２８「最も美しい式」

$$『e^{i\pi}+1=0』$$

その美しさにおいて、オイラーの等式に及ぶものはないだろう。
映画「博士の愛した数式」でも紹介されたので、知っている人も多いのではないだろうか。

数学において､最も重要な定数の１つであるネイピア数 e（2.71828……）と､円周率 π（3.14156…..）、さらに虚数単位 $i(\sqrt{-1})$ と最も基本的な数０と１が組み合わされ、見事に調和し極めて印象的な式である。式の美しさもさることながら、驚くのはその意味する $e^{i\pi}$ の値が -1 となるということである。自然対数の底「e」の「$i\pi$」乗が虚数でなく実数、しかも整数になるというその意外性だ。

この等式は、スイスの数学者レオンハルト・オイラーによって発見された。

彼は、数学や物理学の広い分野において、多くの業績を残した人である。
オイラーの名前のついた方程式，数，公式は、主なものを集めただけでもその量、質に驚かされる。

彼の業績の中でも最も重要なものの１つが、表題にあげたオイラーの等式のもとになった指数関数と三角関数の統合だろう。

π については説明する必要はないだろう。誰もが知る円周率である。

ネイピア数 e は自然対数の底で、対数を発見したスコットランドのジョン・ネイピアの名前をとったもの。対数はかけ算を足し算に、割り算を引き算に置き換えて計算できるので、筆算で行っていたそれらの計算をとても簡単にした。桁数が多くなるとかけ算，割り算は本当に大変である。

e は利率計算に関係があり次の式で定義される。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

これは、１期の利率が１(つまり１期後に元本が２倍になる) の預金計算を n 期に分割して複利計算するという考え方から出発している。n 期に分割したときの 1 期分の利率は 1/n だから、１期経過すると $1+1/n$ 倍になる。それが n 期繰り返されるので $(1+1/n)^n$ となる。

ここで $n\to\infty$ とするとその値が e になる。意味するところは、どんな低い利率でも無限年預金すれば元金が e 倍（2.7 倍）になることを示している。

他にも e は、お湯の温度が下がりかたの度合いや、ロープ，電線などの両端を支えて垂らしたときにできる放物線状の曲線､カテナリー曲線 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ など､何かと自然現象に深い関係のある定数である。

円周率 π とネイピア数 e は、ともに $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などと同じ無理数の仲間である。ただし、$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$、、、は代数方程式の解になりうる数（代数的数）だが、π と e は代数方程式の解になりえない。このような数を超越数と呼んで区別している。

さて、オイラーの等式のもとになった、指数関数と三角関数を統合する「オイラーの公式」はどのように導かれるのだろうか？

まずテーラーの級数展開を知る必要がある。

テーラー級数展開とは、何回でも微分可能な関数 f(x) からべき級数を得るものである。

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

これを$x=a$における f(x)のテイラー展開、とくに$a=0$のときはマクローリン展開という。

テーラー展開を使う目的は近似値を得るためである。変数 x の関数 $f(x)$ について $x+\varDelta x$ あるいは $x-\varDelta x$ というように間隔 $\varDelta x$ 移動した場合の関数値 $f(x+\varDelta x)$を，既知の関数値 $f(x)$ を使って近似しようというものだ。

ここで、指数関数$f(x)=e^x$ を $a=0$ においてマクローリン展開する。

$$e^x=e^0+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e^x は微分しても全くその形は変わらずe^x のままだから、$f'(0)$ ，$f''(0)$ ，$f'''(0)$ ・・・はすべて 1 になり、

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}\cdots \quad \text{--------------------------①}$$

と、とてもシンプルな級数となる。

ここで、オイラーは①式に x の代わりに ix を入れる。この x を ix に変えるという発想が、技術の世界を変えることになる。

すると、$(ix)^2$，$(ix)^4$、、、など偶数乗は実数となり $(ix)^3$，$(ix)^5$、、、など奇数乗は i が残って、

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}\cdots$$

となる。

さらにこの式の実数項と虚数項を整理して別々にまとめなおすと、

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots\right)+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots\right)$$

となる。

ここで、$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots\right)$ は$cos\,x$ のマクローリン展開、

$\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots\right)$ は$sin\,x$ のマクローリン展開に一致しており、

以上をまとめるとオイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \text{--------------------------②}$$

が得られる。これで、指数関数と三角関数が、虚数単位 i を介して関係付けられたことになる。

x のときは単にべき乗が 2, 3, 4, 5、、、と増えていくだけだったものが、$x\rightarrow ix$ にすることで偶数のときは i が消え 4 の倍数でプラス、それ以外でマイナスになる。奇数のときは i が残り、かつ 4 の倍数＋1 でプラス、それ以外でマイナスになる。

e^{ix} を級数展開し$x \to ix$ に変えるだけで、各項に＋－のバリエーションが生まれ、何と！出てきた実数項が$cos\, x$ 、虚数項が $sin\, x$ になっているのだ。

２乗してマイナスになる数虚数は、はじめは厄介もの扱いされていた。

しかし、こうしてみると虚数まで範囲を広げることにより、一旦複雑で混沌とした世界に引き込んでおいて、そこを抜け出ると全く新しい未知の世界が待っているような、不思議な効果をもたらすものだということがわかる。

虚数はその後、数学においてますます大きな役割を演じるようになり、物理学や工学で波のように周期的な現象を扱うすべての分野、そして、２０世紀に入り量子力学が生まれると、虚数はさらに重要性を増すようになった。

