑを結ぶ線は必ず交わり、その点をＸとすると、Ｘを頂点とする三角形が２つできる。それぞれの三角形に対し「点Ｘの対辺＜他の２辺」（図２の場合、ＡＢ＜ＡＸ＋ＢＸ、ＰＱ＜ＰＸ＋ＱＸ）となることが、すべての⊿ＡＢＣの内部の点Ｐ、外部の点Ｑに対して成り立つ。

③ 点Ｐ，Ｑが⊿ＡＢＣの内部にある場合

① ②と同様である。

図３において、ＢＣ＜ＢＱ＋ＣＱ、ＣＡ＜ＡＰ＋ＣＰである。
ＡＱ，ＢＰの交点をＸとすると、ＡＢ＜ＡＸ＋ＢＸ、
ＰＱ＜ＰＸ＋ＱＸである。それぞれの不等式の両辺を加えると、
ＢＣ＋ＣＡ＋ＡＢ＋ＰＱ＜ＢＱ＋ＣＱ＋ＡＰ＋ＣＰ＋ＡＸ
＋ＢＸ＋ＰＸ＋ＱＸ、ＡＸ＋ＱＸ＝ＡＱ，ＢＸ＋ＰＸ＝ＢＰ
だからそれぞれ置きかえると、
ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ＋ＰＱ＜ＰＡ＋ＱＡ＋ＰＢ＋ＱＢ＋ＰＣ
＋ＱＣが成り立つ。

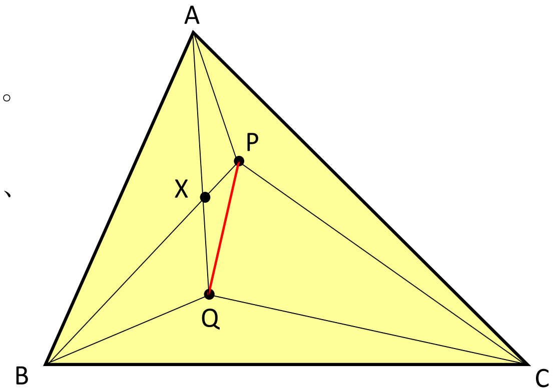


図３

図３に限らず、点Ｐ，Ｑが⊿ＡＢＣの内部にある場合
⊿ＡＢＣの３辺のうち、２辺についてはＰまたはＱを頂点とする三角形に着目して、「点Ｐ，Ｑの対辺＜他の２辺」が言える。（図３の場合は、ＣＡ＜ＡＰ＋ＣＰ，ＢＣ＜ＢＱ＋ＣＱ）残りの１辺については、その辺の両端とＰ，Ｑを結ぶ線は必ず交わり、その点をＸとすると、Ｘを頂点とする三角形２つできる。それぞれの三角形に対し「点Ｘの対辺＜他の２辺」（図３の場合、ＡＢ＜ＡＸ＋ＢＸ、ＰＱ＜ＰＸ＋ＱＸ）となることが、すべての⊿ＡＢＣの内部の点Ｐ，Ｑに対して成り立つ。

以上より、ＡＢ＋ＢＣ＋ＣＡ＋ＰＱ＜ＰＡ＋ＱＡ＋ＰＢ＋ＱＢ＋ＰＣ＋ＱＣが証明された。

２００２年 第１２回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. 円 C_0 の周上に相異なる 3 点 A, M, B があり, $AM=MB$ が成り立っている. 直線 AB に関して M と反対側の弧 AB 上に, 点 P をとる. 円 C_0 に点 P で内接し, 弦 AB に接する円を C_1 とし, C_1 と弦 AB との接点を Q とする. このとき

点 P のとり方によらず, MP と MQ の積 $MP \cdot MQ$ が一定である

ことを示せ. ただし, 2 点 X, Y に対し, 線分 XY の長さを XY で表すものとする.

