

59 「数学超絶難問」その2

デカルトの葉

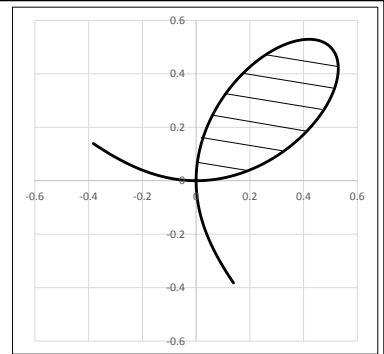
【問題】

この図形はデカルトの葉と呼ばれている。

ヨハンベルヌーイが1,691年にこの面積を計算した。

$$x^3 + y^3 = xy$$

という式で与えられるデカルトの葉の面積を求めよ。



この問題は私にとって相当な難問だった。解けるまでに1ヶ月以上の時間がかかってしまった。いろいろな方法を考えて、あらゆる手段を駆使して何とか解こうとしたが非常に手こずった。そもそもパソコンでこの曲線を描くのもそう簡単ではない。

(1) 極座標

すぐ思いつくのは極座標で考えることである。

$x = r\cos\theta$ 、 $y = r\sin\theta$  とおいて、

$$r = \frac{\sin\theta \cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta \cos\theta)} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta)}$$
 と変形できる。

これから  $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot r dr d\theta$  の積分を求めればよいが、この積分は解けなかった。

この時点で面積を求めるときの公式  $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$  にも気付いていなかった。

(2) 複素積分

複素積分に変換し、留数定理を使えば解けるのではないかな？

$Z = e^{i\theta}$  とすると、 $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ ,  $Z^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta$  これから、

$$\cos\theta = \frac{Z + Z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{Z - Z^{-1}}{2i}$$
 となる。

$$r = \frac{\sin\theta \cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta \cos\theta)}$$
 に代入すると、

$$\frac{\frac{Z - Z^{-1}}{2i} \cdot \frac{Z + Z^{-1}}{2}}{(\frac{Z - Z^{-1}}{2i} + \frac{Z + Z^{-1}}{2})(1 - \frac{Z - Z^{-1}}{2i} \cdot \frac{Z + Z^{-1}}{2})} = \frac{1}{-Z \left[ \frac{(Z^2 - 1)^2}{Z^2 + 1} - i \frac{(Z^2 + 1)^2}{Z^2 - 1} \right]}$$

$$\frac{-Z[(Z^2 - 1)^4 + i(Z^2 + 1)^4]}{2(Z^4 + 1)(Z^8 + 14Z^4 + 1)} = \frac{-Z[(Z^2 - 1)^4 + i(Z^2 + 1)^4]}{4[Z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)][Z \pm \frac{7 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 \pm i)][Z \pm \frac{7 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 \pm i)]}$$
 となる。

積分範囲は  $0 \sim \frac{\pi}{2}$  なので、積分路を上半平面の単位半円とし、 $Z = e^{i2\theta}$  とおくと  $d\theta = \frac{1}{2iZ} dZ$

よって求める面積は、

$$S = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16i} \frac{[-Z]^2 [(Z^2 - 1)^4 + i(Z^2 + 1)^4]^2}{[Z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)]^2 [Z \pm \frac{7 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 \pm i)]^2 [Z \pm \frac{7 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 \pm i)]^2}$$

ここで留数定理を使う。特異点は、 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i), \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1-i)$  の4点である。

特異点はいずれも2位の極であり上式を微分する必要がある。この微分はとても複雑でありここで行き詰ってしまった。

### (3) 座標回転

座標軸を  $\frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ) 回転させることにより、曲線はx軸に対称になり式が簡略化されるはずである。

$\frac{\pi}{4}$  回転係数、 $x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}, y = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$  を代入して整理すると、 $Y^2 = \frac{-\sqrt{2}X^3 + X^2}{3\sqrt{2}X + 1}$  となり、

