

## 48 「マックスウエル」

「マックスウエル」と聞いて何を思い浮かべるだろうか？きっとマックスウエルのコーヒーを思い浮かべる人が多いのではないだろうか？

しかし、電気工学を学んだ人なら、間違いなく「マックスウエルの方程式」を思い浮かべるに違いない。電気に関係ない人にも、是非マックスウエルは電気の分野に偉大な功績を残した人だと知って欲しいと思っている。

テレビ、冷蔵庫、エアコン、携帯電話……我々の生活を支える電気製品は、すべて電磁気学の成果によって作られている。エアコンなどに使われるモーターは「電流が磁場から力を受ける」という法則に基づいて作られたものだし、テレビや携帯電話は、マックスウエルの方程式を解いた結果導かれた「電磁波」を利用したものだ。また、多くの機器に電子回路が組み込まれているが、これらもまた電磁気学なしに製造することはできない。このように現在の生活に密着した技術の基礎となっているのが電磁気学なのである。私は、大学で電気工学を学んだが、中でも電磁気学は本当に難しかった。正直言ってほとんどわからなかったと言ってもいい。

大学の電気工学科に学生が集まらなくなって久しい。電気工学はもう完成された学問であり、この分野における発展性は望めない。“電気工学科”ではなく、“電気・電子・情報工学科”というような学科名にしなければ学生が集まらないのだという。これは日本ばかりではなく、欧米諸国も同じ状況である。欧米では、電力会社など電力関連企業が中心となり、経済的な理由で大学に行けない若者に対し、奨学金制度を設けこの分野に優秀な人材を集める施策をとっている。

学生が集まらない要因の一つに、電磁気学の難しさがある。

電磁気学が難しい理由は、

クーロンの法則、アンペールの法則、ファラデーの法則など重要な法則が実験事実としてばらばらに登場し、これらを天下りの認める必要があるためと思われる。力学のように認めるべき重要な法則が、万有引力の法則ただ一つだけなら電磁気学はもっとわかりやすくなるだろう。

もう少し具体的にいうと、

1. クーロンの法則だけが基本法則でないこと。
2. 「場」という概念が主役に躍り出ること。
3. 「場」の微分や積分の数学がややこしいこと。
4. 本質的に相対性原理に基づいていること。
5. 光の偏光も電子の自己エネルギーも（本当は）量子論で説明しないとわからないこと。

ということではないだろうか？

電磁気学が理解されにくい理由の一つに、教える内容の組み方の問題もあるかもしれない。電気工学において電磁気学ほど重要なものはないのだから、その骨格を充分理解させ、そこから発展して自分で理解にたどり着けるようになっていたらより良いと思う。

電磁気学でまず最初に説明すべきことは、この学問の骨組みであり、電磁気学がすべての電気の基本でいかに大切なものかということではないだろうか。しかし、通常そういう説明はなくいきなりクーロンの法則から始まるのである。

大学で勉強した電磁気学に対して、最近やっとその重要性を認識しその本質を理解したいと思うよう

になった。そして、電磁気学とは結局マックスウエルの方程式を理解し、解けるようにすることなのだ  
 った。

さて、マックスウエルの方程式とはどのようなものなのか？

マックスウエルの方程式は電場と磁場に関する方程式である。1, 873年に“電気磁気論”として、  
 イギリス[スコットランド]の理論物理学者マックスウエルにより集大成された以下の式(1)～(4)  
 で、後にドイツの物理学者ヘルツやイギリスのヘビサイドによって整備された。

(1)  $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$       ファラデーの法則/電磁誘導の法則 (磁場の時間的変化によって電場ができる)

(2)  $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$       アンペールの法則 (電流の回りに磁場ができる)

(3)  $\text{div}\mathbf{D} = \rho$       電場に関するガウスの法則 (電場の源は電荷である)

(4)  $\text{div}\mathbf{B} = 0$       磁場に関するガウスの法則 (磁場の源は磁荷ではない/磁荷は単独には存在しない)

ここで、 $\mathbf{E}$  : 電場,  $\mathbf{H}$  : 磁場,  $\mathbf{D}$  : 電束密度 (単位面積あたりの電束で、誘電率  $\epsilon$  [電気を溜めておく能力]と電場の強さ  $\mathbf{E}$  の積で  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  と表される),  $\mathbf{B}$  : 磁束密度 (単位面積あたりの磁束で、透磁率  $\mu$  [磁気の通しやすさ]と磁場の強さ  $\mathbf{H}$  の積で  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  と表される),  $\mathbf{j}$  : 電流密度 (単位面積あたりの電流),  $\rho$  : 電荷密度 (単位体積あたりの電荷量) である。

