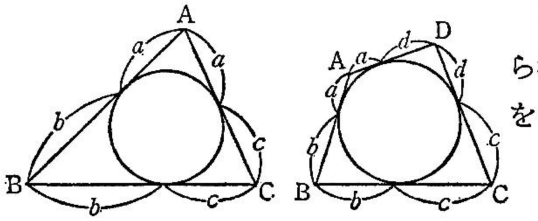
１５１「江戸時代の数学者が考えていた問題　追補」

博想録「８７ 江戸時代の数学者が考えていた問題－１」
「８８ 江戸時代の数学者が考えていた問題－２」の補足を記す。

会田安明の貫通術

編者は偶然に姫路市の古本屋から会田安明の算法貫通術巻之三なる写本を１冊手に入れた．それを読んでみると実に面白い．それは三角形に関する一性質を 4, 5, 6, … と多角形の場合に拡張していくものである．その後，平山諦著の「和算史上の人々」（富士短大）を読むに及んで，この貫通術は非常に大部のもので（刊行されたものではない）次のような問題から始まっていることがわかった．



問題 1. 円に外接する n 角形において，頂点から接点までの距離を $a, b, c, d, \cdots$ とし，内円の半径を r とすると

$n=3$ のとき $(a+b+c)r^2-abc=0$

$n=4$ のとき $(a+b+c+d)r^2-(bcd+acd+abd+abc)=0$

$n=5$ のとき $(\sum a)r^4-(\sum abc)r^2+abcde=0$

（上記編者は、岐阜大学学芸学部［当時］岩田至康氏）

博想録８７において、この問題に対し３角形から９角形まで計算しそこから一般形を導いた。多角形の内接円と辺の関係が非常に均整のとれた式で表されていたことに惹かれたためである。

この問題は、三角関数の公式 $tan(\alpha+\beta)=\dfrac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}$ を用いて解くことができる。

$n=3$ のとき、三角形の３つの角をα，β，γとすると、$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ だから、$tan(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{tan\,\alpha+tan(\beta+\gamma)}{1-tan\,\alpha\,tan(\beta+\gamma)}=\dfrac{tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}}{1-tan\,\alpha\cdot\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}}=0$ より、$tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}=0$

内接三角形の半径をrとすると、$tan\,\alpha=\dfrac{a}{r}$，$tan\,\beta=\dfrac{b}{r}$，$tan\,\gamma=\dfrac{c}{r}$だから、これを上式に入れると

$tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}=\dfrac{a}{r}+\dfrac{\dfrac{b}{r}+\dfrac{c}{r}}{1-\dfrac{b}{r}\cdot\dfrac{c}{r}}=\dfrac{(a+b+c)-\dfrac{abc}{r^2}}{r-\dfrac{bc}{r}}=0$ より、$\underline{\underline{(a+b+c)r^2-abc=0}}$

同様に $n=4$ のとき、四角形の４つの角をα，β，γ，δとすると、$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ だから、$tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$

$$tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\frac{tan(\alpha+\beta)+tan(\gamma+\delta)}{1-tan(\alpha+\beta)\,tan(\gamma+\delta)}=\frac{\dfrac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}+\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}}{1-\dfrac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}\cdot\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}}=0$$ より、

$\dfrac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}+\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}=0$ 、 $tan\,\alpha=\dfrac{a}{r}$， $tan\,\beta=\dfrac{b}{r}$， $tan\,\gamma=\dfrac{c}{r}$， $tan\,\delta=\dfrac{d}{r}$ を入れると

$\dfrac{\dfrac{a}{r}+\dfrac{b}{r}}{1-\dfrac{a}{r}\cdot\dfrac{b}{r}}+\dfrac{\dfrac{c}{r}+\dfrac{d}{r}}{1-\dfrac{c}{r}\cdot\dfrac{d}{r}}=0$ 、 $\dfrac{(a+b+c+d)r^3-[ab(c+d)+cd(a+b)]r}{(r^2-ab)(r^2-cd)}=0$

