１５０「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１８）」

２００５年 第１５回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. 円 Γ 上の２点 A, B に対し，A での接線と B での接線は点 X で交わり，Γ 上の２点 C, D に対し，C, D, X はこの順に一直線上にあるとする．直線 CA と直線 BD が点 F で直交する時，CD と AB の交点を G とし，GX の垂直二等分線と BD の交点を H とする．このとき，4 点 X, F, G, H は同一円周上にあることを示せ．

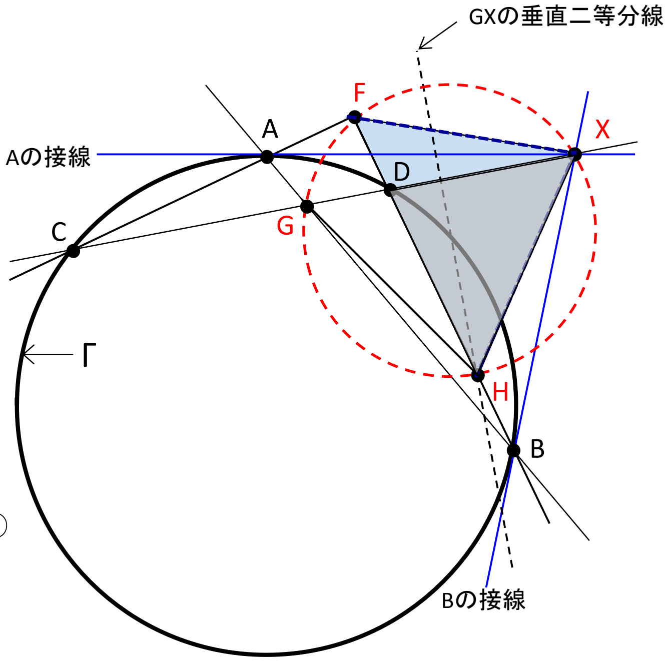

図１

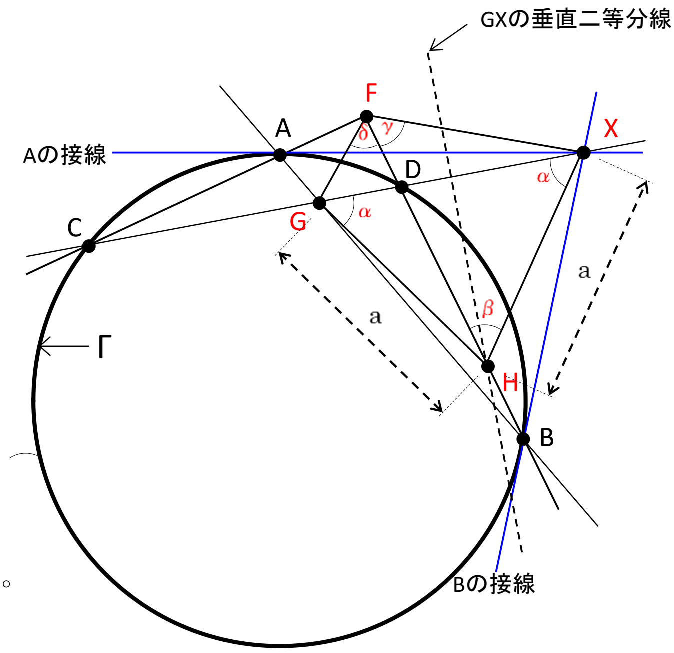

図２

　題意を満たす図を作図するだけでも結構難しい。
正確に描くと図１のようになり、４点Ｘ，Ｆ，Ｇ，Ｈ
は確かに同一円周上に並ぶ。
　４点が円周上にあることを証明するには、
円周角が等しいことを言えばよい。
　図１において、ＦＸとＨＸを結ぶと、
Ｈは直線ＧＸの垂直二等分線上の点だから
∠ＨＧＸ＝∠ＨＸＧ　‥‥‥‥‥‥‥ ①　である。
⊿ＦＨＸと⊿ＤＨＸに着目すると、
⊿ＦＨＸにおいて、
∠ＦＸＨ＋∠ＨＦＸ＋∠ＦＨＸ＝１８０°‥‥‥‥‥ ②
⊿ＤＨＸにおいて、
∠ＤＸＨ＋∠ＨＤＸ＋∠ＸＨＤ＝１８０°
∠ＨＤＸ＝∠ＤＸＦ＋∠ＤＦＸだから、
∠ＤＸＨ＋∠ＤＸＦ＋∠ＤＦＸ＋∠ＸＨＤ＝１８０°
∠ＤＸＨ＋∠ＤＸＦ＝∠ＦＸＨだから、
∠ＦＸＨ＋∠ＤＦＸ＋∠ＸＨＤ＝１８０°
∠ＤＦＸ→∠ＨＦＸ、∠ＸＨＤ→∠ＦＨＸだから、
∠ＦＸＨ＋∠ＨＦＸ＋∠ＦＨＸ＝１８０°‥‥‥‥ ③
となり、②③は一致する。
　従って∠ＨＦＸ＝∠ＤＸＨである。
①　より、∠ＨＧＸ＝∠ＨＸＧだから、
∠ＨＧＸ＝∠ＨＦＸとなり、辺ＨＸを共通とする
円周角が等しいので、４点Ｘ，Ｆ，Ｇ，Ｈは
同一円周上にあることが証明された。

