５５「複素関数」

複素関数とは、変数を複素数に拡張した関数である。複素数まで拡張して関数を考えることで、複素変数であるがゆえの不思議な性質が現れる。複素関数はコーシー（フランス 1789～1857）により研究され複素関数論として確立された。

変数x，yを実部と虚部にもつ複素数の変数を、

① $$z = x + iy$$

とする。複素関数$f(z)$とは、実部にx，yを変数とする関数$u(x, y)$，虚部にx，yを変数とする関数$v(x, y)$をもつ２変数関数で、

② $$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

と表される。この$f(z)$は複素数に、さらに別の複素数を対応させるものなので複素関数と呼んでいる。

例えば、$f(z) = e^z$とすると、$f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$

$e^{iy} = cosy + i\,siny$ だから、$f(x + iy) = e^x(cosy + i\,siny)$ となる。

この式を見れば、$f(z) = e^z$ がかなり複雑な様相の関数となることが理解されるだろう。

複素関数においても微分，積分を考えることができる。ここで厳密に定義を示すことはしないが、実数変数の関数とはかなり異なってくる。

まず微分について。

実関数$f(x)$の微分は、

③ $$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)^n$$

と定義される。複素関数$f(z)$の微分も、一見同じような式、

④ $$f'(z) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h}\right)^n$$

と定義されるが、ここで異なるのはhである。実関数の場合の$h \to 0$はhの大きさ$|h|$を単に0に限りなく近づけるということであるが、複素関数におけるhは 複素数であり、絶対値$|h|$を0に限りなく近づけることは同じでも、hの偏角（極形式$h = |h|e^{i\theta}$と表した時の偏角）については何も規定していない。

複素平面上で$h \to 0$とするとき、偏角θはどのように変化しても同じ極限値となるとき、微分可能であると定義される。複素数において$h \to 0$とする方法は実数と異なり、無限のパターンが存在することになり、複素関数が微分可能ということは非常に厳しい条件といえる。領域Ｄのすべての点で$f(z)$が微分可能なとき、この微分可能な複素関数を正則関数と呼んでいる。

では、複素関数が微分可能かどうか調べるにはどうすればよいのか？そのためには、コーシー・リーマンの関係式を使う。

複素関数を①，②式で表し、$u(x,y)$，$v(x,y)$をそれぞれ偏微分したとき、

⑤ $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

が成り立てば$f(z)$は微分可能である。

次に積分について。

複素平面上に始点$(a,\ b)$ $z_a = x_a + iy_a$，終点 $z_b = x_b + iy_b$ をとり、z_aと z_bを結ぶ適当な曲線Cを考える。この曲線Cに沿って関数$f(z)$ を z_aから z_bまで積分するとは、曲線Cを k個に分割して $\Delta z_n = z_n - z_{n-1}$とするとき、

$$\int_c f(z)dz = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f(\,z_n)\,\Delta z_n$$

と定義する。微分と同様に Δz_nは複素数であり $\Delta z_n \to 0$ とするとき、実関数のときとは異なった複雑で不思議な性質が現れる。

① 式を使って$u(x,y) \to u,\quad v(x,y) \to v$と単純化して表すと、

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u+iv)(dx+idy) = \int_c (udx - vdy) + i\int_c (vdx + udy)$$

となることからも理解されるだろう。

複素積分特有の性質として、$f(z)$が領域Dで正則関数のとき、積分値は積分経路には関わりなく常に同じである。これから始点と終点が同じ、つまりぐるっと一周する場合その積分値は 0 となる。つまり、

⑥ $$\oint_c f(z)dz = 0$$

である。これをコーシーの積分定理と呼ぶ。

複素平面全体で関数が正則ならば積分することができるが、もし複素平面内に 1 点でも正則でない点（特異点）がある場合、積分路と特異点の関係が非常に重要になる。特異点が積分路C（閉曲線）の外にある場合、コーシーの積分定理により$\oint_c f(z)dz = 0$ となるが、図 1 に示すように特異点 Z_0がCの内部にある場合は異なる。

積分路Cを変形しても積分値は変わらないので、Cを Z_0を中心とする半径 r の円 ($z = z_0 + re^{i\theta}$)とすると、

$dz = \dfrac{dz}{d\theta}\cdot d\theta = re^{i\theta}\cdot id\theta$ なので求める積分は、

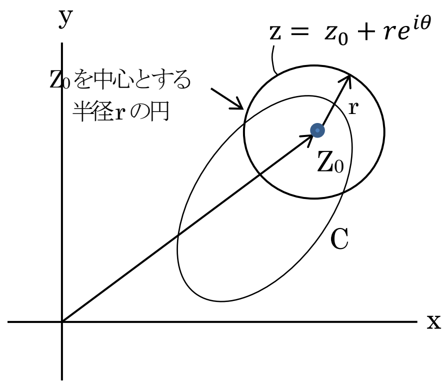

図1（複素平面における積分路）

$$\oint_c \frac{1}{z - z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}}\cdot re^{i\theta}\cdot id\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i$$