オイラーがどれほどの試行錯誤の後に、あるいは直感かもしれないがこの式に辿り着いたのか、今では知る由もないが、こういうことに気付くというところに、天才の天才たる所以があるのだろう。

②式は、次のような理由で極めて有益な数式だといえる。

三角関数は、振動など周期的な運動を表すときに出てくる関数で、工学分野には必須のものだ。例えば、発電機で作られる交流電力の波形は三角関数で表される。

ところが三角関数は、べき乗や微分・積分に対して計算が複雑になり扱いにくい。

一方指数関数は、べき乗は掛け算に、さらに微分しても積分してもその形が全く変わらない独特の性質があるので、非常に扱いやすく計算を簡単にしてくれる。ただし、虚数を含んだ計算になる。

量子力学は、極微の世界の力学である。素粒子の世界における運動解析は、素粒子を物質と波の両方の性質をもったものとして扱わなければならない。

そのため、振動を表す方程式として、位置 xと時間 t の関数 $\varphi(x,t) = A\, cos\, 2\pi(kx - \omega t)$（振幅: A，波長:$2\pi/k$，振動数:ω/ 2π , 波の速度: ω/ k ）という三角関数で表す。波動は三角関数で表現されるのである。ところが三角関数は、前述のとおり扱いにくいためオイラーの公式を用いて、$\varphi(x,t) = A\, e^{i2\pi(kx-\omega t)}$ と指数関数にし、この実部のみを取ることでとても計算が楽になる。

そして、この式を微分したり積分したりすると、必然的に虚数単位 i が出てくる。このことから量子力学と虚数は深い関係あるというわけである。量子力学で虚数が不可欠なのは、オイラーの公式がそうさせているのである。

さて、いよいよオイラーの等式の誕生である。

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ において、$x = \pi$ とすると、

$\cos \pi = -1$，$sin\, \pi = 0$ であるから、すぐに $e^{i\pi} = -1$ が導かれる。何と！実にあっけない。

しかし、ここに辿り着くまでの発想の奇抜さは並大抵ではない。

ここで“オイラー”について触れておきたいと思う。

レオンハルト・オイラー（1,707～1,783 年）は、史上最も多くの成果を残した数学者である。

今なお編纂途中の彼の全集は、完成した暁には、７５巻ほどにもなると言われる〔スイス科学アカデミーが１，９０９年に提議した『オイラー全集』は、現在７４巻まで出版されているが今なお未完〕

彼は、「人間が呼吸をし、鷲が空を舞うのと同じように」何の苦もなく計算した。一見まったく異なる

数学分野に属すると思える事柄のあいだに、深い結び付きがあるのを見出す慧眼を持っており、それらを融合することができた。

この時代、数学者としてやっていくのは並大抵の苦労ではなかったはずである。

１９歳にしてパリ科学アカデミーのアカデミー賞に輝いた彼は、ロシアのエカテリーナ一世に見込まれ、サンクトペテルブルグの科学アカデミーに活躍する場を得た。

そこで、苦労をしながら、非常に多くの研究を精力的に行った。しかし、過度の研究と暖房用の薪煙のため、右目の視力を失ってしまう。このとき２８歳であった。

その後ドイツに戻り、ベルリン・アカデミーに属すが、５９歳にして再びエカテリーナ二世の招きによりサンクトペテルブルグに戻る。

そこで充分な庇護を受けていたが、以前から患っていた体の各部の悪化に伴い、やがて完全に失明するに至った。

それでも彼の旺盛な研究意欲は衰えることがなかった。文字は石盤にチョークで書き、自分の子どもたちを指導して、自分がやった計算を書き写させた。

このようにして、さらに１７年間も精力的に研究を続け、完全に視力を失いながらも全業績の半分近くをなし遂げたのであった。

彼は数学的記号の表記を考案した人々のなかで、最も大きな影響を及ぼした人でもある。
彼によって、導入もしくは標準化された主な記号には次のようなものがある。

１　円の直径と円周の長さの比を表す「π」

「周囲」を意味するギリシャ語（$\pi\varepsilon\rho\iota\chi\omega\rho\alpha$: *periphereia*/ペリフェレイア）の頭文字にちなんでいると言われる。

２　自然対数の底を表す「e」

「指数関数（*exponential*）この頭文字にちなんで名付けられたと思われる。対数とは、ある特定の数を得るために、底を何乗しなければならないかという冪指数である。

３「虚数」単位、すなわち$\sqrt{-1}$ を表す「i」

この数はデカルトが考えていたような架空の数などではなく、それまで解が求められなかった、多くの方程式の解が求められるようにする重要な数である。

４　変数 x の関数を表す $f(x)$

関数とは一連の数を別の一連の数に対応させる式のこと。

５　正弦関数を表す「sin」、余弦関数を表す「cos」

６　数列の項の総和を表す「Σ」

こうしてみると、今となっては数学の記号としてなくてはならないものばかりである。

オイラーは、当時の学者の中では極めて出世欲，名誉欲がなく、他人の業績を盗んだり意図的に軽んじたりせず、時には自分の発見の優先権を放棄してまで、友人の発表を促した。その穏やかな性格は、周囲の誰からも好まれたのだった。

同じく天才の名を欲しいままにしたガウス、彼もオイラーに比肩する功績を残した。しかしガウスの性格は厳格そのもので、その意味で数学者として最も適したものといえるが、オイラーとは異なり影の部分があることを感じざるを得ない。

オイラーは、本当に数学が好きで好きで仕方なかったのだ。完全に失明してからも多くの研究成果を生んだことは、まさしくそういうことだろう。

彼は家庭人としても、家族に恵まれた豊かで温かい人生であった。

（２，０１１．１０．１０）