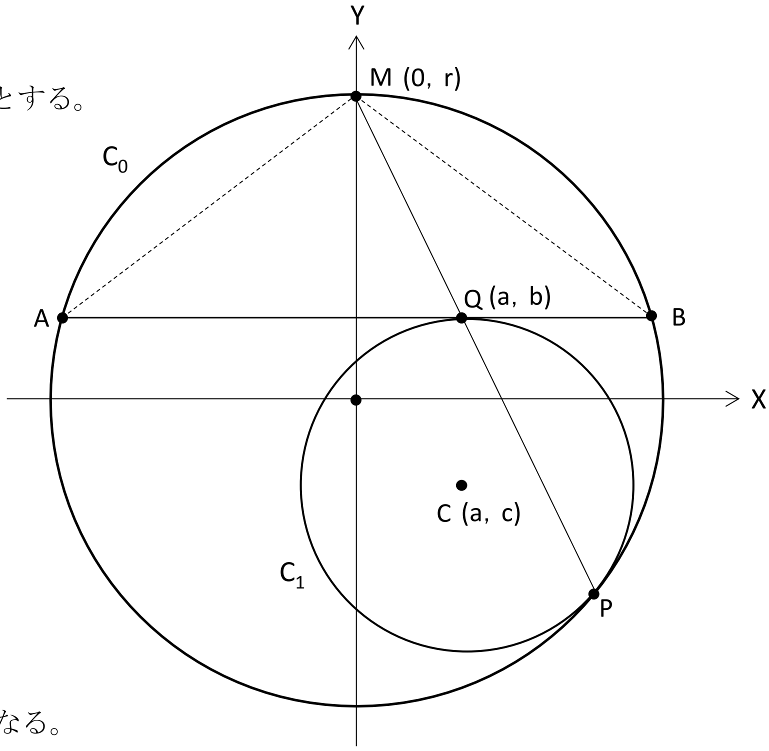


図１

図１に示すように、X－Y座標を設定し、C_0の半径をr、中心を原点、C_1の中心をCとする。それぞれ座標を$M(0,\ r)$，$Q(a,\ b)$，$C(a,\ c)$とすると、

C_0の方程式は、

$x^2+y^2=r^2$ ………… ①

C_1の方程式は、

$(x-a)^2+(y-c)^2=(b-c)^2$ ……… ②

C_0，C_1は点Ｐで接するので、

① ②を連立させた時の解は重根となり、判別式は０でなければならない。

その条件により、①②からcが導かれる。

$$c=-\frac{(r-b)^2+a^2}{2(r-b)}$$

これからＰの座標を求めると次のとおりとなる。

$$P\left[\frac{2a(r-b)}{(r-b)^2+a^2}r,\ \ -\frac{(r-b)^2-a^2}{(r-b)^2+a^2}r\right]$$

直線MQの方程式、$y=\dfrac{b-r}{a}x+r$ にＰの座標を入れると、

$y=\dfrac{b-r}{a}x+r=\dfrac{b-r}{a}\cdot\dfrac{2a(r-b)}{(r-b)^2+a^2}r+r=-\dfrac{(r-b)^2-a^2}{(r-b)^2+a^2}r$ より、点MQPは同一直線上にある。

以上より、MQの長さ$=\sqrt{a^2+(r-b)^2}$

$$\text{MPの長さ}=\sqrt{\left[\frac{2a(r-b)}{(r-b)^2+a^2}r\right]^2+\left[r+\frac{(r-b)^2-a^2}{(r-b)^2+a^2}r\right]^2}=\frac{2r(r-b)\sqrt{a^2+(r-b)^2}}{(r-b)^2+a^2}$$

MP×MQを作ると、

$$\text{MP}\cdot\text{MQ}=\sqrt{a^2+(r-b)^2}\cdot\frac{2r(r-b)\sqrt{a^2+(r-b)^2}}{(r-b)^2+a^2}=2r(r-b)$$

以上の計算により、ＭＰ·ＭＱ$=2r(r-b)$となり、ＭＰとＭＱの積は円C_0の大きさと点ＡＢの位置のみで決まり、円C_1の位置や大きさに関係なく一定である。（証明終わり）

２００４年 第１４回 日本数学オリンピック本選（第３問）

3. 空間内に互いに直交する２平面 π_1, π_2 がある．A, B を π_1, π_2 の交線上の相異なる２点とし，C を π_2 上にあるが π_1 上にはない点とする．P を $\angle BCA$ の二等分線と AB との交点とし，S を AB を直径とする π_1 上の円周とする．