$Y^2 = (X \text{ の } 3 \text{ 次式を含む分数関数})$  になった。

グラフは図1のとおりである。これから面積は、

$$S = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} X \sqrt{\frac{-\sqrt{2}X + 1}{3\sqrt{2}X + 1}} dX \text{ として求めることができる。}$$

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} X \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - X}{X + \frac{1}{3\sqrt{2}}}} dX \text{ と変形し、}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \rightarrow \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \beta \text{ として、}$$

新たに  $X \rightarrow x, Y \rightarrow y$  と表すと、

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\beta} x \sqrt{\frac{\beta - x}{x + \alpha}} dx \text{ となる。よって、不定積分 } \int x \sqrt{\frac{\beta - x}{x + \alpha}} dx \text{ が求められればよいが、}$$

この積分はかなり難しく多くの時間がかかってしまった。

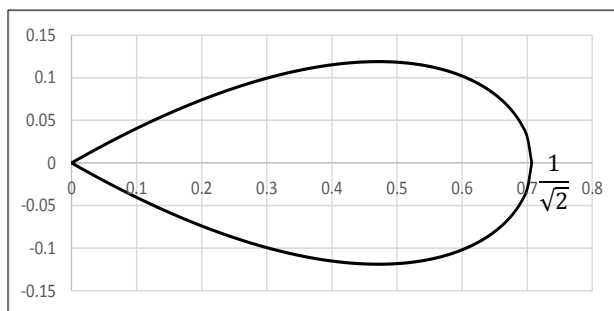


図1  $x^3 + y^3 = xy$  を  $45^\circ$  回転したグラフ

① 部分積分

$\int x \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx$  を部分積分により求めてみる。

部分積分は、 $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$  のように、巧みに微分と積分を組み合わせることにより、難しい関数の積分を求める方法である。

実際にやってみると、

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \quad \text{において、}$$

$$u = x, \quad v' = \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} \quad \text{とすると、}$$

$$\int x \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx = x \cdot \int \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx - \int \left[ \int \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx \right] dx$$

$$\text{右辺第1項は、} \int \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} - \frac{\alpha+\beta}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}}$$

$$\text{第2項は、} \int \left[ \frac{1}{2} \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} - \frac{\alpha+\beta}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} \right] dx \quad \text{であり、}$$

$$\text{前項は、} \int \frac{1}{2} \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 \sin^{-1} \frac{2x+\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \frac{1}{4} \left( x - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)}$$

$$\text{後項は、} \frac{\alpha+\beta}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} = \frac{\alpha+\beta}{4} \left[ \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} - (\alpha+\beta) \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} \right] \quad \text{となるので、}$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx &= \left[ \frac{x}{2} \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} - \frac{\alpha+\beta}{2} x \cdot \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 \sin^{-1} \frac{2x+\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \right] + \left( x - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} \\ &\quad + \frac{\alpha+\beta}{4} \left[ \sqrt{(x+\alpha)(\beta-x)} - (\alpha+\beta) \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} \right] \end{aligned}$$

を得る。この式に数値を入れて計算してみたが、結局解は得られなかった。

② 置換積分

$\int x \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx$  を置換積分により求めてみる。

$\sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} = t$ とおくと、 $x = \frac{\beta - \alpha t^2}{t^2 + 1}$ 、 $dx = \frac{-2(\alpha + \beta)t}{(t^2 + 1)^2} dt$ である。

$$\int x \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx = \int \frac{\beta - \alpha t^2}{t^2 + 1} \cdot t \cdot \frac{-2(\alpha + \beta)t}{(t^2 + 1)^2} dt = -2(\alpha + \beta) \left[ \beta \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^3} dt - \alpha \int \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt \right]$$

