３４「量子力学と虚数」

前に**「最も美しい式」**で、量子力学と虚数との関係を書いた。

量子力学では、素粒子を物質と波の両方の性質をもったものとして波動関数で現す。波動は三角関数で表現されるが、三角関数はべき乗や微分・積分に対して扱いにくいので、指数関数で表すことによって扱いやすくする。

そこで、オイラーの公式を用いて三角関数 $\varphi(x,t)=A\cos 2\pi(kx-\omega t)$ を $\varphi(x,t)=A\,e^{i2\pi(kx-\omega t)}$ のように指数関数に変換することにより扱いやすくなり、とても計算が楽になる。

そして、この式を微分したり積分したりすると、必然的に虚数単位「i」が出てくる。

このことから量子力学と虚数は深い関係がある。量子力学で虚数が不可欠なのは、オイラーの公式がそうさせているのである、と書いた。

しかし最近、量子力学と虚数の関係はそんな数学的,テクニック的なものではなく、もっと根本的で、自然現象のより深いところで結びついているということがわかった。

それは、量子の世界が「表」と「裏」の二重構造になっているからなのである。

量子力学では、ある事象が起きることは確率的であると考える。それは、素粒子世界の事象はすべて確率的に捉える必要があるからである。

素粒子は、物質と波の両方の性質をもっており、回折や干渉などの不思議な現象を示す。
電子などの素粒子の振る舞いは、ちょうど忍者の「分身の術」のように、障害物があると分解して小さくなり、通り抜けた後に再び元の姿に戻る、と考えないと説明できないような現象があるのだ。

そのような現象は、素粒子が空間のどの場所にあるのか不確定であり、その存在を確率で表わすようにすることで説明できる。

素粒子の位置を「確率現象」と捉え、ある瞬間に素粒子がどこにあるのかは、確率的にしか決められないと考えるのである。

この考え方を一歩推し進めて、「各場所に存在する確率」が波のような周期性を持つと解釈すると、干渉により縞模様ができることなど、素粒子の奇妙な振る舞いがすべてうまく説明される。

この考え方を基にしたものが、「シュレーディンガー方程式」（**「陽電子の予言」**参照）である。

シュレーディンガー方程式は、物質の位置や速度に関する「確率」を算出する方程式と考えるとわかりやすい。素粒子の運動は、「その場所に存在する確率はいくつ」とか、「運動量がこうである確率はいくつ」とか、確率的に記述するのが相応しいのである。

シュレーディンガーは、「各場所に等確率で存在する」ということと「波のようにうねっている」ということを両立させるために、複素数を利用するのがうってつけだと考えた。
複素平面（横軸に実数，縦軸に虚数を割り付ける）では、原点から同じ距離の位置に無数の異なる複素数で表わされる点が並んでいて、回転させることにより周期運動とみなすことができるからである。

このシュレーディンガー方程式は、アインシュタインの相対性理論と並んで２０世紀物理学の金字塔と言われている。

ここからは、説明が少しハードになる。

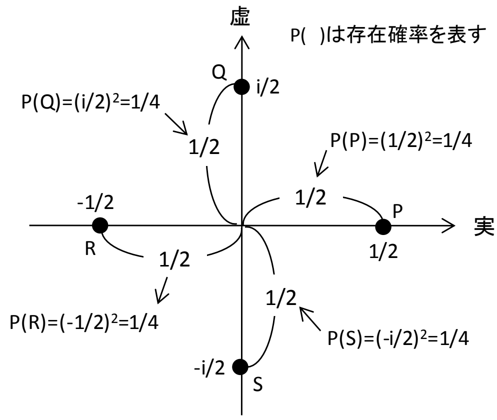
素粒子の世界において、ある事象の起きる確率は、波動関数で表された振幅（確率振幅）の絶対値の２乗で与えられる。すなはち、P を確率，ϕ を確率振幅とすると、$P=[\phi]^2$ となる。

確率は「実数」なので実測できるが、確率振幅は「複素数」で測ることはできない。P の裏に ϕ が隠

れているのである。素粒子の世界は、背後に隠れた確率振幅 ϕ という複素数の世界によって動いていて、われわれはそこから計算される確率しか観ることができないのだ。

「確率が決まっている」ということは、図１の４つの場所 P，Q，R，S に対して波動関数の値、 $\phi(P)$，$\phi(Q)$，$\phi(R)$，$\phi(S)$ というものが決まっているのである。これは一般に複素数の数値である。このモデルでは、波動関数の値は、$\phi(P)=\frac{1}{2}$，$\phi(Q)=\frac{i}{2}$，$\phi(R)=-\frac{1}{2}$，$\phi(S)=-\frac{i}{2}$となる。そして、各位置における存在確率は、これら各複素数の「原点からの距離の２乗」を計算したものになる。

この場合は、素粒子が４つの場所 P，Q，R，S それぞれに存在する確率が、$P(P)=\frac{1}{4}$，$P(Q)=\frac{1}{4}$，$P(R)=\frac{1}{4}$，$\phi(S)=\frac{1}{4}$ となる。このように、素粒子は４つの場所 P，Q，R，S それぞれに等確率で存在している。