（別解）ＦＨが∠ＧＦＸの二等分線であることを導く。
　図２において、ＨＧ＝ＨＸ＝a,

∠ＨＧＸ＝∠ＨＸＧ＝α，∠ＤＨＸ＝β，
∠ＤＦＸ＝γ，∠ＤＦＧ＝δとおく。

⊿ＦＨＸに正弦定理を適用して、$\dfrac{FX}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin\gamma}$ より、$FX=\dfrac{a\sin\beta}{\sin\gamma}$　…………………… ④

⊿ＦＨＧに正弦定理を適用して、$\dfrac{FG}{\sin[\pi-(2\alpha+\beta)]}=\dfrac{a}{\sin\delta}$ より、$FG=\dfrac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\delta}$　……… ⑤

⊿ＤＨＸに正弦定理を適用して、$\dfrac{DX}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]}$ より、$DX=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$　………… ⑥

⊿ＤＨＧに正弦定理を適用して、$\dfrac{DG}{\sin[\pi-(2\alpha+\beta)]}=\dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$ より、$DG=\dfrac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$　… ⑦

前問「２００４年 第３問」で示したように、三角形の頂角の二等分線は図３のとおり、底辺を挟辺の比 $a:b$ で分割する。

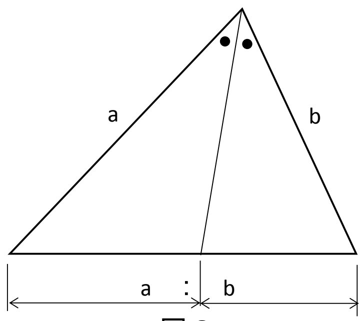

図３

これを適用すると、④～⑦より、

$$\frac{FG}{FX}:\frac{DG}{DX}=\frac{\dfrac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\delta}}{\dfrac{a\sin\beta}{\sin\gamma}}:\frac{\dfrac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}{\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$=\frac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\gamma}{a\sin\beta}:\frac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{a\sin\beta}$$

$=\dfrac{\sin\gamma\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\delta}:\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$，それぞれを $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ で割っても比は変わらないので、

$\dfrac{FG}{FX}:\dfrac{DG}{DX}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}:1$、よって $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}=1$、$\gamma<\pi$，$\delta<\pi$ より、$\gamma=\delta$ である。

従って、∠ＧＦＨ＝∠ＸＦＨとなり、ＧＨ＝ＸＨから、同じ長さの円弧によって形成される円周角が等しいので、４点Ｘ，Ｆ，Ｇ，Ｈは同一円周上にある。（証明終わり）

２００６年 第１６回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. 円 O の周上に相異なる 5 点 A, M, B, C, D がこの順に並んでおり，線分 MA と MB の長さが等しいとする．直線 AC と MD，直線 BD と MC の交点をそれぞれ P, Q とし，直線 PQ と円 O の周との 2 交点をそれぞれ X, Y とするとき，線分 MX と MY の長さが等しいことを示せ．