よって、

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^3} dt \text{ と } \int \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt \text{ が求まればよい。}$$

$$(1) \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^3} dt \text{ について、 } \tan \theta = t \text{ とおくと、 } dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad t^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} & \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{(\cos^2 \theta)^3}{1} d\theta = \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \\ & = \frac{1}{8} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{1}{8} \right) \sin 4\theta, \quad \sin \theta = t \cos \theta, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{t^2 + 1} \text{ を使って、 } \sin 4\theta = \frac{4t(1-t^2)}{(t^2+1)^2} \text{ なので、} \\ & = \frac{1}{8} \tan^{-1} t - \frac{t(1-t^2)}{8(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt \text{ について、 } \tan \theta = t \text{ とおくと、 } dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad t^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} & \int \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{(\cos^2 \theta)^3}{1} d\theta = \int \sin^4 \theta d\theta = \int \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ & = \int \frac{1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta}{4} d\theta = \int \frac{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8} d\theta = \frac{3\theta}{8} - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \\ \sin 2\theta = 2t \cos^2 \theta = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad \sin 4\theta = \frac{4t(1-t^2)}{(t^2+1)^2} \text{ から、} & = \frac{3}{8} \tan^{-1} t - \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{t(1-t^2)}{8(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

(1)、(2)から、求める面積は、

$$\begin{aligned} S & = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \sqrt{\frac{\beta-x}{x+\alpha}} dx = \frac{-4(\alpha + \beta)}{\sqrt{3}} \left[ \beta \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^3} dt - \alpha \int \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt \right] \\ & = \frac{-4(\alpha + \beta)}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\beta}{8} \tan^{-1} t - \frac{\beta t(1-t^2)}{8(t^2+1)^2} - \frac{3\alpha}{8} \tan^{-1} t + \frac{\alpha t}{2(t^2+1)} - \frac{\alpha t(1-t^2)}{8(t^2+1)^2} \right] \\ & = \frac{-4(\alpha + \beta)}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\beta - 3\alpha}{8} \tan^{-1} t + \frac{\alpha t}{2(t^2+1)} - \frac{(\alpha + \beta)t(1-t^2)}{8(t^2+1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ を入れると、}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[ \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}}}{8} \tan^{-1} t + \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}} t}{2(t^2+1)} - \frac{\frac{4}{3\sqrt{2}} t(1-t^2)}{8(t^2+1)^2} \right] \\
& - \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \left[ \frac{t}{6\sqrt{2}(t^2+1)} - \frac{t(1-t^2)}{6\sqrt{2}(t^2+1)^2} \right] = -\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{6\sqrt{2}} \left[ \frac{t}{(t^2+1)} - \frac{t(1-t^2)}{(t^2+1)^2} \right] \\
= & -\frac{4}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{2t^3}{(t^2+1)^2} = -\frac{8}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{t^3}{(t^2+1)^2}, \quad x=0 \text{ のとき、} t=\sqrt{3}, \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき、} t=0 \text{ なので、} \\
& 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき、} \sqrt{3} \leq t \leq 0 \text{ となる。}
\end{aligned}$$

$$\text{よって、} -\frac{8}{9\sqrt{3}} \cdot \left[ \frac{t^3}{(t^2+1)^2} \right]_{\sqrt{3}}^0 = 0 - \left[ -\frac{8}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}^3}{(\sqrt{3}^2+1)^2} \right] = -\frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{9\sqrt{3} \cdot 4^2} = \frac{1}{6}$$

これが求める面積である。(やっとできた！)

#### (4) 写像・重積分

$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy = 0$  において、式を簡単にするため  $x + y = X$ ,  $xy = Y$  とおき、 $xy$  平面から  $XY$  平面への写像を考える。

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = xy$  は、 $X(X^2 - 3Y) = Y$  から  $Y = \frac{X^3}{3X+1}$  となり、 $y$  の 3 次式が  $Y$  の

