$IMAGINARY\ NUMBER$

もし$IMAGINARY\ NUMBER$“虚数”が発見されていなかったら、今の社会はどうなっていただろう？などと時々考えてしまう。

数学や物理を学んでいると虚数は不可欠で、それなしには現代社会の発展は考えられなかったのではないかという気さえする。しかし、虚数が受け入れられるにはとても長い年月が必要だった。

そんな虚数のことを少しでも知って欲しくて、自分なりに書いてみようと思い立った。

長くなるので次のように分けて書いていく。

５３「虚数の不思議な世界」

５４「イデアル」

５５「 複素関数」

５６「 工学と虚数」

５７「 量子力学と虚数」

５３「虚数の不思議な世界」

２次方程式を解く時に現れる「負数の平方根」は、“架空のもの”“不合理なもの”“間違ったもの”として考えられていた。そのような方程式は単に解けないものとして扱われ、負数の平方根は全く無視されていたのである。

１７世紀デカルトは著書『幾何学』の中で､「負数の平方根」ついて“虚”という語を用いて表した。“数”を大きさを持った“線”として捉える幾何学では、表すことが不可能だったのである。

負数の平方根と真剣に向き合うことになったのは３次方程式である。３次方程式の解の公式は**「２６ ガロア補足」**で書いたように、

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解の公式

① $$x_1=\sqrt[3]{-\frac{27c+2a^3-9ab}{54}+\sqrt{(\frac{27c+2a^3-9ab}{54})^2+(\frac{3b-a^2}{9})^3}}$$
$$+\sqrt[3]{-(\frac{27c+2a^3-9ab}{54})-\sqrt{(\frac{27c+2a^3-9ab}{54})^2+(\frac{3b-a^2}{9})^3}}-\frac{1}{3}a$$

これが１つの解。あと２つは、

$\omega_1=1,\ \omega_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \omega_3=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ （ω_1，ω_2，ω_3 は１の３乗根，i は虚数単位で $i=\sqrt{-1}$ ）

として、x_1の大きな３乗根の前に、ω_1とω_2 が交互につく。

つまり、$x_2=\omega_2\sqrt[3]{前}+\omega_3\sqrt[3]{後}-\frac{a}{3}$，$x_3=\omega_3\sqrt[3]{前}+\omega_2\sqrt[3]{後}-\frac{a}{3}$ と示される。

この公式を用いて、$x^3=15x+4$を解いてみる。

$a=1$，$b=0$，$c=-15$，$d=-4$ を①式に入れて計算すると、

$x_1=-2+\sqrt{-3}$，$x_2=-2-\sqrt{-3}$，$x_3=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ が得られる。

ここで、$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$で行き詰ってしまった。

ところが、これらは負数の平方根を恐れず普通の計算ルールを守ることで、

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$と単純化できる$\sqrt{i}$ことがわかれば、

$x_3=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})$ となり、$x_3=4$ であることがわかるのである。

このように、$\sqrt{-1}$（負数の平方根）を受け入れるようになったのは、２次方程式からではなく３次方程式によってである。

$x^3=15x+4$ は明らかに実数の解を持つが、カルダーノの公式は形式的な解を生み出す式であり、実数解が負数の平方数を含む仮の形で表されていたのである。

実際、$x^3=15x+4$ の１つの解が$x=4$ であることに気付けば、$(x-4)$ で因数分解して、

$(x-4)(x^2+4x+1)=0$ より、すぐに$x_1=-2+\sqrt{-1}$, $x_2=-2-\sqrt{-1}$, $x_3=4$ を得ることができる。

デカルトの時代、3次方程式の解で有用に思われた複素数（実数と虚数を組み合わせた数）$\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{-1}$は、幾何学では何の意味も持たず、代数学においてのみ許される「仮空の数」であると考えられていた。

このように扱われていた負数の平方根だったが、オイラー（1,703－1,783）は$\sqrt{-1}$ の特殊な性質を理解し$\sqrt{-1}=i$ という記号を与え積極的に取り入れている。

今日、現代理論としての複素数の始まりは、ノルウェーの測量技師ヴェッセル（1,745－1,818）とされているが、オイラーはすでに複素数の有用性を見抜いていたのである。

「２８ 最も美しい式」でも書いたように、『$e^{i\pi}+1=0$』という美しい「オイラーの等式」を残している。後にガウス（1,777－1,855）によって、横軸に実数，縦軸に虚数を位置付けた複素平面（ガウス平面）が考案され、虚数は幾何学と結び付けられた。「$\sqrt{-1}=1\angle 90^\circ$ 」と書き、$\sqrt{-1}$を幾何学的に「長さ1の垂直な線分」と理解する。$\sqrt{-1}$を掛けることはガウス平面上で反時計回りに90° の回転を意味する。このように虚数を幾何学的に捉えたことは、まさに奇跡的な出来事と言ってよいだろう。

