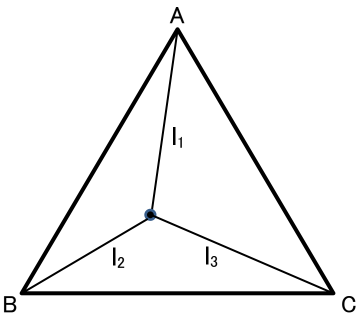
６０「計算を楽しむ」

ここ数ヶ月、時間のある時は自分好みの問題を解いている。今まで整数論を勉強してきてしばらく難しい記号から離れたくなったこともあるだろう。時間の許す限りずっと考えているが頭はほとんど疲れない。これは本当に楽しいからだろう。身体と眼は疲れるけれど。

今回は「あなたは数学者」（David Wells 著）という本にあった問題について書いてみたい。

問 題

正三角形の中に点が１つある。３つの頂点までの距離がわかっているとき、正三角形の辺の長さはどのようにしてわかるか？



この問題、一見簡単そうに見えたがそうでもなかった。

図１のように求める三角形ＡＢＣの１辺の長さをxとして、$\angle \mathrm{AOB}=\theta_1$，$\angle \mathrm{BOC}=\theta_2$，$\angle \mathrm{COA}=\theta_3$とすると余弦定理により次の式が成り立つ。

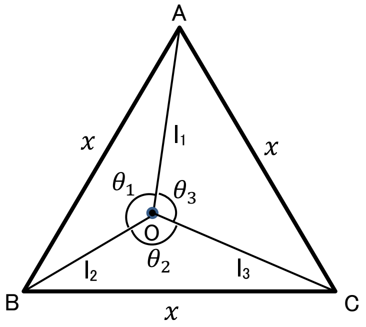


図１

$$\cos\theta_1=\frac{{l_1}^2+{l_2}^2-x^2}{2l_1l_2} \qquad \text{----------------------------}1-(1)$$

$$\cos\theta_2=\frac{{l_2}^2+{l_3}^2-x^2}{2l_2l_3} \qquad \text{----------------------------}1-(2)$$

$$\cos\theta_3=\frac{{l_3}^2+{l_1}^2-x^2}{2l_3l_1} \qquad \text{----------------------------}1-(3)$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=2\pi \qquad \text{----------------------------}1-(4)$$

未知数が４つ（$x,\theta_1,\theta_2,\theta_3$）式が４つなので、これを解けば$x$が求まるはずなのだが、これがどうしても解けない。

次に△ＡＯＢ，△ＢＯＣ，△ＣＯＡそれぞれの面積をS_1，S_2，S_3として、ヘロンの公式を用いて式をたてる。

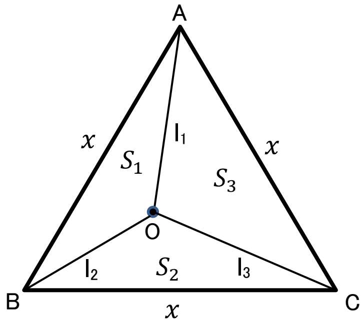


図２

$$S_1=\frac{1}{4}\sqrt{(l_1+l_2+x)(-l_1+l_2+x)(l_1-l_2+x)(l_1+l_2-x)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(l_1+l_2)^2-x^2]\cdot[-(l_1-l_2)^2+x^2]} \qquad \text{--------------}2-(1)$$

同様に、

$$S_2=\frac{1}{4}\sqrt{[(l_2+l_3)^2-x^2]\cdot[-(l_2-l_3)^2+x^2]} \qquad \text{--------------}2-(2)$$

$$S_3 = \frac{1}{4}\sqrt{[(l_3+l_1)^2 - x^2]\cdot[-(l_3-l_1)^2 + x^2]} \qquad \text{--------------}2-(3)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{4}x^2 \qquad \text{--------------}2-(4)$$

であるから 2－(1)，2－(2)，2－(3)，2－(4)を合成して、

$$\sqrt{[(l_1+l_2)^2 - x^2]\cdot[-(l_1-l_2)^2 + x^2]} + \sqrt{[(l_2+l_3)^2 - x^2]\cdot[-(l_2 \pm)^2 + x^2]} + \sqrt{[(l_3+l_1)^2 - x^2]\cdot[-(l_3-l_1)^2 + x^2]}$$

$$= \sqrt{3}x^2 \qquad \text{--------------}2-(5)$$

をxの方程式として解けばよいが、これもそう簡単には解けない。

以上２つの方法は、三角形全体に着目して式をたてたことが良くなかったのである。
このあと、いろいろ試行錯誤を繰り返し正三角形の１つの角度が 60°（$\frac{\pi}{3}$)であることを利用する方法で突破口が見つかった。