1 次式に変換され、面積は次のように表される。

$$\iint_{x-y} f(x, y) dx dy = \iint_{X-Y} f(X, Y) \cdot |J| dX dY$$

ここで  $|J|$  はヤコビアンといい、写像に伴う面積要素の比率であり  $XY$  平面における面積は  $xy$  平面の  $|J|$  倍になる。

ヤコビアンを計算すると、

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \text{ より、} |J| = \frac{\sqrt{X^2 - 4Y}}{Y} \text{ となる。以上より、}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{x-y} (x^3 + y^3 - xy) dx dy &= \iint_{X-Y} \frac{X^3}{3X+1} \cdot \frac{\sqrt{X^2 - 4Y}}{Y} dX dY = \iint_{X-Y} \frac{X^3}{3X+1} \cdot \frac{\sqrt{X^2 - 4Y}}{\frac{X^3}{3X+1}} dX dY \\
&= \int \sqrt{X^2 - \frac{4X^3}{3X+1}} dX = \int \sqrt{\frac{X^2(-X+1)}{3X+1}} dX = \int X \sqrt{\frac{-X+1}{3X+1}} dX
\end{aligned}$$

積分範囲は図 2 により、 $0 \rightarrow \frac{1}{2}$  から  $0 \rightarrow 1$  に変わる。

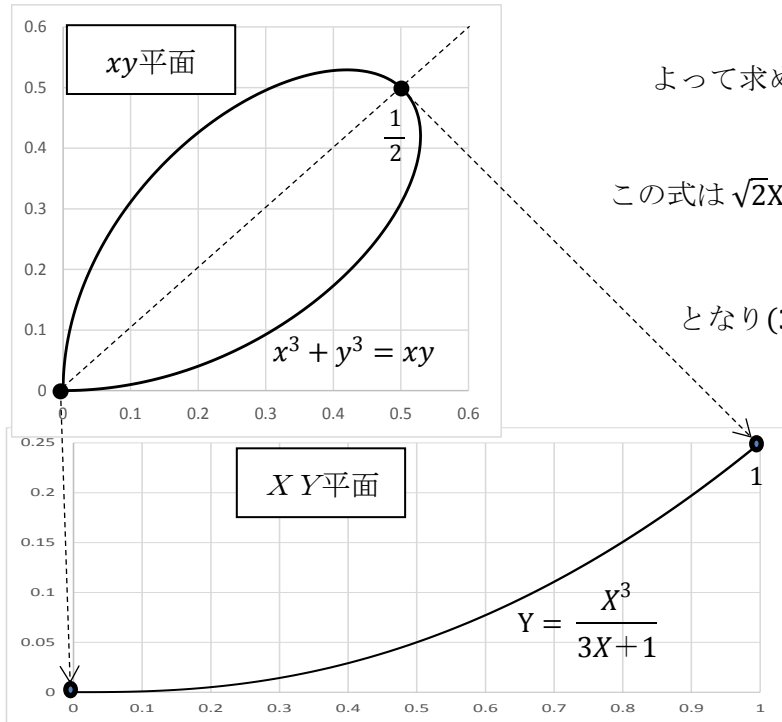


図2  $xy$ 平面から  $XY$ 平面への写像

よって求める面積は、 $S = \int_0^1 X \sqrt{\frac{-X+1}{3X+1}} dX$  となる。

この式は  $\sqrt{2}X \rightarrow X$  と入れ替えると、積分範囲は  $\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1$

となり(3)の  $S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} X \sqrt{\frac{-\sqrt{2}X+1}{3\sqrt{2}X+1}} dX$  に一致する。

$xy$ 平面から  $XY$ 平面への写像はヤコビアンを含めることによって(3)座標回転と同じ結果になることがわかった。

### (5) Green-Stokesの公式

いろいろ解法を考えている間に、スマートな方法が見つかった。

2次元図形の面積がその図形を囲む曲線の積分、すなわち面積分を線積分に入れ替えるグリーンの定理を用いれば、簡単に解けるということが分かったのである。

この定理は、2次元平面のある領域内で関数を積分することは、その領域の境界上だけで積分をすればよいというものである。例えば、円の面積を求めることが円周を求めることに帰着できることになる。数学の言葉で書くと、