ここで、虚数の不思議な世界に踏み込んで、いろいろな計算を示してみたいと思う。

□虚数の虚数乗 i^i は？

$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ において$\theta=\frac{\pi}{2}$ とすると、$\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$ だから、$0+i=e^{\frac{\pi}{2}i}$

よって$i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ である。これから、$i^i=(e^{\frac{\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{(\sqrt{e})^\pi}=0.2078\ldots.$

実際 i^i は、実数で無限に多くの値を持つ。$\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$ となる θ は、$\theta=\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi$ と無限にあるため、$i^i=0.2078\ldots.$ は n＝0 のときの値である。驚くべきはこの値が実数になることだ。

□虚数のルート$\sqrt{i}$は？

$i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ なので、$\sqrt{i}=i^{\frac{1}{2}}=(e^{\frac{\pi}{2}i})^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{\pi}{4}i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$、$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$だから、$\sqrt{i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

i の平方根は複素数となる。

□虚数の対数 $ln(i)$ は？

対数（自然対数）とは、ネイピア数「e」(=2.71828 ····）を何乗したら「その数」になるかを示し、この場合 e を何乗したら「i」になるかという数をもとめることになる。

$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ の両辺の対数をとれば、$ln(i) = ln\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{\pi}{2}i \cdot ln(e)$， $ln(e) = 1$ なので $ln(i) = \frac{\pi}{2}i$

i の対数は虚数となる。

□負数の対数 $ln(-1)$ は？

$e^{i\pi}$＋1＝0 を変形して －1＝$e^{i\pi}$ 、この両辺の対数をとれば $ln(-1) = ln\left(e^{i\pi}\right) = i\pi$

負数の対数は虚数となる。

□実数の虚数乗 a^i は？

$a^i = e^{iln[a]}$ と表すことができる。$e^{iln[a]} = \cos(ln[a]) + i\sin(ln[a])$であり、$ln[a]$は実数だから

$a^i = \cos($実数$) + i\sin($実数$)$となる。

従って、実数の虚数乗は複素数である。

□虚数の三角関数 $\cos(i)$， $\sin(i)$ は？

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$より、

$cos\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)$， $sin\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$ と表されるから、

$$\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-1} + e) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1.543\cdots\cdot$$

$$\sin(i) = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{i}{2}(e - e^{-1}) = \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = i1.175\cdots\cdot$$

$\cos(i)$ は実数、$\sin(i)$ は虚数になる。

このように、虚数にどのような計算を施してもすべて結果は複素数 $(a + bi)$ の範囲に含まれ、それから外れることはない。複素数はすべての数を包含した究極カテゴリーということがわかる。

□虚数(i)から円周率 π を求めてみる

虚数とπが関係づけられている式 $ln(i) = \dfrac{\pi}{2}i$を利用する。

$ln(i) = ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = ln(1+i) - ln(1-i)$ 、$ln(1+i)$ と $ln(1-i)$を無限級数に展開すると、

$$ln(1+i) = i - \frac{1}{2}(i)^2 + \frac{1}{3}(i)^3 - \frac{1}{4}(i)^4 + \frac{1}{5}(i)^5\cdots\cdot = i + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}i\ \cdots\cdot$$

$$ln(1-i) = -i - \frac{1}{2}(-i)^2 + \frac{1}{3}(-i)^3 - \frac{1}{4}(-i)^4 + \frac{1}{5}(-i)^5\cdots\cdot = -i + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}i\ \cdots\cdot$$

となり分母が偶数の項で一致し、分母が奇数の項で符号が反転するので、$ln(1+i) - ln(1-i)$ を作る

と、分母が偶数の項はすべてなくなり、i を含む分母が奇数の項のみ残り、

$ln(i) = 2\,i - \frac{2}{3}i + \frac{2}{5}i - \frac{2}{7}i + \frac{2}{9}i - \frac{2}{11}i \cdots\cdot = \frac{\pi}{2}i$ 、これが$\frac{\pi}{2}i$ に等しいから

この両辺を$2\,i$ で割り左辺と右辺を入れ替えれば、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots\cdot$$

となり、これを計算すると $\frac{\pi}{4} = 0.78527316$、よって$\pi = 4 \times 0.78527316 \cdots = 3.14109265 \cdots$

このπの値は 2,000 項まで計算したものである。いろいろπの計算式があるが、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots\cdot$$

という級数は収束が遅く実用的でない。それでも虚数を利用してπの値が求められることが明らかになった。正しいπの値 3.14159265…と比較すると、2,000 項まで計算しても小数点以下３桁までしか一致しない。