$\underline{\underline{(a+b+c+d)r^2-(abc+abd+acd+bcd)=0}}$

同様に $n=5$ のとき、五角形の５つの角をα，β，γ，δ，εとすると、$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=3\pi$ だから、
$tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=0$

$$tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=\frac{tan(\alpha+\beta+\gamma)+tan(\delta+\varepsilon)}{1-tan(\alpha+\beta+\gamma)\,tan(\delta+\varepsilon)}=\frac{\dfrac{tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}}{1-tan\,\alpha\cdot\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}}+\dfrac{tan\,\delta+tan\,\varepsilon}{1-tan\,\delta\,tan\,\epsilon}}{1-\dfrac{tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}}{1-tan\,\alpha\cdot\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}}\cdot\dfrac{tan\,\delta+tan\,\varepsilon}{1-tan\,\delta\,tan\,\epsilon}}$$

以上から、$\dfrac{\left(tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}\right)(1-tan\,\delta\,tan\,\epsilon)+\left(1-tan\,\alpha\cdot\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}\right)(tan\,\delta+tan\,\varepsilon)}{\left(1-tan\,\alpha\cdot\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}\right)(1-tan\,\delta\,tan\,\epsilon)}=0$

さらに分母$=0$ より、

$\left(tan\,\alpha+\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}\right)(1-tan\,\delta\,tan\,\epsilon)+\left(1-tan\,\alpha\cdot\dfrac{tan\,\beta+tan\,\gamma}{1-tan\,\beta\,tan\,\gamma}\right)(tan\,\delta+tan\,\varepsilon)$

$tan\,\alpha=\dfrac{a}{r}$， $tan\,\beta=\dfrac{b}{r}$， $tan\,\gamma=\dfrac{c}{r}$， $tan\,\delta=\dfrac{d}{r}$， $tan\,\epsilon=\dfrac{e}{r}$ を入れると

$\left(\dfrac{a}{r}+\dfrac{\dfrac{b}{r}+\dfrac{c}{r}}{1-\dfrac{b}{r}\cdot\dfrac{c}{r}}\right)\left(1-\dfrac{d}{r}\cdot\dfrac{e}{r}\right)+\left(1-\dfrac{a}{r}\cdot\dfrac{\dfrac{b}{r}+\dfrac{c}{r}}{1-\dfrac{b}{r}\cdot\dfrac{c}{r}}\right)\left(\dfrac{d}{r}+\dfrac{e}{r}\right)$ これを整理して（途中計算を省略）

$\underline{\underline{(a+b+c+d+e)r^4-\left(\sum abc\right)r^2+abcde=0}}$

ここで $\left(\sum abc\right)$は、a,b,c,d,e の 5 つから 3 つを選び掛け合わせた項の総和を示す。

ここまで分子＝０に着目し、内接円と辺の長さの関係を求めたが、計算を整理し一般化を行う。
ｎ＝３のとき、

$$tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{tan\,\alpha+tan(\beta+\gamma)}{1-tan\,\alpha\,tan(\beta+\gamma)}=\frac{(tan\,\alpha+tan\,\beta+tan\,\gamma)-tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma}{1-(tan\,\alpha\,tan\,\beta+tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\gamma\,tan\,\alpha)}$$

分子＝α,β,γ ３数から１つを選んだ和、及び３数の積（符号は＋－が交互となる、以下同様）

分母＝1、及び α,β,γ ３数から２数を選びそれらの積の和（符号は＋－が交互となる、以下同様）

ｎ＝４のとき、

$$tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta+tan(\gamma+\delta)-tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan(\gamma+\delta)}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta-tan\,\beta\,tan(\gamma+\delta)-tan(\gamma+\delta)\,tan\,\alpha}$$