『平面領域の「ふち」の上での接線線積分は、その領域上の重積分に直せる』

「 $R^2$ 内の $C^1$ 級閉曲線 $C$ の囲む領域を $D$ とする。 $C$ の向きは $C$ 上の各点で進行方向の左手に $D$ を見るものとする。このとき $D$ のベクトル場  $F=(P, Q)$ に対して次式が成り立つ。」

ここで、 $R^2$ は2次元平面、 $C^1$ 級曲線とは、少なくとも1回は微分可能な曲線で導関数が連続である関数をいう。

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \, dxdy, \quad \text{rot } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{bmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

微分形式で表現すれば、
$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \rightarrow \int_{\partial D} \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \int_D dx \wedge dy = \int_{\partial D} 1 dxdy = \text{領域 } D \text{ の面積}$$

ここで、 $\partial D$ は $D$ の境界を表し、 $D$ は領域を示す。

$x^3 + y^3 = xy$  において、 $t = \frac{y}{x}$  とおくと、

$y = tx$ ,  $x = \frac{t}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{t^2}{1+t^3}$  となる。(パラメータ表示)

$$S = \int \frac{1}{2}(x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{2t(1+t^3) - t^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{2t + 2t^4 - 3t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{2t - t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{1+t^3 - t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \quad \text{よって、}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{t}{1+t^3} \cdot \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} - \frac{t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt$$

$1+t^3 = T$  とおくと、 $dT = 3t^2 dt$

$$S = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{t^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3t^2} dT = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{T^2} dT = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{T} \right]_1^\infty = \frac{1}{6}$$

(3) ②置換積分で求めた結果と一致する！

## (6) 模範解答

“これはかなりの難問である、三角関数を使わないならば” と原本にある。

$x = r \cos \theta$  ,  $y = r \sin \theta$  とおくと、

$r = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 極座標を用いた時の面積は  $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$  と表せるので、

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta,$$

$\tan \theta = t$  とおくと、 $\frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = dt$  だから、

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3(1+t^3)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$r = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$  のまま直接2乗してしまうと案外簡単にできてしまうのだった。

( )<sup>2</sup>内を $\cos^3 \theta$ で割ることには気付かなかった。

## (7) 一般化

$x^n + y^n = xy$  として一般化してみる。

$r^n(\cos^n \theta + \sin^n \theta) = r^2 \cos \theta \sin \theta$  より、

$$r^{n-2} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} = \frac{\tan \theta \cdot \frac{1}{\cos^{n-2} \theta}}{1 + \tan^n \theta}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\tan \theta}{1 + \tan^n \theta} \right)^{\frac{2}{n-2}} \cdot \left( \frac{1}{\cos^{n-2} \theta} \right)^{\frac{2}{n-2}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\tan \theta}{1 + \tan^n \theta} \right)^{\frac{2}{n-2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$\tan \theta = t$  とおくと、 $d\theta = \cos^2 \theta dt$  なので

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^n} \right)^{\frac{2}{n-2}} dt \text{ これが一般式である。 } 3 \leq n \leq 10 \text{ の } n \text{ について表 1 にまとめる。}$$