このとき，CP を含む任意の平面 π_3 に対し，π_3 と S の交点を D, E とすると，CP は $\angle DCE$ の二等分線であることを示せ．

問題を図にすると図１のとおりである。

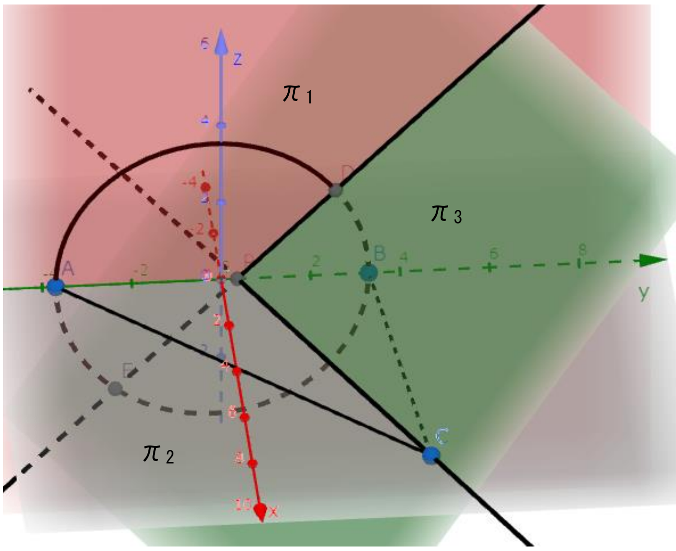


図１

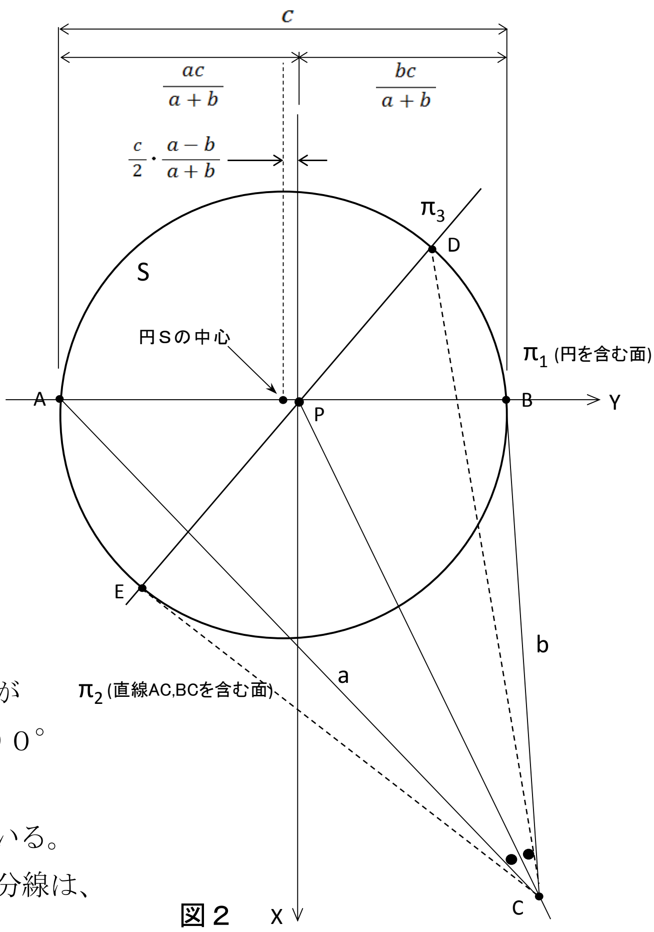


図２

図２は変形した３次元平面で、Ｙ軸を中心に上半分がＹ−Ｚ平面、下半分がＸ−Ｙ平面を表し、Ｘ−Ｙ平面を９０°手前側に倒した状態を示している。

平面π_1はＹ−Ｚ平面、平面π_2はＸ−Ｙ平面に一致している。

図３に示すとおり、⊿ＡＢＣにおいて頂角Ａの二等分線は、底辺ＢＣをＡＢ：ＡＣの比（$a:b$）で分割する。

底辺の長さをcとすると、$BD=\dfrac{ac}{a+b}$，$CD=\dfrac{bc}{a+b}$ である。

これを利用して図２において、$AC=a$，$BC=b$， $AB=c$とすると、

$AP=\dfrac{ac}{a+b}$，$BP=\dfrac{bc}{a+b}$ と表せる。

$\angle ACB$ の二等分線とABの交点 Pを座標の原点とすると、

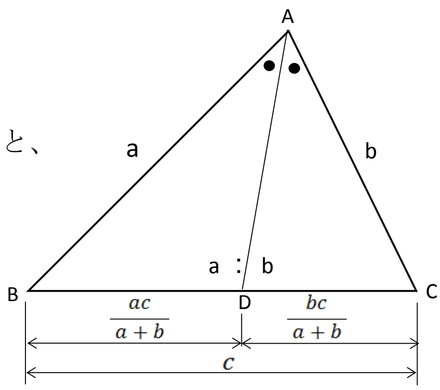


図３

円Ｓの中心はPから$\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{a-b}{a+b}$の位置にある。

ＣＰを含む任意の平面π_3のπ_2に対する角度をθとすると、勾配は$tan\,\theta$であり、$tan\,\theta = m$と置く。CPが$\angle DCE$の二等分線であることを証明するためには、図３の性質を用いて、$CD{:}CE = DP{:}EP$であることをいえば良い。