∠ ABO $= \theta_1$，∠ CBO $= \theta_2$とすると、

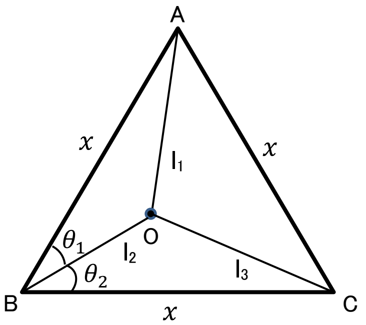


図３

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3} \qquad \text{--------------------------}3-(1)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x} \qquad \text{--------------------------}3-(2)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2x} \qquad \text{--------------------------}3-(3)$$

未知数はx, θ_1, θ_2の３つ、式は比較的簡単な式だから解けるはずである。

$\cos\theta_2 = \cos(\frac{\pi}{3} - \theta_1) = \frac{1}{2}\cos\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta_1$，　$\frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta_1 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2x} - \frac{1}{2}\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x}$

$= \frac{x^2 + {l_1}^2 + {l_2}^2 - 2{l_3}^2}{4l_2x}$　　従って、$sin\theta_1 = \frac{x^2 + {l_1}^2 + {l_2}^2 - 2{l_3}^2}{2\sqrt{3}l_2x}$

$sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1 = 1$ より、

$$\left[\frac{x^2 + {l_1}^2 + {l_2}^2 - 2{l_3}^2}{2\sqrt{3}l_2x}\right]^2 + \left[\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x}\right]^2 = 1 \qquad \text{--------------------------}3-(4)$$

式 3－(4)をxについて整理すると、

$$x^4 - \left({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2\right)x^2 + \left[({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4) - ({l_1}^2{l_2}^2 + {l_2}^2{l_3}^2 + {l_3}^2{l_1}^2)\right] = 0 \qquad \text{----------------}3-(5)$$

を得る。3－(5)は（x^2）についての２次方程式なので、これを解いて

$$x = \sqrt{\frac{{l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{12\left({l_1}^2{l_2}^2 + {l_2}^2{l_3}^2 + {l_3}^2{l_1}^2\right)}{\left({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2\right)^2} - 3}\right]} \qquad \text{--------------------------}3-(6)$$

これが求める解である。

また 3－(5)を変形していくと、

$$3({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4 + x^4) = ({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2 + x^2)^2 \qquad \text{--------------------------}3-(7)$$

という美しい式が得られる。この式はl_1， l_2， l_3ばかりでなくxも含めた対称式となっている。

問題を発展させて三角形の次は四角形である。同様の方法でやってみる。

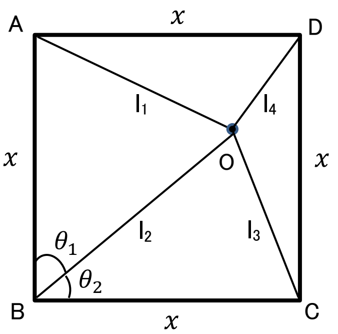


図４

$\angle$ ABO $= \theta_1$，$\angle$ CBO $= \theta_2$とすると、

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{-------------------------} 4-(1)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2 x} \qquad \text{-------------------------} 4-(2)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2 x} \qquad \text{-------------------------} 4-(3)$$

$$\cos\theta_2 = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_1) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta_1 + \sin\frac{\pi}{2} sin\theta_1 = sin\theta_1 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2 x}$$

$sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1 = 1$ より、

$$\left[\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2 x}\right]^2 + \left[\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2 x}\right]^2 = 1 \qquad \text{-------------------------} 4-(4)$$

4－(4)を変形してxについて整理すると、

$$2x^4 - 2({l_1}^2 + {l_3}^2)x^2 + ({l_1}^4 + 2{l_2}^4 + {l_3}^4 - 2{l_1}^2{l_2}^2 - 2{l_2}^2{l_3}^2) = 0 \qquad \text{-------------------------} 4-(5)$$

同様に$\angle$ BCO $= \theta_1$，$\angle$ DCO $= \theta_2$、さらに$\angle$ CDO $= \theta_1$，$\angle$ ADO $= \theta_2$、、、として計算すると、

頂点C，D，Aに対し方程式

$$2x^4 - 2({l_2}^2 + {l_4}^2)x^2 + ({l_2}^4 + 2{l_3}^4 + {l_4}^4 - 2{l_2}^2{l_3}^2 - 2{l_3}^2{l_4}^2) = 0 \qquad \text{-------------------------} 4-(6)$$

$$2x^4 - 2({l_3}^2 + {l_1}^2)x^2 + ({l_3}^4 + 2{l_4}^4 + {l_1}^4 - 2{l_3}^2{l_4}^2 - 2{l_4}^2{l_1}^2) = 0 \qquad \text{-------------------------} 4-(7)$$

$$2x^4 - 2({l_4}^2 + {l_2}^2)x^2 + ({l_4}^4 + 2{l_1}^4 + {l_2}^4 - 2{l_4}^2{l_1}^2 - 2{l_1}^2{l_2}^2) = 0 \qquad \text{-------------------------} 4-(8)$$