n	面積計算式	面積	計算結果	
3	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^3} \right)^2 dt$	$\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3(1+t^3)} \right]_0^{\infty}$	$\frac{1}{6}$	0.167
4	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^4} \right) dt$	$\frac{1}{4} [ \tan^{-1} t^2 ]_0^{\infty}$	$\frac{\pi}{8}$	0.392
5	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^5} \right)^{\frac{2}{3}} dt$	$\frac{3}{5} \left( \frac{t}{1+t^5} \right)^{\frac{5}{3}} (1+t^5)^{\frac{5}{3}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -x^5 \right)$	$\frac{\Gamma(\frac{1}{3})^2}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$	0.530
6	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^6} \right)^{\frac{2}{4}} dt$	$\frac{4}{6} \left( \frac{t}{1+t^6} \right)^{\frac{6}{4}} (1+t^6)^{\frac{6}{4}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{4}, \frac{2}{4}; \frac{5}{4}; -x^6 \right)$	$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{6\sqrt{\pi}}$	0.618
7	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^7} \right)^{\frac{2}{5}} dt$	$\frac{5}{7} \left( \frac{t}{1+t^7} \right)^{\frac{7}{5}} (1+t^7)^{\frac{7}{5}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{5}, \frac{2}{5}; \frac{6}{5}; -x^7 \right)$	$\frac{\Gamma(\frac{1}{5})^2}{7\Gamma(\frac{2}{5})}$	0.679
8	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^8} \right)^{\frac{2}{6}} dt$	$\frac{6}{8} \left( \frac{t}{1+t^8} \right)^{\frac{8}{6}} (1+t^8)^{\frac{8}{6}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{6}, \frac{2}{6}; \frac{7}{6}; -x^8 \right)$	$\frac{\Gamma(\frac{1}{6})^2}{8\Gamma(\frac{2}{6})}$	0.723
9	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^9} \right)^{\frac{2}{7}} dt$	$\frac{7}{9} \left( \frac{t}{1+t^9} \right)^{\frac{9}{7}} (1+t^9)^{\frac{9}{7}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{7}, \frac{2}{7}; \frac{8}{7}; -x^9 \right)$	$\frac{\Gamma(\frac{1}{7})^2}{9\Gamma(\frac{2}{7})}$	0.756
10	$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^{10}} \right)^{\frac{2}{8}} dt$	$\frac{8}{10} \left( \frac{t}{1+t^{10}} \right)^{\frac{10}{8}} (1+t^{10})^{\frac{10}{8}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{8}, \frac{2}{8}; \frac{9}{8}; -x^{10} \right)$	$\frac{\Gamma(\frac{1}{8})^2}{10\Gamma(\frac{2}{8})}$	0.783

表 1  $3 \leq n \leq 10$  に対する計算結果のまとめ



n に対する一般解は、

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{1+t^n} \right)^{\frac{2}{n-2}} dt = \frac{n-2}{n} \left( \frac{t}{1+t^n} \right)^{\frac{n}{n-2}} (t^n + 1)^{\frac{n}{n-2}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{n-2}, \frac{2}{n-2}; \frac{n-1}{n-2}; -x^n \right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n-2}\right)^2}{n\Gamma\left(\frac{2}{n-2}\right)} \text{ となる。}$$

100 までの n について面積 S を計算すると以下の表のとおりになった。そのグラフを図 3 に示す。

n	S
3	0.16667
4	0.39228
5	0.52999
6	0.61843
7	0.67868
8	0.72286
9	0.75643
10	0.78277
20	0.87974
30	0.91257
40	0.92855
50	0.93801
100	0.95674

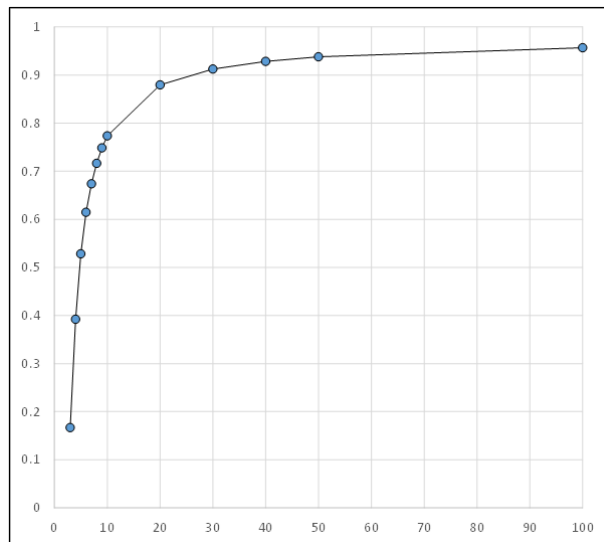
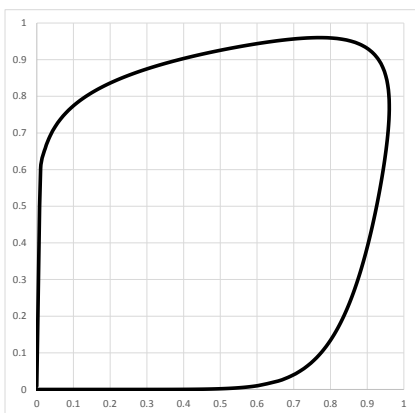