$$=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta+\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}-tan\,\alpha\,tan\,\beta\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta-tan\,\beta\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}-tan\,\alpha\dfrac{tan\,\gamma+tan\,\delta}{1-tan\,\gamma\,tan\,\delta}}$$

$$=\frac{(tan\,\alpha+tan\,\beta+tan\,\gamma+tan\,\delta)-(tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\delta+tan\,\alpha\,tan\,\gamma\,tan\,\delta+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta)}{1-(tan\,\alpha\,tan\,\beta+tan\,\alpha\,tan\,\gamma+tan\,\alpha\,tan\,\delta+tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\beta\,tan\,\delta+tan\,\gamma\,tan\,\delta)+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta}$$

分子＝$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ４数から１つを選んだ和、及び３数を選びそれらの積の和

分母＝1、及び $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ４数から２つを選びそれらの積の和、及び４数の積

ｎ＝５のとき、

$$tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=$$

$$\frac{[tan\,\alpha+tan\,\beta+tan\,\gamma+tan(\delta+\varepsilon)]-[tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan(\delta+\varepsilon)+tan\,\alpha\,tan\,\gamma\,tan(\delta+\varepsilon)+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan(\delta+\varepsilon)]}{1-(tan\,\alpha\,tan\,\beta+tan\,\alpha\,tan\,\gamma+tan\,\alpha\,tan(\delta+\varepsilon)+tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\beta\,tan(\delta+\varepsilon)+tan\,\gamma\,tan(\delta+\varepsilon))+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan(\delta+\varepsilon)}$$

分子＝$(tan\,\alpha+tan\,\beta+tan\,\gamma+tan\,\delta+tan\,\varepsilon)-(tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\delta+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\varepsilon$

$+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\varepsilon+tan\,\beta\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\varepsilon$

$+tan\,\beta\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon+tan\,\gamma\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon)+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ ５数から１つを選んだ和、及び３数を選びそれらの積の和、及び５数の積

分母＝1$-(tan\,\alpha\,tan\,\beta+tan\,\alpha\,tan\,\gamma+tan\,\alpha\,tan\,\delta+tan\,\alpha\,tan\,\varepsilon+tan\,\beta\,tan\,\gamma+tan\,\beta\,tan\,\delta+tan\,\beta\,tan\,\varepsilon$

$+tan\,\gamma\,tan\,\delta+tan\,\gamma\,tan\,\varepsilon+tan\,\delta\,tan\,\varepsilon)+(tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\varepsilon$

$+tan\,\alpha\,tan\,\beta\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon+tan\,\alpha\,tan\,\gamma\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon+tan\,\beta\,tan\,\gamma\,tan\,\delta\,tan\,\varepsilon)$

1、及び $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ ５数から２つを選びそれらの積の和、及び４数を選びそれらの積の和

このような計算を続けていくことにより一般式を導くことができる。

分子は、$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdot$ から１つを選んだ $tan\,\alpha_i$ の和（$\sum tan\,\alpha_i$）、次に３数を選びそれら $\sum(tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j\,tan\,\alpha_k)$、さらに５数の積の和、７数の積の和､､､と続く。

分母は、1に続き $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdot$ から２つを選んだ $tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j$ の和 $\sum(tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j)$、さらに４数の積の和、６数の積の和､､､と続く。

以上から、つぎのように一般式が得られる。

n 角形の n 個の角を a_1，a_2，a_3，････a_n とすると、

$$tan\left(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots a_n\right)$$

$$=\frac{\sum tan\,\alpha_i-\sum(tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j\,tan\,\alpha_k)+\sum(tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j\,tan\,\alpha_k\,tan\,\alpha_l\,tan\,\alpha_m)-\cdots\cdots}{1-\sum(tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j)+\sum(tan\,\alpha_i\,tan\,\alpha_j\,tan\,\alpha_k\,tan\,\alpha_l)-\cdots\cdots}$$