□複素数の領域に踏み込んだ積分

図１に示すグラフ $y = \frac{1}{x^2+1}$ と X 軸で囲まれた面積（S）を求める。

この曲線は y 軸に対して対称なので、0～∞の範囲を積分して２倍すれば求める面積である。

$$\frac{S}{2} = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^\infty \frac{1}{(x+i)(x-i)}dx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)dx = \frac{1}{2i}[ln(x-i) - ln(x+i)]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2i}\left[ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{2i}\left[ln\left(\frac{1-\frac{i}{x}}{1+\frac{i}{x}}\right)\right]_0^\infty$$

ここで$x \to \infty$のとき$\frac{i}{x} \to 0$ としてよいので、$\frac{1-\frac{i}{x}}{1+\frac{i}{x}} \to 1$

$x \to 0$ のとき$\frac{x-i}{x+i} = \frac{-i}{i}$ となり、$\frac{1}{2i}\left[ln(1) - ln\left(\frac{-i}{i}\right)\right] = -\frac{1}{2i}ln\left(\frac{-i}{i}\right)$

ここで、$\left(\frac{-i}{i}\right) = -1$ としてはいけない。

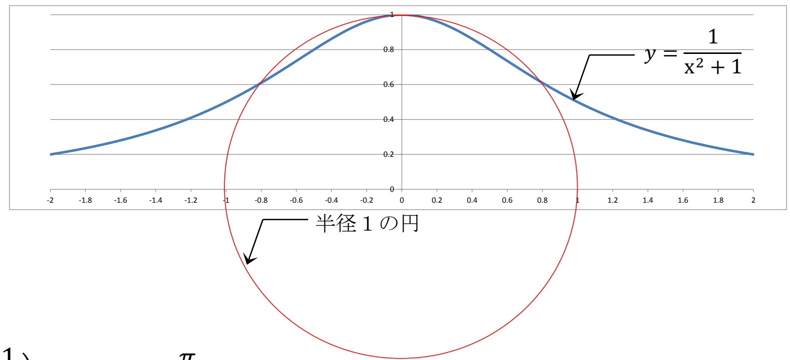
$\frac{-i}{i} = ln(-i) - ln(i)$として計算を進めると、

$= -\frac{1}{2i}[ln(-i) - ln(i)]$

$ln(i) = \frac{\pi}{2}i$ ，$ln(-i) = -\frac{\pi}{2}i$ だから、

$-\frac{1}{2i}[ln(-i) - ln(i)] = -\frac{1}{2i}\left[-\frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{2}i\right] = \left(-\frac{1}{2i}\right) * (-\pi i) = \frac{\pi}{2}$

（図１）



よって、$y = \frac{1}{x^2+1}$ で囲まれた面積は S＝$\frac{\pi}{2} \times 2$＝π

一方、$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$の不定積分が、$tan^{-1}x$ という公式わかっていれば、

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = [tan^{-1}x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$ となり一致する。

よって、$y = \frac{1}{\mathrm{x}^2+1}$ と X 軸で囲まれた面積は半径 1 の円の面積に等しい。

□複素数を利用した証明

「整数の２つの平方の和の積は、常に整数の２つの平方の和として、２通りの違った方法で表せる」という定理について複素数を利用して証明を行う。

具体的な例を示すと次の通りである。

$\underline{(2^2+3^2)\,(4^2+5^2)}=533=\underline{7^2+22^2}=\underline{23^2+2^2}$

$\underline{(17^2+19^2)\,(13^2+15^2)}=256{,}100=\underline{64^2+502^2}=\underline{8^2+506^2}$

一般式で表すと、$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=u_1^2+v_1^2=u_2^2+v_2^2$

左辺を因数分解して整理すると、

$[(a+ib)\,(a-ib)]\,[(c+id)\,(c-id)]=[(a+ib)\,(c+id)]\,[(a-ib)\,(c-id)]\ =[(u+iv)\,(u-iv)]$

$(u+iv)=(a+ib)\,(c+id)=|ac-bd|+i(bc+ad)$、よって $u_1=|ac-bd|$，$v_1=bc+ad$

$(u-iv)=(a-ib)\,(c-id)=(ac+bd)+i|bc-ad|$、よって $u_2=ac+bd$，$v_2=|bc-ad|$

このように、複素数を使うことにより簡単に証明される。

ここで、$a=2$，$b=3$，$c=4$，$d=5$ として計算してみると、

$|ac-bd|=7$，　$bc+ad=22$ から，$(2^2+3^2)\,(4^2+5^2)\ =7^2+22^2$

$ac+bd=23$，$|bc-ad|=2$　から，$(2^2+3^2)\,(4^2+5^2)\ =23^2+2^2$

このように、２通りの違った方法で表すことができる。

複素数という不思議な数の領域に持ち込んで積分や証明を行うことで、難しい問題が驚くほど簡単に解けてしまう。これ以上分解できない物質の最小単位と思っていた原子を、陽子や中性子さらにクォークにまで分解することで物質の本質が見えてくるのに、何か似ているような気がする。

（２０１３．１２．１５）