（図１）複素平面で表した存在確率４ヵ所における粒子の存在確率

しかも、波動関数 ϕ を見れば、素粒子が波のようにうねっている感じがつかめるだろう。ただし、本来の波のような「山」「谷」というのではなく、複素数のうねりなのである。

現実には、４つの場所にしか存在しないのではなく、複素平面上の正多角形を利用すればいい。例えば、１００の場所なら、$X^{100}=1$ 程式の解で１００個複素数

$cos(2n\pi/100)+isin(2n\pi/100)\ (n=1,2,3\cdot\cdot\cdot\cdot 100)$

を複素平面上に配置すれば、１００ヶ所に存在する状態を扱うことができる。

ここまでくると、半導体におけるトンネル効果が説明できる。

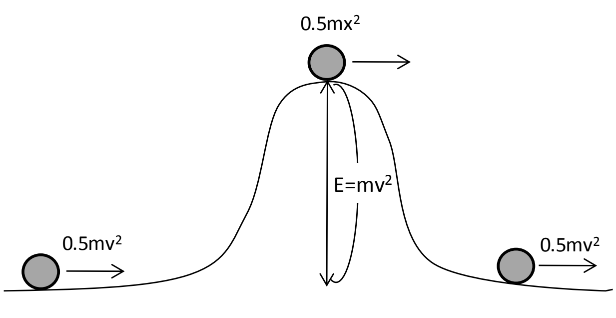
「最も美しい式」でも書いたように、「数の範囲を虚数まで広げることにより、一旦複雑で混沌とした世界に引き込んでおいて、そこを抜け出ると全く新しい未知の世界が待っているような、不思議な効果をもたらす」、それが複素数の世界である。

トンネル効果とは、乗り越えるためには非常に大きなエネルギーが必要な障壁を、充分なエネルギーを持たない素粒子が乗り越えてしまう現象を言う。

それは、ちょうどトンネルを抜けて壁の向こう側に到達するように見えるのでトンネル効果と呼ばれている。これは、素粒子の世界では、時間とエネルギーが不確定であるため起こる現象である。

このマジックのようなことが、素粒子の世界では本当に起きてしまう。これを量子効果と呼んでいる。

具体的には、原子核を突き破って α 粒子が飛び出してくる例などがある。原子核内にいる α 粒子は原子核を脱出するエネルギーを持っていないにもかかわらず、ごく僅かな確率でも粒子の数が莫大なため、



（図２） トンネル効果説明図

飛び出す粒子があるのである。

図２において、粒子は山の左側では速度 v で運動しており、粒子の質量を m とすると、持っているエネルギーは $0.5\mathrm{m}v^2$ である。山の頂上に上るには、位置エネルギー $\mathrm{E} = \mathrm{m}v^2$ のエネルギーが必要になるが、粒子が持っているエネルギーは運動エネルギーの $0.5\mathrm{m}v^2$ だけであり、これでは山を越えるには足らない。

それなのにどうしたわけか、次の瞬間粒子は山を飛び越え、右側を速度 v で運動しているのである。これがトンネル効果といわれる所以である。

この粒子が山の頂上を通ったときの速度を x とすると、山の頂上の粒子の持つエネルギーは、運動エネルギー $0.5\mathrm{m}x^2$ と位置エネルギー $\mathrm{m}v^2$ の和であるから、$0.5\mathrm{m}x^2 + \mathrm{m}v^2$ となる。

エネルギー保存の法則から、これは山の左や右で運動しているときの粒子のエネルギー$0.5\mathrm{m}v^2$ と一致しなければならない。この関係から速度 x を求めると $x^2 = -v^2$ $(x = vi)$ となり、トンネル効果を認めると、「物質の速度が虚数になる」と解釈できる。

これは、マイナスのエネルギーを持つことに相当する。

現実の世界では、壁を越える確率は“ゼロ”であり、トンネル効果などありえない。しかし、量子の世界では、壁を越える確率がパーセントであらわされる。その確率は限りなくゼロに近いがゼロではない。

半導体や集積回路の場合は、圧倒的な数の電子の世界であり、この場合トンネル効果が無視できない。その確率が１００億分の１でも、粒子が１００億個あれば、１個の粒子は壁を越える計算になる。

トンネル効果は、江崎玲於奈によって発見された。この発見によって江崎玲於奈は１，９７３年にノーベル物理学賞を授与されている。

トンネル効果の応用としては、トンネルダイオードが有名である。トンネルダイオードは、ある電圧範囲において、電圧をかければかけるほど電流が流れにくくなる特性（負性抵抗）を利用して、マイクロ波のような超高周波領域で発振・増幅を行うためのダイオードとして利用されている。

我々が日常使っている電化製品，電子機器などはトンネル効果と深くかかわっているのである。

（２，０１１．１２．０４）