を得る。

4－(5)，4－(6)，4－(7)，4－(8)をすべて加えて、

$$8x^4 - 4({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2 + {l_4}^2)x^2 + 4({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4 + {l_4}^4 - {l_1}^2{l_2}^2 - {l_2}^2{l_3}^2 - {l_3}^2{l_4}^2 - {l_4}^2{l_1}^2) = 0$$

４で割って次式を得る。

$$2x^4 - ({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_4}^2 + {l_3}^2)x^2 + [({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4 + {l_4}^4) - ({l_1}^2{l_2}^2 + {l_2}^2{l_3}^2 + {l_3}^2{l_4}^2 + {l_4}^2{l_1}^2)] = 0$$

-------------------------4－(9)

4－(9)は（x^2）についての２次方程式なので、これを解いて

$$x = \sqrt{\frac{({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2 + {l_4}^2) + \sqrt{-7({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4 + {l_4}^4) + 10({l_1}^2{l_2}^2 + {l_2}^2{l_3}^2 + {l_3}^2{l_4}^2 + {l_4}^2{l_1}^2) + 2({l_1}^2{l_3}^2 + {l_2}^2{l_4}^2)}}{4}}$$

-------------------------4－(10)

これが求める解である。

4－(9)式を変形してみたが、三角形の場合に導かれた

$3({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4 + x^4) = ({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2 + x^2)^2$というような美しい関係、例えば

$4({l_1}^4 + {l_2}^4 + {l_3}^4 + {l_4}^4 + x^4) = ({l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2 + {l_4}^2 + x^2)^2$ は存在しないことがわかった。

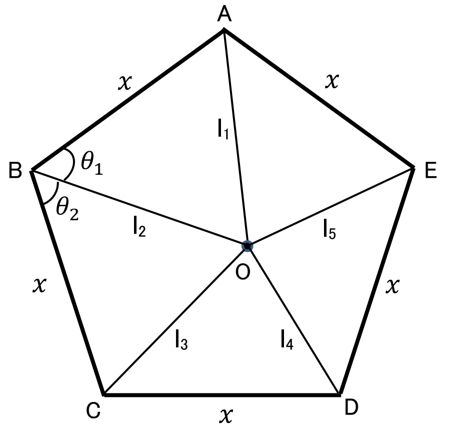


図５

次に五角形について。

基本的な考え方は、三角形，四角形と同じである。

∠ ABO $= \theta_1$，∠ CBO $= \theta_2$とすると、

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{3\pi}{5} \qquad \text{---------------------------5－(1)}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x} \qquad \text{---------------------------5－(2)}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2x} \qquad \text{---------------------------5－(3)}$$

$$\cos\theta_2 = \cos(\frac{3\pi}{5} - \theta_1) = \cos\frac{3\pi}{5}\cos\theta_1 + \sin\frac{3\pi}{5}sin\theta_1$$

$sin\frac{3\pi}{5}$，$cos\frac{3\pi}{5}$は三角形、四角形の場合と異なり無理数になるので、$sin\frac{3\pi}{5} = k_1$，$cos\frac{3\pi}{5} = k_2$

とおいて、

$k_1 sin\theta_1 + k_2 cos\theta_1 = \frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2x}$　これから、$sin\theta_1 = \frac{1}{k_1}\cdot\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2x} - \frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x}$

$sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1 = 1$ より、

$$\left[\frac{1}{k_1}\cdot\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_3}^2}{2l_2x} - \frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x}\right]^2 + \left[\frac{x^2 + {l_2}^2 - {l_1}^2}{2l_2x}\right]^2 = 1 \qquad \text{---------------------------5－(4)}$$

5－(4)を変形してxについて整理すると、

$$2(1-k_2)x^4 - \left[2(1-k_2){l_1}^2 + 4k_2(1-k_2){l_2}^2 + 2(1-k_2){l_3}^2\right]x^2 + \left[{l_1}^4 + 2(1-k_2){l_2}^4 + {l_3}^4\right]$$
$$-\left[2(1-k_2){l_1}^2{l_2}^2 + 2(1-k_2){l_2}^2{l_3}^2 + 2k_2{l_3}^2{l_1}^2\right] = 0$$

---------------------------5－(5)