「 $\mathbf{E}$ 」や「 $\mathbf{H}$ 」のように太字としているものは、それが3次元のベクトル (方向を持った量) であることを示している。そして、 $\text{div}$  や  $\text{rot}$  はベクトルに関する微分演算子で、 $\text{div}$  は発散 (divergence),  $\text{rot}$  は回転 (rotation) を表す。式で示すと次のとおりとなる。

$$\text{div}\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (\text{3次元}[x, y, z]\text{方向の磁束の湧き出しを表す})$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{i}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

(3次元[x, y, z]方向に渦のように回転していることを表し、 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである)

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は偏微分を表し、多変数の場合に特定の変数に対する微分を意味する。

マックスウエルの方程式は、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ とこれらの源となる電荷密度 $\rho$ と電流密度 $\mathbf{j}$ とを関係付ける基本方程式で構成されている。

これらの方程式を解くために $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ を媒質 (物質) に対して関連付けるための式、

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ と、電流密度 $\mathbf{j}$ が電場に依存する場合は $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  (オームの法則;  $\sigma$  : 導電率[電気の通しやすさ])が必要となる。(1)～(4)の中で本質的なものは、(1)ファラデーの法則, (2)アンペールの法則 であり、(3), (4)は初期条件を与える式といえる。

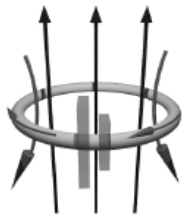
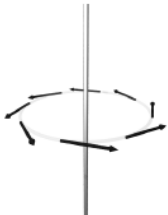
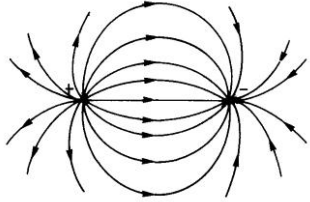
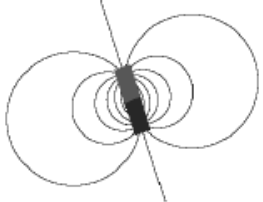
そして、マックスウエルの方程式の電場, 磁場と力学を関連付けるのがローレンツの式、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ である。}$$

右辺第1項はクーロンの法則 (電荷 $q$ が電場から受ける力) であり、第2項がビオ・サバールの法則

(運動する電荷[電流]が磁場から受ける力)である。

ここでもう一度、方程式が表す電磁気の法則をまとめておく。

(1)	磁場が変化すると その周りに電場ができる	(2)	電流の周りに磁場ができる
			
(3)	電束 (電気力線) は +電荷から出て-電荷で終わる	(4)	磁束 (磁力線) は 湧き出しも吸い込みもない
			

電気と磁気には本質的な違いがある。

電気には「源」があるが、磁気には「源」がない。電気の「源」は電荷であり、電荷とは電子の集まりである。電子が集まれば-電極、電子がなくなった状態が+電極である。

一方、独立した存在としての磁極はなく、存在するのは磁場であり磁場は電流によって作られる。電流は電子の流れであるから、電子が動くことによって磁場が存在するということになる。

永久磁石は一見どこにも電流など流れていないようであるが、実は原子レベルで見ると電子が動いており、それが磁気のもとになっている。この基本的な違いが解ってもらえるだろうか？

マックスウエルは(1)～(4)の式をまとめたただけなのか？

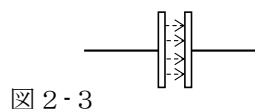
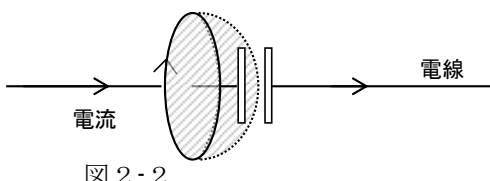
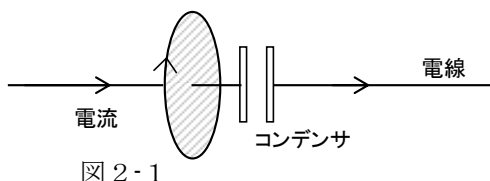
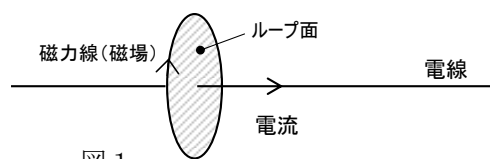
図1のように、電線に電流が流れているとき、電線の周りにできる磁場の大きさはループの面を貫く電流によって決まる。これが(2)に示すアンペールの法則で、式で示すと