となる。このように特異点を内部に含む閉曲線Cに沿った積分は、複素積分に特有で経路に関わらず値が$2\pi i$となる。

これから、次のコーシーの積分公式が導かれる。

⑦ $$f(\,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

特異点 z_0は閉曲線Cの内部のどの点でも成り立つので、コーシーの積分公式はC上点で$f(z)$の値を与えれば、正則関数$f(z)$は一意的に決まるということを表している。

⑦の右辺の積分はCに沿った積分だから、C上で計算しやすい値を与えれば求められる。その結果が、C内部で唯一の正則な関数となるのである。なぜC上の値を決めるだけでC内部の関数が決まってしま

うのかというと、正則関数（微分可能）という条件を満たすからである。

複素関数で微分できるということは、非常に厳しい条件なのでこういうことが成り立つのである。正則であるためには⑤式に示す、コーシー・リーマンの関係式を満たさなければならない。コーシー・リーマンの関係式は要するに微分方程式で、正則関数を求めるということは微分方程式を解くことに同じことだったのである。C上での値を与えるということは、境界での値を与えるということと同じで、つまり境界条件を与えて微分方程式を解くということに他ならなかったのだ。$f(z)$が正則ならば、⑤式の u，v をそれぞれ x，y で偏微分して整理すると、

⑧ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

が得られる。これは調和関数といい、境界Cにおける値を与えて内部の値を求める、いわゆる境界値問題の解を与えていることになる。

複素積分においてはコーシーの積分定理、閉曲線上における積分 $\oint_c f(z)dz=0$ という性質を利用した方法は主流ではない。もともと正則関数であれば、多少やっかいでも実関数の積分で可能である。複素積分を用いる理由は、複素平面が持つ特別な性質を利用して難しい積分を解くことにある。閉曲線C内に特異点を持つ関数の積分値を、次に説明する留数定理を使うことによって求めることができるようになるのである。

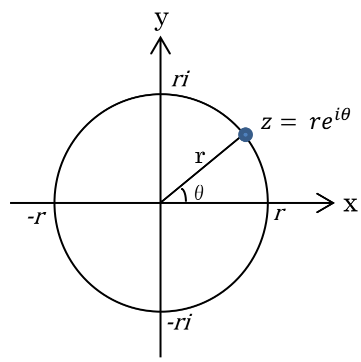

図 2（半径 r の円を積分路とする）

図２において、積分経路を複素平面上の原点を中心とする半径 r の円とすると、その方程式は$z=x+iy=r$、極形式で表すと$z=r(cos\theta+isin\theta)=re^{i\theta}$となる。$dz=ire^{i\theta}d\theta$ なので、

$$\oint_c f(z)dz=i\int_0^{2\pi}F(\theta)\,r\,e^{i\theta}d\theta$$

と変換される。（ここで、$F(\theta)$は原始関数である）

例えば、$f(z)=az^2+bz+c$という２次関数として$z=re^{i\theta}$を代入すると、

$F(\theta)=a(re^{i\theta})^2+b\left(re^{i\theta}\right)+c=ar^2e^{i2\theta}+bre^{i\theta}+c$ だから、

$$\oint_c f(z)dz=i\int_0^{2\pi}\left(ar^2e^{i2\theta}+bre^{i\theta}+c\right)r\,e^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}\left(ar^3e^{i3\theta}+br^2e^{i2\theta}+cre^{i\theta}\right)d\theta$$

$$=iar^3\int_0^{2\pi}e^{i3\theta}d\theta+ibr^2\int_0^{2\pi}e^{i2\theta}d\theta+icr\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta$$

ここで、

$$\int_0^{2\pi}e^{in\theta}d\theta=\frac{1}{in}\left[e^{in\theta}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{in}\left(e^{i2n\theta}-e^0\right)=0$$

から、$\int_0^{2\pi}e^{i3\theta}d\theta$，$\int_0^{2\pi}e^{i2\theta}d\theta$，$\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta$ はすべて 0 になるので、

$\oint_c (az^2+bz+c)dz=0$ となる。

　これは、dzを $d\theta$に変換する際に、必ず$e^{i\theta}$の項が付加されることによる。$\oint_c\ f(z)dz$を 0 にしないためには、$e^{i\theta}$の項が消え定数項が残るようにする工夫が必要で、そのためには$e^{-i\theta}$を含む項、つまり $\frac{1}{z}$ の項があればよい。

$$\oint_c\ \frac{1}{z}dz = i\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}re^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi}d\theta = i[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