$\sum(\tan\alpha_i \tan\alpha_j)$、$\sum(\tan\alpha_i \tan\alpha_j \tan\alpha_k)$ などは、ｎ個の数からそれぞれ２つ、３つを選び掛け合わせた数の総和を表す。それらをT_1，T_2，T_3，‥‥‥ とおくと、

$$\tan(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \cdots\cdots}{T_0 - T_2 + T_4 - \cdots\cdots} = 0$$ と表せる。　　‥‥‥‥‥‥‥‥‥①

$T_0 = 1$，$T_1 = \sum \tan a_i$，$T_2 = \sum \tan a_i \tan a_j$，$T_3 = \sum \tan a_i \tan a_j \tan a_k$ ‥‥‥である。

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて、$\theta = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_n$ とおくと、

$$e^{i(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots a_n)} = \cos(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_n) + i\sin(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_n)$$

$$e^{i(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots a_n)} = e^{ia_1}\cdot e^{ia_2}\cdots\cdots e^{ia_n} = (\cos a_1 + i\sin a_1)\cdot(\cos a_2 + i\sin a_2)\cdots\cdot(\cos a_n + i\sin a_n)$$

$= \prod_{i=1}^{n}(\cos\alpha_i + i\sin\alpha_i)$ である。よって $\cos\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) + i\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) = \prod_{i=1}^{n}(\cos\alpha_i + i\sin\alpha_i)$

それぞれ実部と虚部を等しいと置くことにより、次式が導かれる。

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\,(1 - T_2 + T_4 - \cdots\cdot)$$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥②

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\,(T_1 - T_3 + T_5 - \cdots\cdot)$$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥③

$\tan\alpha_1 = \frac{a_1}{r}$，$\tan\alpha_2 = \frac{a_2}{r}$，‥‥‥，$\tan\alpha_n = \frac{a_n}{r}$ を入れると、

$$\left(\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{r}\right) - \left(\frac{a_1}{r}\cdot\frac{a_2}{r}\cdot\frac{a_3}{r} + \cdots\cdots + \frac{a_{n-2}}{r}\cdot\frac{a_{n-1}}{r}\cdot\frac{a_n}{r}\right)$$

$$+\left(\frac{a_1}{r}\cdot\frac{a_2}{r}\cdot\frac{a_3}{r}\cdot\frac{a_4}{r}\cdot\frac{a_5}{r} + \cdots + \frac{a_{n-4}}{r}\cdot\frac{a_{n-3}}{r}\cdot\frac{a_{n-2}}{r}\cdot\frac{a_{n-1}}{r}\cdot\frac{a_n}{r}\right) - \cdots + \left(\frac{a_1}{r}\cdot\frac{a_2}{r}\cdots\cdots\frac{a_n}{r}\right)$$

整理すると、問題の中に示された式と同様の式が導かれる。（$a_1 \to \alpha$，$a_2 \to \beta$，$a_3 \to \gamma$ ‥‥とする）

$n = 3$ のとき　$(a_1 + a_2 + a_3)r^2 - a_1a_2a_3 = 0$

$n = 4$ のとき　$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)r^2 - (\Sigma\, a_1a_2a_3) = 0$

$n = 5$ のとき　$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)r^4 - (\Sigma\, a_1a_2a_3)r^2 + (a_1a_2a_3a_4a_5) = 0$

$n = 6$ のとき　$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)r^4 - (\Sigma\, a_1a_2a_3)r^2 + (\Sigma\, a_1a_2a_3a_4a_5) = 0$

‥‥‥‥‥‥‥‥‥

「博想録８７」において、以下のとおり n が偶数・奇数の場合の一般式を示したがそれと一致している。

（１） n が偶数の場合、（“k ” はk 番目の項を表す）

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots\cdots + a_n)r^{n-2} - (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots\cdots\cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n)r^{n-4}$$

$$+\cdots\cdots\cdots + (-1)^{k+1}\ {}_nC_{2k-1}r^{n-2k} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}(a_1a_2\cdots a_{n-1} + \cdots\cdots + a_2a_3\cdots a_n) = 0$$