図 3 n と面積の関係

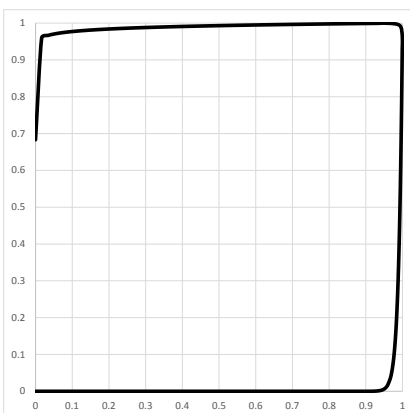
興味本位に、 $x^{10} + y^{10} = xy$ ,  $x^{100} + y^{100} = xy$ ,  $x^{1000} + y^{1000} = xy$

を計算し、曲線を描くと図 4 のようになった。

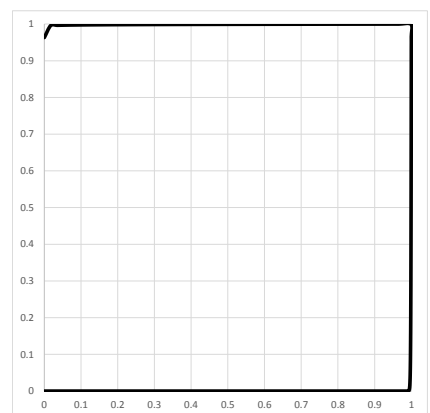
図 4 をみると、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $S \rightarrow 1$  に限りなく近づくのではないかと予想できる。



$x^{10} + y^{10} = xy$  のグラフ



$x^{100} + y^{100} = xy$  のグラフ



$x^{1000} + y^{1000} = xy$  のグラフ

図 4

見た目はとてもシンプルな式  $x^3 + y^3 = xy$  に潜む難問と向き合い、いろいろな手段を尽くして解答にたどり着く喜び。

そして、問題を一般化して拡張を考えてみることの面白さ、それらの途中で出会う新たな定理や法則、ソフトウェアなど、数学の奥深さと楽しさに充分浸ることができた。

## 後日談

Wolfram Alpha という凄い数理ソフトがネット上で公開されていることを知った。

それで試してみると、

$$S = \int_0^1 X \sqrt{\frac{-X+1}{3X+1}} dX = \left[ -\frac{1}{6}(1-X)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3X+1} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad \text{と簡単に解が求められた。}$$

何日もかかって計算した積分は、呆気なくほんの数秒でできてしまうのであった。

その上  $-\frac{1}{6}(1-X)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3X+1}$  という積分結果は、私の計算した結果よりずっとシンプルなものである。しかし、どんなに複雑な式でも計算が間違っていなければ同じ答えになることに面白さを感じる。表 1 において、 $n=5$  以上の場合については初等関数による解はない。例えば  $n=5$  では、

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \frac{t}{1+t^5} \right)^{\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{5} \left( \frac{t}{1+t^5} \right)^{\frac{5}{3}} (1+t^5)^{\frac{5}{3}} \cdot {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -x^5 \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 0.530 \quad \text{という結果である。}$$

${}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -x^5\right)$  は超幾何関数といい無限級数の和で表される。

今回は定積分で  $\Gamma$  関数 (ガンマ関数; 階乗を一般化したもの) として表され数値が得られた。

$n=5$  以上の結果は Wolfram Alpha で求めたものである。

(2015. 08. 30)