点Ｄ，Ｅは、$\left(y+\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2 + z^2 = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$，$z = my$を解くことで求められる。

$z = my$を入れて、$\left(y+\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2 + m^2y^2 = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$　これを整理すると

$(1+m^2)y^2 + c\cdot\dfrac{a-b}{a+b}y - \left(\dfrac{c}{2}\right)^2\cdot\dfrac{4ab}{(a+b)^2} = 0$ これを解いて、$\mathrm{y} = \dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{-(a-b)\pm\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)}$

以下、計算を簡略化するため、

$y = \dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{-(a-b)+\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)} \to y^+$，$y = \dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{-(a-b)-\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)} \to y^-$と置く。

点Ｃの座標は、点Ａ，Ｂを中心とする半径a，bの円の交点として求められるので、

$x^2 + \left(y+\dfrac{ac}{a+b}\right)^2 = a^2$，$x^2 + \left(y-\dfrac{bc}{a+b}\right)^2 = b^2$を解いて、

$x = \dfrac{\sqrt{-(a^2-b^2)^2+c^2(2a^2+2b^2-c^2)}}{2c}$，$y = \dfrac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2c(a+b)}$

以上より、Ｄ，Ｅ，Ｐ，Ｃの座標をまとめると下表のとおりとなる。

	Ｘ座標	Ｙ座標	Ｚ座標
Ｄ	0	y^+	my^+
Ｅ	0	y^-	my^-
Ｐ	0	0	0
Ｃ	$-\dfrac{\sqrt{-(a^2-b^2)^2+c^2(2a^2+2b^2-c^2)}}{2c}$	$\dfrac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2c(a+b)}$	0

これからＤＰ，ＥＰ，ＣＤ，ＣＥを計算する。

$DP = \sqrt{(0-0)^2+(y^+-0)^2+(my^+-0)^2} = \sqrt{1+m^2}\,y^+$

$EP = \sqrt{(0-0)^2+(y^--0)^2+(my^--0)^2} = \sqrt{1+m^2}\,y^-$

$$CD = \sqrt{\left[0-\left(-\frac{\sqrt{-(a^2-b^2)^2+c^2(2a^2+2b^2-c^2)}}{2c}\right)\right]^2 + \left(y^+ - \frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2c(a+b)}\right)^2 + (my^+-0)^2}$$

$$= \sqrt{(1+m^2)(y^+)^2 - \frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{c(a+b)}y^+ + \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$CE=\sqrt{\left[0-\left(-\frac{\sqrt{-(a^2-b^2)^2+c^2(2a^2+2b^2-c^2)}}{2c}\right)\right]^2+\left(y^- -\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2c(a+b)}\right)^2+(my^- -0)^2}$$

$$=\sqrt{(1+m^2)(y^-)^2-\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{c(a+b)}y^- +\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$CD:CE=DP:EP$より、$CD\cdot EP=DP\cdot \mathrm{CE}$ である。CD，EP，DP，$\mathrm{CE}>0$ であるから、

$\left(CD\cdot EP\right)^2=\left(DP\cdot \mathrm{CE}\right)^2$ ………… ③ としてよい。

①②において、$\dfrac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{c(a+b)}=A$，$\dfrac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}=B$ と置き③に入れると、

$$[(1+m^2)(y^+)^2-Ay^+ +\mathrm{B}]\cdot(1+m^2)(y^-)^2=[(1+m^2)(y^-)^2-Ay^- +\mathrm{B}]\cdot(1+m^2)(y^+)^2$$

両辺を $(1+m^2)\neq 0$ で割って整理して、

$$(1+m^2)\left(y^+\cdot y^-\right)^2-Ay^+(y^-)^2+B(y^-)^2=(1+m^2)\left(y^+\cdot y^-\right)^2-Ay^-(y^+)^2+B(y^+)^2$$