$\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}$  (電流の周りに回転する磁場ができる)となる。

一方、電線の一ヶ所をカットして、そこにコンデンサを挟んだ場合を考える。図2-1のループ面ではコンデンサを充電する電流が流れているので、 $\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}$  が成り立つ。

しかし、図2-2のようにコンデンサの間にループ面を考えると、同じループでもこの部分では電流が流れていないので、 $\text{rot}\mathbf{H}=0$  となり明らかに矛盾する。この矛盾を理論的に解決したのがマックスウエルである。

コンデンサ間には電流は流れていないが、彼は電束密度 (電場) が時間的に変動していることに気付いた。そして、コンデ



ンサ間の電束はコンデンサに蓄積された電荷に等しいから、その電束の時間的变化は電流に等しくなければならない。コンデンサ内に電荷が動いているわけではないが、その代わりに“電束が変化している”ということをして“電流が流れている”とみなすことにし、アンペールの式  $\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}$  に新たに電流として

$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$  (電束の時間的变化) を加え、 $\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$  とした。これが方程式の第(2)式である。

マックスウエルの方程式の本質は、 $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$  を「変位電流」とし、これが空間を伝わるとしたことであり、

これこそがマックスウエル最大の発見であった。この変位電流が電磁波(電波)の発見に繋がっていくことになるのである。

$$\text{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{磁場の変化}\rightarrow\text{電場})$$

$$\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{電場の変化}\rightarrow\text{磁場})$$

と表すことにより、はじめ磁場のもとには電流であったが、電流がなくても電場の変化で磁場ができ、電場 $\rightarrow$ 磁場 $\rightarrow$ 電場 $\rightarrow$ 磁場と相互に連鎖していくことが理論的に示されたことになる。

ここからいよいよ電磁波を導き出す。

マックスウエルの方程式(1)~(4)を真空中に適用する。(基本的に空気中も同じと考えてよい)

$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$  ( $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ は真空の誘電率, 透磁率)、真空中では $\rho=0$ ,  $\mathbf{j}=0$ であるから、以上を(1)~(4)に入れると、

$$\text{rot}\mathbf{E}=-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{rot}\mathbf{H}=\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{div}\mathbf{E}=0 \quad \text{-----(3)}$$

$$\text{div}\mathbf{H}=0 \quad \text{-----(4)}$$

電場と磁場の変化は一方向(Z方向)のみに起こるとすると(1)式は、

$$\text{rot}\mathbf{E}=\mathbf{i}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\mathbf{i}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\mathbf{i}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\mu_0\left(\frac{\partial H_x}{\partial t}+\frac{\partial H_y}{\partial t}+\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)$$

ここで残るのは $\partial z$ を含む項だけになるので、

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}=\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad 0=-\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{-----(5)}$$

(2)式も同様に、

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{-----(6)}$$

(5), (6) より 2 組の独立した方程式 (7-1) ~ (8-2) が導かれる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{-----(7-1)} \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{-----(7-2)}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad \text{-----(8-1)} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{-----(8-2)}$$

(7-1) 式を  $z$  で微分して (7-2) に入れると、

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{-----(9-1)} \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad \text{-----(9-2)}$$

(8-2) 式を  $z$  で微分して (8-1) に入れると、

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{-----(10-1)} \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \quad \text{-----(10-2)}$$

9-1~10-2 式は波動を示す方程式である。ここでは (9-1) を解いてみよう。

波動は一般的に次のような式で表される。

$$E_x = E_m \sin 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - \nu t \right) \quad \text{-----(11)}$$

ここで、 $E_x$  ; X 方向の電場、 $E_m$  : 振幅、 $\lambda$  : 波長、 $\nu$  : 周波数、 $t$  ; 時間、 $z$  ; 変数である。

(11) 式を (9-1) 式に入れると、

$$-E_m \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - \nu t \right) = -E_m \varepsilon_0 \mu_0 (2\pi \nu)^2 \sin 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - \nu t \right)$$

$$\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \varepsilon_0 \mu_0 (2\pi \nu)^2 \quad \text{これから } \lambda \nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \text{ となる。}$$

$\lambda$  (波長)  $\times$   $\nu$  (周波数) = 伝播速度であるから、 $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  は電磁波の速度である。

よって (9-1) 式の解 (x 方向の電場) は、

$$E_x = E_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( z - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t \right) \quad \text{-----(12)}$$

となり  $z$  方向に  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  の速度で進んでいく波動である。同様に (9-2) (10-1) (10-2) の解は、