四角形の場合と同様に∠ BCO $= \theta_1$，∠ DCO $= \theta_2$、さらに∠ CDO $= \theta_1$，∠ EDO $= \theta_2$、、、、として計算すると、

$$2(1-k_2)x^4 - \left[2(1-k_2){l_2}^2 + 4k_2(1-k_2){l_3}^2 + 2(1-k_2){l_4}^2\right]x^2 + \left[{l_2}^4 + 2(1-k_2){l_3}^4 + {l_4}^4\right]$$
$$-\left[2(1-k_2){l_2}^2{l_3}^2 + 2(1-k_2){l_3}^2{l_4}^2 + 2k_2{l_4}^2{l_2}^2\right] = 0$$

$$2(1-k_2)x^4 - \left[2(1-k_2){l_3}^2 + 4k_2(1-k_2){l_4}^2 + 2(1-k_2){l_5}^2\right]x^2 + \left[{l_3}^4 + 2(1-k_2){l_4}^4 + {l_5}^4\right]$$
$$-\left[2(1-k_2){l_3}^2{l_4}^2 + 2(1-k_2){l_4}^2{l_5}^2 + 2k_2{l_5}^2{l_3}^2\right] = 0$$

$$2(1-k_2)x^4 - \left[2(1-k_2){l_4}^2 + 4k_2(1-k_2){l_5}^2 + 2(1-k_2){l_1}^2\right]x^2 + \left[{l_4}^4 + 2(1-k_2){l_5}^4 + {l_1}^4\right]$$
$$-\left[2(1-k_2){l_4}^2{l_5}^2 + 2(1-k_2){l_5}^2{l_1}^2 + 2k_2{l_1}^2{l_4}^2\right] = 0$$

$$2(1-k_2)x^4 - \left[2(1-k_2){l_5}^2 + 4k_2(1-k_2){l_1}^2 + 2(1-k_2){l_2}^2\right]x^2 + \left[{l_5}^4 + 2(1-k_2){l_1}^4 + {l_2}^4\right]$$
$$-\left[2(1-k_2){l_5}^2{l_1}^2 + 2(1-k_2){l_1}^2{l_2}^2 + 2k_2{l_5}^2{l_1}^2\right] = 0$$

-------------------5－(6),(7),(8),(9)

5－(5),(6),(7),(8),(9)をすべて加えて係数を整理すると、

$$5(1-k_2)x^4 - 2\left(1-{k_2}^2\right)\left({l_1}^2 + {l_2}^2 + \cdots {l_5}^2\right)x^2 + (2-k_2)\left({l_1}^4 + {l_2}^4 + \cdots {l_5}^4\right)$$
$$-2(1-k_2)\left({l_1}^2{l_2}^2 + {l_2}^2{l_3}^2 + {l_3}^2{l_4}^2 + {l_4}^2{l_5}^2 + {l_5}^2{l_1}^2\right) - k_2({l_1}^2{l_3}^2 + {l_2}^2{l_4}^2 + {l_3}^2{l_5}^2 + {l_4}^2{l_1}^2$$
$$+ {l_5}^2{l_2}^2) = 0 \qquad \text{---------------------------5－(10)}$$

五角形になっても（x^2）についての２次方程式であることは変わらない。
ただし、定数項はだんだん複雑になっていき美しい式にはならない。

$k_2 = cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$を入れて方程式を解くと次のようになった。

$$x = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})\,(l_1{}^2 + \cdots + l_5{}^2) + \sqrt{10}\sqrt{-(49+19\sqrt{5})(l_1{}^4 + \cdots + l_5{}^4) + 2(31+13\sqrt{5})(l_1{}^2 l_2{}^2 + l_2{}^2 l_3{}^2 + \cdots + l_5{}^2 l_1{}^2) + 2(1-\sqrt{5})(l_1{}^2 l_3{}^2 + l_2{}^2 l_4{}^2 + \cdots + l_5{}^2 l_2{}^2)}}{10(3+\sqrt{5})}} \qquad \text{-----------------------------}5-(11)$$

計算は大変だが必ず解を求めることができる。
　次は六角形について。　同じように、

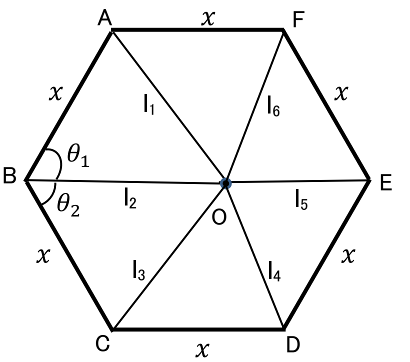


図６

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{-----------------------------}6-(1)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x^2 + l_2{}^2 - l_1{}^2}{2l_2 x} \qquad \text{-----------------------------}6-(2)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + l_2{}^2 - l_3{}^2}{2l_2 x} \qquad \text{-----------------------------}6-(3)$$

$\cos\theta_2 = \cos(\frac{2\pi}{3} - \theta_1) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\theta_1 + \sin\frac{2\pi}{3} sin\theta_1 = -\frac{1}{2}\cos\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} sin\theta_1 = \frac{x^2 + l_2{}^2 - l_3{}^2}{2l_2 x}$

$$sin\theta_1 = \frac{x^2 + l_2{}^2 - l_3{}^2}{\sqrt{3} l_2 x} + \frac{x^2 + l_2{}^2 - l_1{}^2}{2\sqrt{3} l_2 x}$$

$sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1 = 1$ より、

$$\left[\frac{x^2 + l_2{}^2 - l_3{}^2}{\sqrt{3} l_2 x} + \frac{x^2 + l_2{}^2 - l_1{}^2}{2\sqrt{3} l_2 x}\right]^2 + \left[\frac{x^2 + l_2{}^2 - l_1{}^2}{2l_2 x}\right]^2 = 1 \qquad \text{-----------------------------}6-(4)$$

6－(4)を変形してxについて整理すると、
$3x^4 - 3(-l_1{}^2 + l_2{}^2 - l_3{}^2)x^2 + (l_1{}^4 + 3l_2{}^4 + l_5{}^4) - (3l_1{}^2 l_2{}^2 + 3l_2{}^2 l_3{}^2 - l_3{}^2 l_1{}^2) = 0$ となる。
$l_1 \to l_2$，$l_2 \to l_3$，$l_3 \to l_4$，$l_4 \to l_5$，$l_5 \to l_6$，$l_6 \to l_1$と l を次々に入れ替えて得られる６つの式を加えて整理すると次式が導かれる。

$$18x^4 - 3(l_1{}^2 + l_2{}^2 + \cdots l_6{}^2)x^2 + 5(l_1{}^4 + l_2{}^4 + \cdots l_6{}^4) - 6(l_1{}^2 l_2{}^2 + l_2{}^2 l_3{}^2 + l_3{}^2 l_4{}^2 + l_4{}^2 l_5{}^2 + l_5{}^2 l_6{}^2 + l_6{}^2 l_1{}^2) + (l_1{}^2 l_3{}^2 + l_2{}^2 l_4{}^2 + l_3{}^2 l_5{}^2 + l_4{}^2 l_6{}^2 + l_5{}^2 l_1{}^2 + l_6{}^2 l_2{}^2) = 0 \qquad \text{----------------}6-(5)$$

これを解いて、

$$x = \sqrt{\frac{2(l_1{}^2 + \cdots + l_6{}^2) + \sqrt{-39(l_1{}^4 + \cdots + l_6{}^4) + 50(l_1{}^2 l_2{}^2 + \cdots + l_6{}^2 l_1{}^2) - 6(l_1{}^2 l_3{}^2 + \cdots + l_6{}^2 l_2{}^2) + (l_1{}^2 l_4{}^2 + \cdots + l_6{}^2 l_3{}^2)}}{24}} \qquad \text{----------------}6-(6)$$

ここまでくると１つのパターンが見えてくる。

x^4の係数；l に関係なく多角形の内角のみによって決まる

x^2の係数；内部の点Ｏから、各頂点への長さの２乗和によって決まる　$({l_1}^2+{l_2}^2+\cdots)$

定数項　；３種類の和で表される

　　　　ｲ：Ｏから各頂点への長さの４乗和　$({l_1}^4+{l_2}^4+\cdots)$

　　　　ﾛ：Ｏから各頂点への隣り合う長さの２乗積和　$({l_1}^2{l_2}^2+{l_2}^2{l_3}^2+\cdots)$

　　　　ﾊ：Ｏから各頂点への１つおきの長さの２乗積和　$({l_1}^2{l_3}^2+{l_2}^2{l_4}^2+\cdots)$

以上の関係を考えながら、一般化してｎ角形の場合について式を導く。

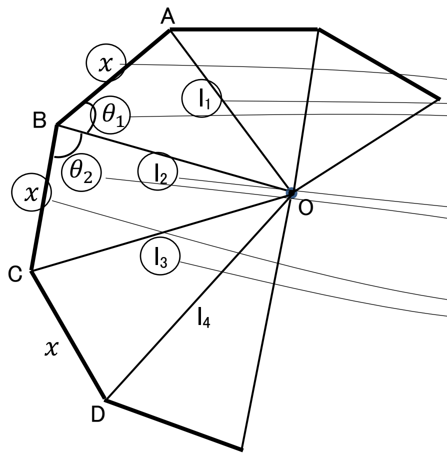


図７

式は点Ｂから始めて、各頂点に対して１つの方程式ができる。

$$\theta_1+\theta_2=\frac{n-2}{\mathrm{n}}\pi=\pi-\frac{2}{\mathrm{n}}\pi \qquad \text{---------------------------7−(1)}$$

$$\cos\theta_1=\frac{x^2+{l_2}^2-{l_1}^2}{2l_2x} \qquad \text{---------------------------7−(2)}$$

$$\cos\theta_2=\frac{x^2+{l_2}^2-{l_3}^2}{2l_2x} \qquad \text{---------------------------7−(3)}$$

$$\cos\theta_2=\cos\left[\pi-\frac{2\pi}{\mathrm{n}}-\theta_1\right]=\cos\left[\pi-(\frac{2\pi}{\mathrm{n}}+\theta_1)\right]=-\cos(\frac{2\pi}{\mathrm{n}}+\theta_1)$$

$$=-\cos\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\cos\theta_1+sin\frac{2\pi}{\mathrm{n}}sin\theta_1=\frac{x^2+{l_2}^2-{l_3}^2}{2l_2x}$$

$$sin\theta_1=\frac{1}{sin\frac{2\pi}{\mathrm{n}}}\left[\frac{x^2+{l_2}^2-{l_3}^2}{2l_2x}+\cos\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\cdot\frac{x^2+{l_2}^2-{l_1}^2}{2l_2x}\right]$$