最終項（定数項）は n から$n-1$ 個を選ぶ n 通りの組み合わせの積からできる数の和となる。

（２） n が奇数の場合、（“k ” はk 番目の項を表す）

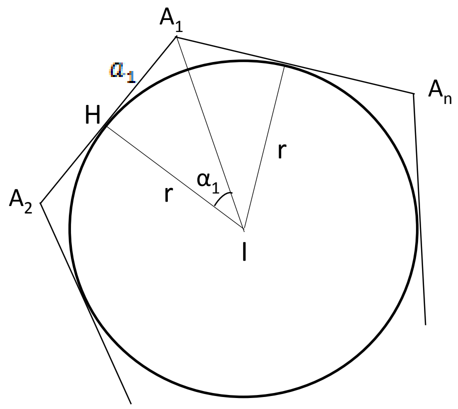
$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots\cdots + a_n)r^{n-1} - (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots\cdots\cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n)r^{n-3}$
$+ \cdots\cdots\cdots + (-1)^{k+1}\ {}_nC_{2k-1}r^{n-2k+1} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n) = 0$

最終項（定数項）は、n 個すべての数の積で項数は１となる。

この問題の一般解が、日本数学教育会誌４９巻９号（1967 年）「和算の数学的研究」（岩田至康氏）の記事で掲載されている。（以下、引用する）

【定理】半径 r の円に外接する多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の頂点 A_i からの接線の長さを a_i とすれば、
$T_1 - T_3 + T_5 - \cdots = 0$ 、ここに T_k は $\frac{a_1}{r}(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ のうちから k 個ずつとって作った積の和を表す。

証 明



右図 $\varDelta IA_1H_1$ において、$\tan\alpha_1 = \frac{a_1}{r}, \tan\alpha_2 = \frac{a_2}{r}, \cdots\cdots$、

ところが、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$ であるから、$T_1 - T_3 + T_5 - \cdots = 0$

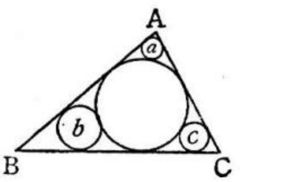
ここに、T_k は $\tan\alpha_i\ (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ のうちから

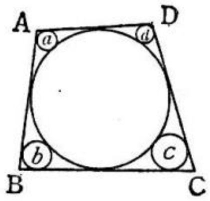
k 個ずつとって作った積の和を表す。

よって証明された。

博想録８８において、次の問題に対し３角形から８角形まで計算しそこから一般形を導いたが、前記②式を用いて解くことができる。

問題 2. 円に外接する n 角形において，その辺と円周との間に円を内接させ，それらの円の半径を $a, b, c, d, \cdots$ とし，もとの円の半径を r とすると





$n=3$ のとき　$r = \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab}$

$n=4$ のとき　$r^2 - (\sum\sqrt{ab})r + \sqrt{abcd} = 0$

$n=5$ のとき　$r^2 - (\sum\sqrt{ab})r + \sum\sqrt{abcd} = 0$

$n=6$ のとき　$r^3 - (\sum\sqrt{ab})r^2 + (\sum\sqrt{abcd})r - \sqrt{abcdef} = 0$

…………………………………………

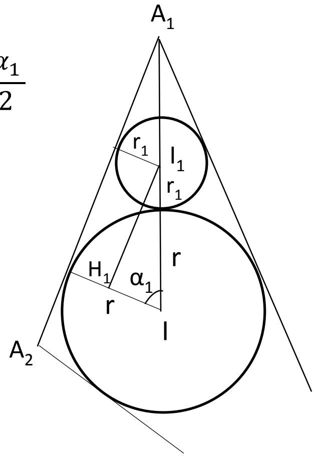
なる関係が成り立つ．

彼はもちろん $n=3, 4, 5, 6, \cdots$ と推定しているだけであるが，編者は三角関数を使って，これらの問題を証明し，かつ研究した．詳細については日本数学教育会誌，49 巻 9 号（1967）を参照されたい．（Ⅲ，**507**，**535**；Ⅳ，**1113**，**1237**，**1298**）