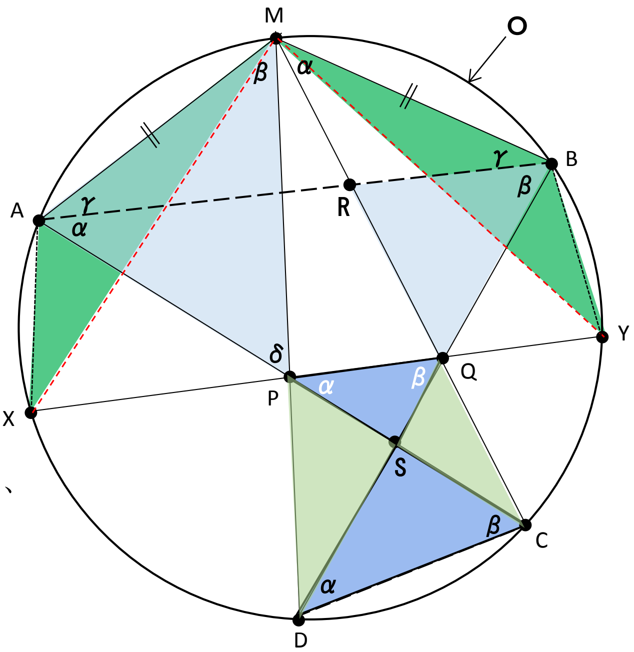

図１

問題を図にすると図１のとおりである。
図１において、ＡＢ，ＣＤを結び、直線ＡＢとMＣの交点をＲ、ＰＣ，ＱＤの交点をＳ、∠ＢＭＣ＝α，∠ＡＭＤ＝β，∠ＭＡＢ＝∠ＭＢＡ＝γ，∠ＡＰＭ＝δとする。円周角の定理より、∠ＢＡＣ＝∠ＢＤＣ＝α、∠ＡＢＤ＝∠ＡＣＤ＝βである。　⊿AMＰと⊿ＢＱＲにおいて、∠ＡＭＰ＝∠ＲＢＱ＝β、∠ＭＡＰ＝α＋γ
∠ＢＲＱ＝∠ＢＭＲ＋∠ＭＢＲ＝α+γ
（三角形MＢＲにおける∠ＢＲMの外角）であるから、⊿AMＰと⊿ＢＱＲは相似である。
よって、∠ＢＱＲ＝∠ＡＰＭ＝δとなり、∠ＤＰＳ＝∠ＣＱＳ＝δから、⊿ＤＰＳと⊿ＣＱＳは相似である。従って、$\dfrac{PS}{QS}=\dfrac{DS}{CS}$ が成り立つ。
この関係を⊿ＣＤＳ，⊿ＰＱＳに適用すると、
$\dfrac{PS}{DS}=\dfrac{QS}{CS}$ がいえるので、⊿ＣＤＳと⊿ＰＱＳは相似である。よって、∠ＳＰＱ＝∠ＳＤＣ＝α、∠ＰＱＳ＝∠ＳＣＤ＝βである。
以上より、ＡＢとＰＱ（ＸＹ）は平行である。従って、ＡＸ＝ＢＹ，∠AMX＝∠BMYから、⊿AMX≡⊿BMYである。よって、MX＝MYが証明された。図２はA, M, B, C, Aの位置を変えて作図したものであり、当然であるが、図１と同様、⊿AMP∽⊿BQR、⊿ＤＰＳ∽⊿ＣＱＳ、⊿ＣＤＳ∽⊿ＰＱＳ、⊿AMX≡⊿BMYが確認できる。

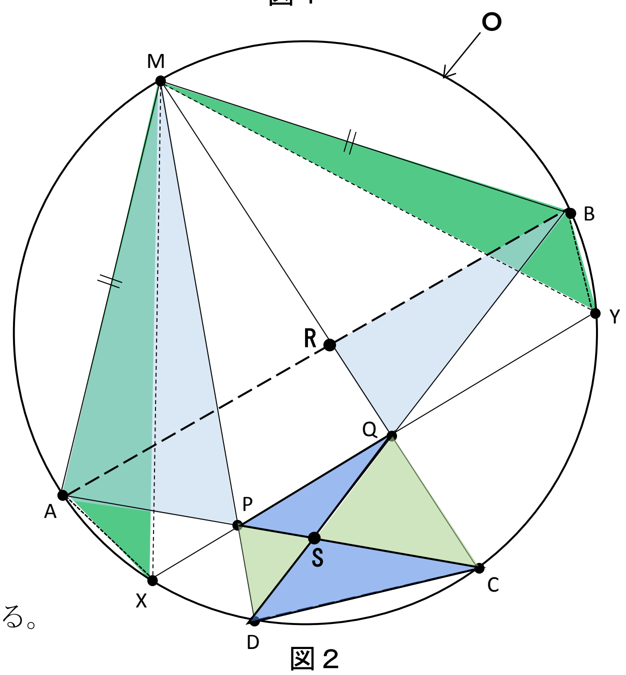

図２

「博想録１４８～１５０」では、本選幾何学問題のうち、解くことができなかった問題の再挑戦を書いてきたが以上で終了する。（２０２４．０５．２０）