５８「数学超絶難問」その１

しばらくぶりに博想録を書く。ここ数か月「数学超絶難問」に多くの時間を費やした。
数学者「藤原正彦」の言葉を借りれば、『長く苦しい思考の後に訪れる発見の鋭い悦び』を味わうとそれが忘れられない。といっても、私が取り組んでいる難問は必ず解けるのだが。

数学超絶難問は、

第１部　アルキメデス登場
第２部　中世から１８世紀へ
第３部　ニュートンとオイラー

という３部構成になっている。

第１部は、面積（n 等分した球の表面積，球面三角形)、体積（等面四面体)、重心（半円，扇型，半球殻，円弧など）

第２部は、フィボナッチ数列の一般項、3 次方程式や 4 次方程式、無限積の恒等式、ヴィエトの公式、期待値（球面上の 2 点間の距離，円周上の 2 点間や円内の任意の点と中心間の距離)、ヤコブ・ベルヌーイの無限級数、破産問題など

第３部は、二項定理、指数級数や正弦級数・余弦級数、球面三角形の面積、オイラーの恒等式、バーゼル問題、ウォリスの公式、スターリングの公式などである。

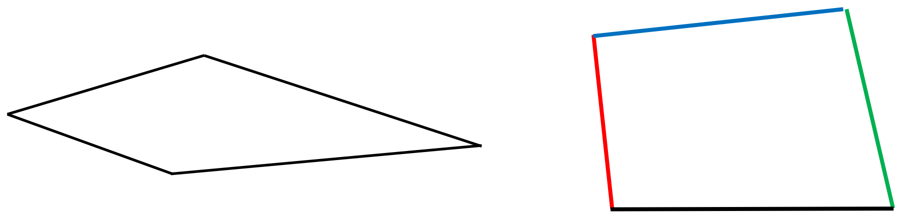
第２部や３部については有名な公式を導く問題が多く、いずれも難問には違いないが、既に有名な数学者が発見したもので既知であり、あえて挑戦する気にはならなかった。

この中で、何日も格闘して解いた問題があるので紹介したい。

ヘロンの四角形

問題

４辺の長さが６，７，８，９の四角形の面積が最大となるように、辺の長さの順番と４つの頂点の角度を求めよ。また、その時の面積の最大値は？



解　答

４辺の長さを a,b,c,d として一般論として解いていく。

図１の四角形Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄにおいて、四辺をそれぞれ a，b，c，d、4 つの角度を θ_1， θ_2， θ_3， θ_4とする。

求める面積は、△ＡＢＣ＋△ＡＤＣである。

△ＡＢＣの面積をＳ$_1$，△ＡＤＣの面積をＳ$_2$とすると、
求める面積Ｓ＝Ｓ$_1$＋Ｓ$_2$である。
この面積が最大となるようなａ，ｂ，ｃ，ｄの組み合わせと頂点の角度θ$_1$，θ$_2$，θ$_3$，θ$_4$を求める問題である。

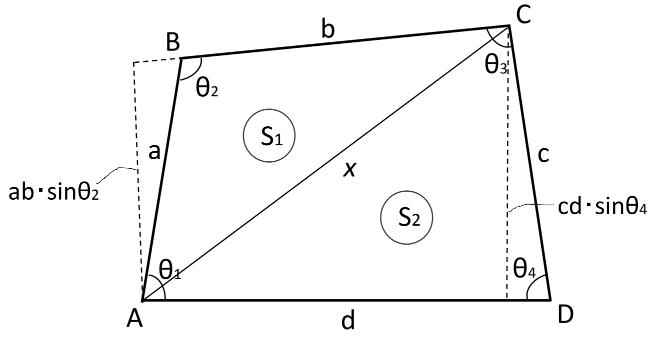


図１

$$Ｓ_1=\frac{1}{2}ab\cdot sin\,θ_2\ ,\quad Ｓ_2=\frac{1}{2}cd\cdot sin\,θ_4$$

$AC = x$と仮定すると余弦定理より、

$$\cos θ2 = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\quad ,\qquad \cos θ4 = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}$$