$sin^2\theta_1+cos^2\theta_1=1$ より、

$$\left[\left(\frac{1}{sin\frac{2\pi}{\mathrm{n}}}\right)\left(\frac{x^2+{l_2}^2-{l_3}^2}{2l_2x}+\cos\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\cdot\frac{x^2+{l_2}^2-{l_1}^2}{2l_2x}\right)\right]^2+\left[\frac{x^2+{l_2}^2-{l_1}^2}{2l_2x}\right]^2=1 \qquad \text{----------------7−(4)}$$

$sin\frac{2\pi}{\mathrm{n}}=h_1$，$cos\frac{2\pi}{\mathrm{n}}=h_2$ と置き展開して整理すると、

$$2(1+h_2)x^4-\left[2(1+h_2){l_1}^2-2\left\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\right\}{l_2}^2+2(1+h_2){l_3}^2\right]x^2+\left[{l_1}^4+2(1+h_2){l_2}^4+{l_3}^4\right]$$
$$-2\left[(1+h_2){l_1}^2{l_2}^2+(1+h_2){l_2}^2{l_3}^2-h_2{l_3}^2{l_1}^2\right]=0$$

----------------7−(5)

同様にＣ点，Ｄ点，Ｅ点､､､､と式を作りx^4とx^2の係数をまとめると表１のようになる。

点	x^4の係数	x^2の係数					
		${l_1}^2$	${l_2}^2$	${l_3}^2$	${l_4}^2$		${l_n}^2$
A	$2(1+h_2)$	$-2(1+h_2)$	$2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}$	$-2(1+h_2)$		·····	
B	$2(1+h_2)$		$-2(1+h_2)$	$2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}$	$-2(1+h_2)$	·····	
C	$2(1+h_2)$			$-2(1+h_2)$	$2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}$	·····	
D	$2(1+h_2)$				$-2(1+h_2)$	·····	
⋮			⋮		⋮		⋮
	$2(1+h_2)$	$-2(1+h_2)$				·····	$2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}$
	$2(1+h_2)$	$2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}$	$-2(1+h_2)$				$-2(1+h_2)$

表１（x^4，x^2の係数）

表１から分かるように、x^4の係数をすべて加えるとは$2n(1+h_2)$となる。

x^2の係数については、${l_1}^2$，${l_2}^2$，${l_3}^2$、、、、のそれぞれについて、$-2(1+h_2)$が２回，$2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}$が１回現れるので、すべて加えると、

$-2(1+h_2)\times 2+2\{(1+h_2)^2-{h_1}^2\}=2({h_2}^2-{h_1}^2-1)$，ここで${h_1}^2+{h_2}^2=1$だから

$2({h_2}^2-{h_1}^2-1)=2({h_2}^2+{h_2}^2-{h_2}^2-{h_1}^2-1)=2({h_2}^2+{h_2}^2-1-1)=-4(1-{h_2}^2)$となる。

従って、x^2の係数は、$-4(1-{h_2}^2)({l_1}^2+{l_2}^2+\cdots{l_n}^2)$となる。

定数項については３種類の和で表され、同様のやり方で計算すると、

- ４乗和の項；１が２回、$2(1+h_2)$が１回現れ、$2(2+h_2)({l_1}^4+{l_2}^4+{l_3}^4\cdots)$
- 隣り合う長さの２乗積和；${l_1}^2{l_2}^2$，${l_2}^2{l_3}^2$，${l_3}^2{l_4}^2$、、、、のそれぞれについて$-2(1+h_2)$が２回ずつ現れるので、$-4(1+h_2)({l_1}^2{l_2}^2+{l_2}^2{l_3}^2+{l_3}^2{l_4}^2+\cdots$
- １つおきの長さの２乗積和；${l_1}^2{l_3}^2$，${l_2}^2{l_4}^2$，${l_3}^2{l_5}^2\cdots$のそれぞれについて$2h_2$が１回ずつ現れるので、$2h_2({l_1}^2{l_3}^2+{l_2}^2{l_4}^2+{l_3}^2{l_5}^2+\cdots)$

以上すべてをまとめ全体を２で割ると次式を得る。

$$\begin{aligned}&\mathrm{n}(1+h_2)x^4-2(1-{h_2}^2)({l_1}^2+{l_2}^2+\cdots{l_n}^2)x^2\\&\quad+\left[(2+h_2)\left({l_1}^4+{l_2}^4+{l_3}^4\cdots\right)-2(1+h_2)({l_1}^2{l_2}^2+{l_2}^2{l_3}^2+{l_3}^2{l_4}^2+\cdots)+h_2({l_1}^2{l_3}^2\right.\\&\quad\left.+{l_2}^2{l_4}^2+{l_3}^2{l_5}^2+\cdots)\right]=0\end{aligned}$$ ----------------7－(6)