【定理】半径 r の円に外接する多角形 $A_1A_2A_3 \cdots\cdots A_n$ に、その円と A_i を通る２辺とに接する円を容れて、それらの半径を r_i とすれば、$1-T_2+T_4-\cdots\cdots=0$

ここに T_k は $\sqrt{\frac{r_i}{r}}$ またはその逆数 $(i=1，2，\cdots\cdots,n)$ のうちから k 個ずつとって作った積の和を表す。

証 明



右図 $\varDelta I\,I_1H_1$ において、$cos\,\alpha_1=\dfrac{r-r_1}{r+r_1}$ から、$\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{1-cos\,\alpha_1}{1+cos\,\alpha_1}=tan^2\dfrac{\alpha_1}{2}$

よって、$tan\dfrac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\dfrac{r_1}{r}}$， $\cdots\cdots$ ところが、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2}=\frac{\pi}{2}$ だから、

前記②より $1-T_2+T_4-\cdots\cdots=0$

I_1 の方がもとの円で I が後で容れた円のときは同様にして、

$tan\dfrac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\dfrac{r}{r_1}}$， $\cdots\cdots$ となる。よって証明された。

$$1-T_2+T_4-\cdots\cdots=1-\left(\sqrt{\frac{a_1}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_2}{r}}+\sqrt{\frac{a_3}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_4}{r}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{a_{n-1}}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_n}{r}}\right)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{a_1}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_2}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_3}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_4}{r}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{a_{n-3}}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_{n-2}}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_{n-1}}{r}}\cdot\sqrt{\frac{a_n}{r}}\right)-\cdots\cdots=0$$

これを整理すると、問題の中に示された次と同様の式が導かれる。

$n=3$ のとき　$r-\left(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1}\right)=0$

$n=4$ のとき　$r^2-(\Sigma\sqrt{a_1a_2})r+\sqrt{a_1a_2a_3a_4}=0$

$n=5$ のとき　$r^2-(\Sigma\sqrt{a_1a_2})r+\left(\Sigma\sqrt{a_1a_2a_3a_4}\right)=0$

$n=6$ のとき　$r^3-(\Sigma\sqrt{a_1a_2})r^2+\left(\Sigma\sqrt{a_1a_2a_3a_4}\right)r-\sqrt{a_1a_2a_3a_4\,a_5}=0$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

（以上 $\cdots\cdots\cdots\cdots$④）

「博想録８８」においては、「問題１」の結果を利用するため、問題１と問題２を関連付けた。

$sin\dfrac{\alpha_1}{2}=\dfrac{r-a}{r+a}$， $cos\dfrac{\alpha_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{ar}}{r+a}$ から、$tan\dfrac{\alpha_1}{2}=\dfrac{r-a}{2\sqrt{ar}}$

“問題１の $a，b，c$ ”を“$A，B，C$ ”に置き換えて、

$tan\dfrac{\alpha_1}{2}=\dfrac{r}{A}$ だから $\dfrac{r}{A}=\dfrac{r-a}{2\sqrt{ar}}$ 、これから $A=\dfrac{2r\sqrt{ar}}{r-a}=\dfrac{2\sqrt{a}\,r^{\frac{3}{2}}}{r-a}$ という関係が得られる。

同様に、$B=\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}$，$C=\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}$ として、問題１で得た式に A，B，C を入れて整理することにより問題２の解を導いた。そのため a，b，c，・・・・・、の非常に複雑な式になってしまった。
「博想録８８」では、前記④式を誤りとしたが、誤りではないことが判明したので、ここで訂正したい。
私の導いた式は誤りではないことを確認しているが、非常に複雑な式なので実用的とは言えない。

（２０２４．０５．２９）