これから、

$$\sin θ2 = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)^2}\ ,\ \sin θ4 = \sqrt{1-\left(\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}\right)^2}$$

従って、

$$Ｓ=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)^2}+\frac{1}{2}cd\sqrt{1-\left(\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}\right)^2}$$

となる。

$$1-\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)^2=\left[1+\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)\right]\cdot\left[1-\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)\right]$$

$$=\frac{(a+b)^2-x^2}{2ab}\cdot\frac{-(a-b)^2+x^2}{2ab}$$　となるから

$$Ｓ=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-x^2]\cdot[-(a-b)^2+x^2]}+\frac{1}{4}\sqrt{[(c+d)^2-x^2]\cdot[-(c-d)^2+x^2]}$$ ----------------------------①

さらに次のような美しい式に整理できる。

$$Ｓ=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(a-b+x)(-a+b+x)(a+b-x)}+\frac{1}{4}\sqrt{(c+d+x)(c-d+x)(-c+d+x)(c+d-x)}$$
----------------------------①'

この式からxを消去することはできないので、途中の段階で導かれた①式を用いて、この式が最大となるxを求める。

xで微分して０とおくと、

------------②

$$\frac{dＳ}{dx}=\frac{-4x^3+2[(a+b)^2+(a-b)^2]x}{4\sqrt{[(a+b)^2-x^2]\cdot[-(a-b)^2+x^2]}}+\frac{-4x^3+2[(c+d)^2+(c-d)^2]x}{4\sqrt{[(c+d)^2-x^2]\cdot[-(c-d)^2+x^2]}}=0$$

②式を通分して整理すると次のようになる。

$$4(c^2d^2-a^2b^2)x^4+8[a^2b^2(c^2+d^2)-c^2d^2(a^2+b^2)]x^2+[(a^2-b^2)(c^2+d^2)-(c^2-d^2)(a^2+b^2)]=0$$ ------------③

これは、$(x^2)^2$というx^2についての２次方程式であり解くことが可能である。
このままa，b，c，dの式で変形していくと膨大になるので、数値を入れてxを求める。

$a=6$，$b=7$，$c=8$，$d=9$を③式に代入すると、

$(19\cdot5\cdot3^2\cdot2^4)x^4-(79\cdot13\cdot5\cdot3^2\cdot2^5)x^2+(37\cdot11\cdot5^2\cdot3^2\cdot2^4)=0$

これを解いて、

$$x^2=\frac{(79\cdot13\cdot5\cdot3^2\cdot2^5)\pm\sqrt{79^2\cdot13^2\cdot5^2\cdot3^4\cdot2^{10}-2^2(19\cdot5\cdot3^2\cdot2^4)(37\cdot11\cdot5^2\cdot3^2\cdot2^4)}}{2\cdot19\cdot5\cdot3^2\cdot2^4}$$

$$=\frac{79\cdot13\cdot5\cdot3^2\cdot2^5\pm2^9\cdot3^4\cdot7\cdot5}{2\cdot19\cdot5\cdot3^2\cdot2^4}=\frac{5\cdot3^2\cdot2^5(79\cdot13\pm7\cdot3^2\cdot2^4)}{19\cdot5\cdot3^2\cdot2^5}=\frac{79\cdot13\pm7\cdot3^2\cdot2^4}{19}$$