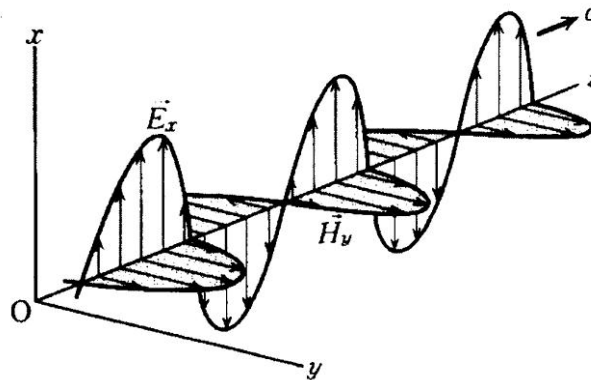
$$H_y = H_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( z - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t \right) \quad \text{-----(13)}$$

$$E_y = E_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( z - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t \right) \quad \text{-----(14)}$$

$$H_x = H_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( z - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t \right) \quad \text{-----(15)}$$

となる。例えば、(12) と (13) は図 3 に示すような波動を表している。

(14)と(15)についても電場と磁場の方向を入れ替えるだけで基本的には同じである。



(図3) 電場・磁場の波動

方程式から導かれた結果により、マックスウエルは電気と磁気による波動（電磁波）の存在を予言した。そして電磁波の速度を計算すると、 $\epsilon_0=8.854 \times 10^{-7}$ 、 $\mu_0=4\pi \times 10^{-7}$ であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854 \times 10^{-7} \times 4\pi \times 10^{-7}}} \doteq 2.9979 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

という結果になる。これは「17 相対性理論」でも示した。

理論的に得られた電磁波の速度が秒速 30 万 km となり、測定で得られていた電磁波の速度と一致するとともに、この速度が光の速度に等しかったことから、マックスウエルは光も電磁波の一種であると予言した。

その後電磁波の存在はヘルツの一連の実験により確かめられ、電磁波は光と同じように直進、反射、屈折などの性質を示すことが明らかになった。

このように 19 世紀の終わり頃、電気、磁気、光の諸現象はマックスウエルの方程式によって統一して説明され電磁気学が完成された。現代社会を支える電気・電子、情報通信技術の源は電磁気学にあり、マックスウエルの功績は計り知れない。

自らの業績を執拗に宣伝し、微分・積分の発見についてもドイツのライプニッツと争い社会的地位を求めたニュートンに比べ、マックスウエルは実験的に電磁誘導を発見したファラデーを讃え「自分はファラデーの発見を数学の式で表しただけ」と述べ、非常に謙虚な人として知られている。

2,006年に電気の国際規格に関する調査団の一員としてロンドンの英国工学技術協会を訪問したとき、協会建物前にはファラデー(1,791~1,867年)の銅像が建てられており、イギリスではやはり電磁誘導の発見者としてファラデーが尊敬されていることを感じた。

マックスウエルの業績についてアインシュタインは、「ニュートンが理論物理学の基礎を築いて以来の、現実の構造について最も大きな概念の変化は、電磁現象についてのファラデーとマックス



ファラデー像

ウエルの研究によってもたらされた」と述べている。

アインシュタインは、電磁気学が相対性理論を生み出す基礎となったということを言っているのである。「電場の変化が磁場を生み」「磁場の変化が電場を生む」という現象は一見違うように見えるが、実は同じ現象なのだ。

磁石にコイルを近づけるとコイルに電流が流れる。これは磁場の中をコイルの中の電子が動いたので、ローレンツ力によって電子が力を受けたことにより電流が流れたものである。一方、コイルに磁石を近づけると、やはりコイルに電流が流れる。これはコイルに磁石が近づくことにより、磁場が変化して電場ができ、その電場から電子が力を受けたことにより電流が流れたものである。

このように磁石、コイルどちらが動いても、コイルに電流が流れるということは同じでありそれぞれ相対的な関係にある。つまり、どちらから見てもマックスウエルの方程式は成り立つのである。

アインシュタインは、電気と磁気の相対的な関係に気付き、特殊相対性理論のヒントを得たのであった。現代物理学が追求する4つの力「重力」「電磁力」「強い力」「弱い力」は、“ゲージ理論”と呼ばれる理論で説明されるが、ゲージ理論の拡張によってこれらの4つの力を統一して説明する理論に繋がることが期待されている。電磁気学は統一理論へと続くゲージ理論の中で、最初に確立されたものであり、統一のための基盤は電磁気学にあるのである。 (2, 013. 07. 05)