両辺から$(1+m^2)\left(y^+\cdot y^-\right)^2$ を引き、右辺を左辺に移行してその計算結果が 0 になればよい。

$$-Ay^+(y^-)^2+B(y^-)^2=-Ay^-(y^+)^2+B(y^+)^2$$

$$Ay^-(y^+)^2-B(y^+)^2-Ay^+(y^-)^2+B(y^-)^2=A\left(y^+\cdot y^-\right)(y^+-y^-)-B(y^++y^-)(y^+-y^-)$$

$$=(y^+-y^-)\left[A\left(y^+\cdot y^-\right)-B(y^++y^-)\right]$$

$$y^+\cdot y^-=\left[\frac{c}{2}\cdot\frac{-(a-b)+\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)}\right]\cdot\left[\frac{c}{2}\cdot\frac{-(a-b)-\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)}\right]=-\frac{abc^2}{(a+b)^2(1+m^2)}$$

$$y^++y^-=\frac{c}{2}\cdot\frac{-(a-b)+\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)}+\frac{c}{2}\cdot\frac{-(a-b)-\sqrt{(a+b)^2+4abm^2}}{(a+b)(1+m^2)}=-\frac{c(a-b)}{(a+b)(1+m^2)}$$

であるから、Ａ，Ｂを戻して、

$$(y^+-y^-)\left[A\left(y^+\cdot y^-\right)-B(y^++y^-)\right]=$$

$$(y^+-y^-)\cdot\left[\left\{\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{c(a+b)}\right\}\cdot\left\{-\frac{abc^2}{(a+b)^2(1+m^2)}\right\}-\left\{\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}\right\}\left\{-\frac{c(a-b)}{(a+b)(1+m^2)}\right\}\right]$$

$$=(y^+-y^-)\cdot\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^3(1+m^2)}[-abc(a-b)+abc(a-b)]=0$$

よってＣＰは、ＣＰを含む任意の平面π_3と円Ｓとの交点Ｄ，ＥがＰに対してなす角（∠ＤＣＥ）の二等分線であることが証明された。

「２００４年本選第３問」については、幾何学的な方法で解ければ良かったができなかった。仕方なく、座標を使い力づくで解くことになった。一般解として解いたので、複雑な計算になったが、この方法だと途中で計算を間違わなければ必ず証明できる。

解き終わってから幾何学的にはどう解くのか、模範解答を見て驚いた。解答はたった５行で終了していた。角の二等分の問題なので、図３の性質に固執してしまい、このような証明になった。

以下、模範解答を示す。（２０２４．０３．０９）

模範解答

【3】 C と S を含む球面 Σ と直線 CP の交点のうち C でないほうを Q とおく．π_2 による Σ の切り口に着目し，円周角の定理より $\mathrm{QA} = \mathrm{QB}$．しかも π_1 と π_2 は直交し AB は S の直径なので，Q は S の中心を通り π_1 に垂直な直線上にある．よって $\mathrm{QD} = \mathrm{QE}$ だから，π_3 による Σ の切り口に着目して円周角の定理より $\angle\mathrm{DCQ} = \angle\mathrm{ECQ}$．

Ａ，Ｂ，Ｃの座標をそれぞれ（０,－３，０)、（０，３，０）（４，７，０）として図を描くと図４のようになる。

点Ｃと円Ｓを含む球面Σを考えることがこの解答のポイントである。

この球面を式で表すと $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ となり、Ｘ軸との交点は（－１，０，０)、また∠ＡＣＢの二等分線

ＣＰの式は $y = \frac{1}{2}(x+1)$ と表され、Ｙ軸との交点は $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

Ｘ軸との交点は（－１，０，０）であり、Ｘ軸と球面との交点に一致する。（Ａ，Ｂ，Ｃの座標に関係なく成り立つ）

Ａ，Ｑ，Ｂは球面Σ上の点で、かつ同一平面にあるので、円周角の定理より、∠ＡＣＱ＝∠ＢＣＱからＱＡ＝ＱＢである。

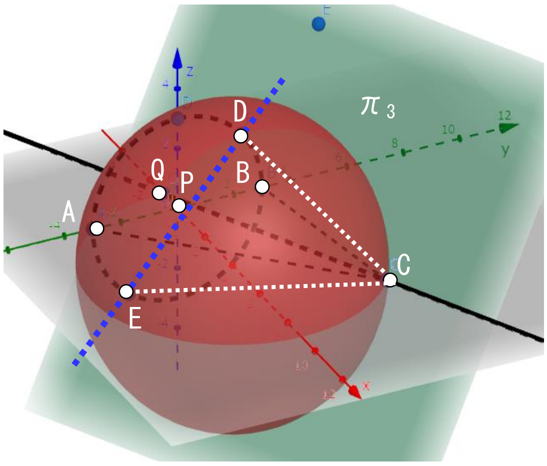


図４

次に、ＣＰを含む任意の平面 π_3 はＱを通り、Ｓと π_3 の交点Ｄ，Ｅは同時に球面上にあるので、円周角の定理が適用でき、∠ＤＣＱ＝∠ＥＣＱが成り立つ。（証明終わり）