$$=\frac{19}{19}=1(-のとき),\qquad=\frac{5\cdot11\cdot37}{19}(+のとき)$$

$x^2=1$ または$x^2=\dfrac{5\cdot11\cdot37}{19}$

となるが、$x=\pm1$ はありあえないので、

$$x=\sqrt{\frac{5\cdot11\cdot37}{19}}=10.3492$$

のとき面積が最大となる。　これを①式に代入して、

$$S1=\frac{1}{4}\sqrt{\left(13^2-\frac{5\cdot11\cdot37}{19}\right)\cdot\left(\frac{5\cdot11\cdot37}{19}-1^2\right)}=\sqrt{\left(\frac{13^2\cdot19-5\cdot11\cdot37}{4\cdot19}\right)\cdot\left(\frac{5\cdot11\cdot37-19}{4\cdot19}\right)}=\sqrt{\left(\frac{7^2\cdot3\cdot2^3}{19\cdot2^2}\right)\cdot\left(\frac{7\cdot3^2\cdot2^5}{19\cdot2^2}\right)}=\frac{7\cdot3\cdot2^2\sqrt{21}}{19}$$

$$S2=\frac{1}{4}\sqrt{\left(17^2-\frac{5\cdot11\cdot37}{19}\right)\cdot\left(\frac{5\cdot11\cdot37}{19}-1^2\right)}=\sqrt{\left(\frac{17^2\cdot19-5\cdot11\cdot37}{4\cdot19}\right)\cdot\left(\frac{5\cdot11\cdot37-19}{4\cdot19}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3^3\cdot2^7}{19\cdot2^2}\right)\cdot\left(\frac{7\cdot3^2\cdot2^5}{19\cdot2^2}\right)}=\frac{3^2\cdot2^4\sqrt{21}}{19}$$

$$S1+S2=\frac{7\cdot3\cdot2^2\sqrt{21}}{19}+\frac{3^2\cdot2^4\sqrt{21}}{19}=\frac{\sqrt{21}}{19}(7\cdot3\cdot2^2+3^2\cdot2^4)=\frac{\sqrt{21}}{19}(3\cdot2^2\cdot19)=12\sqrt{21}$$

これが面積の最大値である。

求められたxからθ_2とθ_4を計算すると、

$$\cos\theta_2=\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}=-\frac{5}{19}から、\theta_2=105.26^\circ$$

$$\cos\theta_4=\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}=\frac{5}{19}から、\theta_4=74.74^\circ$$

となり、$\theta_2+\theta_4=180^\circ$ のときに最大面積となることがわかる。

四角形を２つの三角形に分割し、対角線の長さをパラメータとして面積を表し、微分することにより最大値を与える対角線の長さを求める方法で解を得ることができたが、力ずくで解いた感が否めない。この方法でやれば誰にでも必ず解ける、途中で計算を諦めなければ。

以下、模範解答。（図２参照）

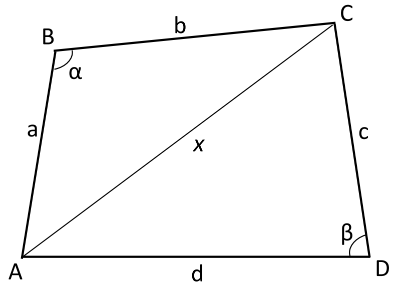


図２

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}(ab\cdot sin\alpha+cd\cdot sin\beta)$$

４倍して両辺を２乗すると、

$$16\mathrm{S}^2=4a^2b^2sin^2\alpha+4c^2d^2sin^2\beta+8abcd\cdot sin\alpha sin\beta \qquad \text{------------------------------④}$$

余弦定理より、

$x^2＝a^2+b^2-2abcos\alpha$ ------------------------------(a)

$x^2＝c^2+d^2-2cdcos\beta$ ------------------------------(b)

$(a)-(b)$をつくると、　$a^2+b^2-c^2-d^2＝2abcos\alpha-2cdcos\beta$ ------------------------------(c)

両辺を２乗して、

$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2cos^2\alpha+4c^2d^2cos^2\beta-8abcd\cdot\cos\alpha cos\beta)$ ------------------------------⑤

④＋⑤をつくると、

$$16\mathrm{S}^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$=(2ab+2cd)^2-8abcd[1+\cos(\alpha+\beta)]$$