$\frac{1}{z}$の項が付加されることにより$e^{i\theta}$が消え積分値が 0 でなく$2\pi i$となり、r には関係ないものとなる。これは、積分路の閉曲線の中に$\frac{1}{z}$ の特異点$z=0$を含むときに、積分値が 0 とならないことを意味する。また、逆に閉曲線の中に特異点を含まなければその積分値は必ず 0 になる。特異点が$z=0$（原点）でなく$z=a$（複素平面上の任意の点）の場合は、図３のように$z=a+\ re^{i\theta}$ つまり$z-a=\ re^{i\theta}$ を考えればよい。積分値が 0 にならない$\frac{1}{z}$ または $\frac{1}{z-a}$ の項の係数を k_{-1}とすると積分値は、

$\oint_c\ f(z)dz = 2\pi i\cdot k_{-1}$ となる。この係数 k_{-1}を留数（残留する数）と呼んでいる。

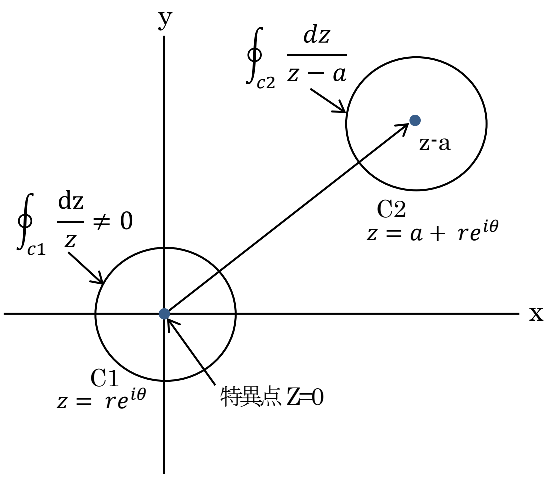

図 3（積分路の移動）

　一般の関数が $f(x)=\ k_0+\ k_1x+\ k_2x^2+\ k_3x^3+\cdot\cdot\cdot\cdot$ と級数展開できるように、複素関数$f(z)$も同様に級数展開でき、$f(z)=\ k_0+\ k_1z+\ k_2z^2+\ k_3z^3+\cdot\cdot\cdot\cdot$とすることができるが、これではすべての項が 0 になってしまうので、$f(z)=\cdot\cdot\cdot\cdot+\ k_{-3}z^{-3}+k_{-2}z^{-2}+\ k_{-1}z^{-1}+k_0+\ k_1z+\ k_2z^2+\ k_3z^3+\cdot\cdot\cdot\cdot$のように$z^{-1}$の項を含むように級数展開する。

　この級数展開をローラン展開（テイラー展開を一般化したもので、$f(z)$が$z=a$で正則関数でない場合の級数展開）と呼び、一般に$z=a$のまわりに展開した式を採用する。ローラン展開の一般式は、

⑨ $$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}k_n(\,z-a)^n$$

で示される。ローラン展開の最初の項が a_{-k}で始まっていても、積分に関係するのはk_{-1}項のみである。従って留数 k_{-1}さえ求まれば、容易に積分ができることになる。

　そこで留数の求めであるが、

（１）最初の項が$\frac{k_{-1}}{z}$で始まる場合、関数$f(z)$は$z=0$ に「１位の極を持つ」といい、この時の留数は

⑩ $$k_{-1}=\lim_{z\to 0}[zf(z)]$$ で与えられる。

（２）最初の項が $\frac{k_{-n}}{z^n}$ で始まる場合、「n 位の極を持つ」といい、

⑪ $$k_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^{n-1}z^nf(z)}{dz^{n-1}}\right]$$

で与えられる。特異点が$z=0$でなく$z=a$の場合には、$z\to 0$でなく$z\to a$とすればよい。

ここで例題として、前に計算した $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ について、

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+1} dz$ の値を留数を用いて求めてみる。

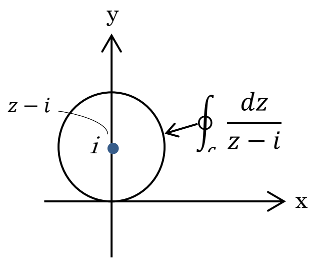

図 4 （[0,i] を中心とする
半径 1 の円に沿った積分路）

$f(z)$ の特異点は$z = \pm i$ なので、$z = i$ として留数を求める。

⑩式を用いて留数 k_{-1}は、

$$k_{-1} = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\cdot\frac{1}{z^2+1}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)}\right] = \frac{1}{2i}$$

$k_{-1} = \frac{1}{2i}$ であるから積分値は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i\cdot k_{-1} = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi$$

このように、留数を求めて$2\pi i$を掛けることで、非常に難しい関数の積分を容易に求めることができる。