ここで検算のため、l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，$\cdots\cdots=1$（点０がｎ角形の中心にある場合）と置いて方程式を解きｘを求めてみる。

7－(6)式に$l_1=l_2=l_3=l_4=l_5=\cdots\cdots l_n=1$を入れると、

$\mathrm{n}(1+h_2)x^4-2n(1-{h_2}^2)x^2+[n(2+h_2)-2n(1+h_2)+nh_2]=0$

定数項は０になり、

$\mathrm{n}(1+h_2)x^4-2n(1-{h_2}^2)x^2=0$ これを解いて正ｎ角形の１辺の長さは、

$$x=\sqrt{2\frac{1-{h_2}^2}{1+h_2}}=\sqrt{2\frac{(1+h_2)(1-h_2)}{(1+h_2)}}=\sqrt{2(1-h_2)}$$ となる。　$h_2=\cos\frac{2\pi}{\mathrm{n}}$だから、

$$x=\sqrt{2(1-h_2)}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)}=\sqrt{2\left(1-2cos^2\frac{\pi}{\mathrm{n}}+1\right)}=\sqrt{4\left(1-cos^2\frac{\pi}{\mathrm{n}}\right)}=2\sin\frac{\pi}{\mathrm{n}}$$

図８はｎ角形の１辺と内角の関係を示すが、この図より辺xの長さは$l_n\sin\frac{\pi}{\mathrm{n}}\times 2=2\sin\frac{\pi}{\mathrm{n}}$となり、$\sqrt{2(1-h_2)}$に一致する。

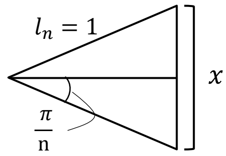


図８　ｎ角形の１辺と内角

7－(6)の解を示すと、

$$x=\sqrt{\frac{(1-{h_2}^2)\left({l_1}^2+\cdots+{l_n}^2\right)+\sqrt{(\quad A\quad)+(\quad B\quad)+(\quad C\quad)+(\quad D\quad)}}{\mathrm{n}(1+h_2)}} \quad ----------7－(7)$$

となる。ここで、

$(\quad A\quad)=\left[{h_2}^4-(2+n){h_2}^2-3nh_2+(1-2n)\right]({l_1}^4+{l_2}^4+\cdots{l_n}^4)$

$(\quad B\quad)=2\left[{h_2}^4-(2-n){h_2}^2+2nh_2+(1+n)\right]({l_1}^2{l_2}^2+{l_2}^2{l_3}^2+\cdots+{l_n}^2{l_1}^2)$

$(\quad C\quad)=\left[2{h_2}^4-(4+n){h_2}^2-nh_2+2\right]({l_1}^2{l_3}^2+{l_2}^2{l_4}^2+\cdots+{l_{n-1}}^2{l_1}^2+{l_n}^2{l_2}^2)$

$(\quad D\quad)=\left(1-{h_2}^2\right)^2({l_1}^2{l_4}^2+\cdots+{l_{n-3}}^2{l_n}^2+{l_1}^2{l_5}^2+\cdots+{l_{n-4}}^2{l_n}^2+\cdots+{l_1}^2{l_{n-3}}^2+\cdots+{}_4{}^2{l_n}^2$
$\qquad+\cdots+{l_1}^2{l_{n-2}}^2+\cdots+{l_3}^2{l_n}^2$

である。

式 7－(7)の√内（　A　），（　B　），（　C　），（　D　）は$\left({l_1}^2+{l_2}^2+\cdots+{l_n}^2\right)$を２乗することによってできる項で、表２に示すように、

（　A　）が４乗和の項
（　B　）が隣り合う長さの２乗積和の項
（　C　）が１つおきの長さの２乗積和の項
（　D　）がそれ以外の項

である。

（　D　）の項の数は$\mathrm{n}(n-5)$となり、ｎ≦5 のときは 0 であるが、ｎが大きくなると急激に増えていく。

(A)(B)(C)　　　　　　　　　　　　　　(D)