従って、

$$16\mathrm{S}^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-8abcd[1+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$=(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)-8abcd[1+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\frac{(a+b+x)(a-b+x)(-a+b+x)(a+b-x)}{(2ab)^2}$$

$\mathrm{S}=\dfrac{\mathrm{a+b+c+d}}{2}$とおくと、

$$16\mathrm{S}^2=(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)\ -8abcd[1+\cos(\alpha+\beta)] \qquad \text{----------------⑥}$$

⑥式より、$16\mathrm{S}^2$が最大になるのは、$-8abcd[1+\cos(\alpha+\beta)]=0$のときである。

つまり、$\cos(\alpha+\beta)=-1$、　$\alpha+\beta=\pi$のときである。

このときのＳの値は、$\mathrm{S}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}=\sqrt{(15-6)(15-7)(15-8)(15-9)}=12\sqrt{21}$

となる。

　とてもスマートな解き方で、途中で対角線の長さ（x）を消去し、両辺を２乗して④＋⑤をつくり⑥式を導くところなどは、自分としてはとても思いつくことができないだろう。

さて、図形から離れて$a = 6$，$b = 7$，$c = 8$，$d = 9$ として、計算だけでθ_2＝105.26°，θ_4＝74.74°　$\theta_2 + \theta_4$＝180° を得たが果たして解は一つだけだろうか？

実際に図を描いてみると、対向する角度の和が 180° で面積が最大になる四角形は３パターンあることがわかる。

実際のプロポーションで描いてみると図３Ａ，Ｂ，Ｃのようになる。

図Ｂ，Ｃにおける点線は図Ａの形を示し、ＢはＡをもとに６と７，ＣはＡをもとに７と８を入れ替えたものであることがわかる。いずれも対向する角度の和は 180° である。

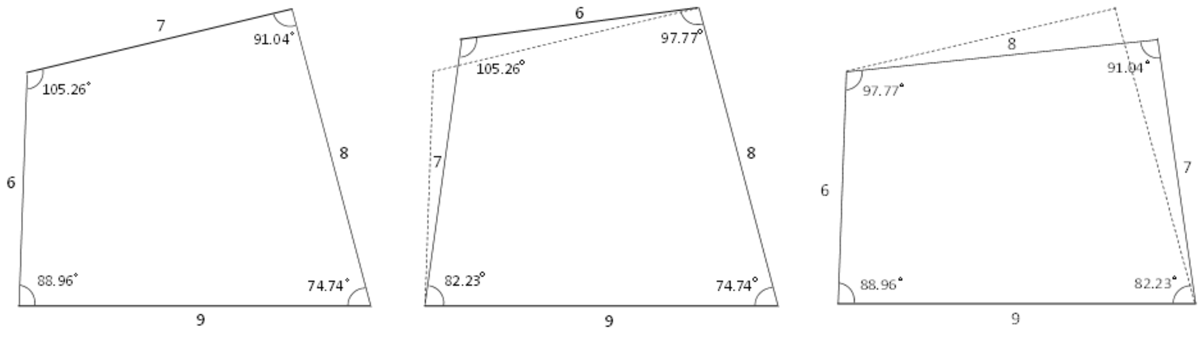


図３

模範解答は、対向する角度の和が 180° のときに面積が最大（$12\sqrt{21}$）となるところまでで終わっている。具体的に角度を求めるには、$\alpha+\beta=\pi$から（c）式を用いて$\cos\alpha = -\cos\beta$として

$$cos\alpha = \frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)} = -0.26316\ (105.26^\circ)$$ と計算される。

問題の解答としては模範解答に示されたところまでで充分である。しかし、実際の形がどんな形でそれがいくつあるのかは是非知りたいところだ。

この問題では、条件に当てはまる四角形が３つあることが分かって、初めて自分としては納得できるように思う。　（２０１５．０８．１８）