	$l_1{}^2$	$l_2{}^2$	$l_3{}^2$	$l_4{}^2$	$l_5{}^2$	···	···	···	$l_{n-3}{}^2$	$l_{n-2}{}^2$	$l_{n-1}{}^2$	$l_n{}^2$
$l_1{}^2$	$l_1{}^2l_1{}^2$	$l_1{}^2l_2{}^2$	$l_1{}^2l_3{}^2$	$l_1{}^2l_4{}^2$	$l_1{}^2l_5{}^2$	···	···	···	$l_1{}^2l_{n-3}{}^2$	$l_1{}^2l_{n-2}{}^2$	$l_1{}^2l_{n-1}{}^2$	$l_1{}^2l_n{}^2$
$l_2{}^2$	$l_2{}^2l_1{}^2$	$l_2{}^2l_2{}^2$	$l_2{}^2l_3{}^2$	$l_2{}^2l_4{}^2$	$l_2{}^2l_5{}^2$					$l_2{}^2l_{n-2}{}^2$	$l_2{}^2l_{n-1}{}^2$	$l_2{}^2l_n{}^2$
$l_3{}^2$	$l_3{}^2l_1{}^2$	$l_3{}^2l_2{}^2$	$l_3{}^2l_3{}^2$	$l_3{}^2l_4{}^2$							$l_3{}^2l_{n-1}{}^2$	$l_3{}^2l_n{}^2$
$l_4{}^2$	$l_4{}^2l_1{}^2$	$l_4{}^2l_2{}^2$	$l_4{}^2l_3{}^2$									$l_4{}^2l_n{}^2$
$l_5{}^2$	$l_5{}^2l_1{}^2$	$l_5{}^2l_2{}^2$										
···												
···												
···	$l_{n-4}{}^2l_1{}^2$											
$l_{n-3}{}^2$	$l_{n-3}{}^2l_1{}^2$	$l_{n-3}{}^2l_2{}^2$										$l_{n-3}{}^2l_n{}^2$
$l_{n-2}{}^2$	$l_{n-2}{}^2l_1{}^2$	$l_{n-2}{}^2l_2{}^2$	$l_{n-2}{}^2l_3{}^2$								$l_{n-2}{}^2l_{n-1}$	$l_{n-2}{}^2l_n{}^2$
$l_{n-1}{}^2$	$l_{n-1}{}^2l_1{}^2$	$l_{n-1}{}^2l_2{}^2$	$l_{n-1}{}^2l_3{}^2$	$l_{n-1}{}^2l_4{}^2$						$l_{n-1}{}^2l_{n-2}{}^2$	$l_{n-1}{}^2l_{n-1}$	$l_{n-1}{}^2l_n{}^2$
$l_n{}^2$	$l_n{}^2l_1{}^2$	$l_n{}^2l_2{}^2$	$l_n{}^2l_3{}^2$	$l_n{}^2l_4{}^2$	$l_n{}^2l_5{}^2$				$l_n{}^2l_{n-3}{}^2$	$l_n{}^2l_{n-2}{}^2$	$l_n{}^2l_{n-1}{}^2$	$l_n{}^2l_n{}^2$

表２ $(l_1{}^2+l_2{}^2+\cdots+l_n{}^2)^2$による項

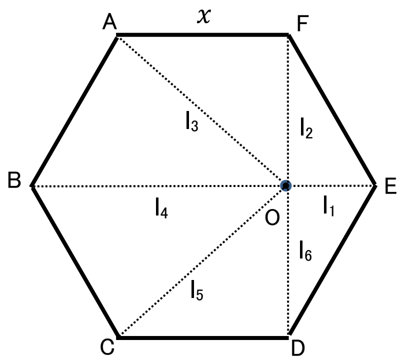


図９

ここで再度検算してみる。

点Ｏが多角形の中心にある場合だと√内が０になってしまうので、Ｏが図９の位置にある六角形で計算を行う。

$x=1$ のとき、$l_1=\dfrac{1}{2}$，　$l_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$l_3=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，　$l_4=\dfrac{3}{2}$，

$l_5=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，　$l_6=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので７－(7)に代入すると、

$$x=\sqrt{\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]+\sqrt{(\ \mathrm{A}\ )+(\ \mathrm{B}\ )+(\ \mathrm{C}\ )+(\ \mathrm{D}\ )}}{6\left(1+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$(\ \mathrm{A}\ )=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4-(2+6)\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot6\cdot\frac{1}{2}+(1-2\cdot6)\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right]$$

$$=-\frac{351}{16}\cdot\frac{198}{16}=-\frac{69498}{16^2}$$

$$(\quad B\quad) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - (2-6)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot 6\cdot \frac{1}{2} + (1+6)\right]\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{450}{16}\cdot\frac{174}{16} = \frac{78300}{16^2}$$

$$(\quad C\quad) = \left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 - (4+6)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\cdot\frac{1}{2} + 2\right]\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{54}{16}\cdot\frac{126}{16} = -\frac{6804}{16^2}$$

$$(\quad D\quad) = \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] = \frac{9}{16}\cdot\frac{102}{16} = \frac{918}{16^2}$$

よって、

$$\sqrt{(\quad A\quad)+(\quad B\quad)+(\quad C\quad)+(\quad D\quad)} = \sqrt{-\frac{69498}{16^2} + \frac{78300}{16^2} - \frac{6804}{16^2} + \frac{918}{16^2}} = \sqrt{\frac{2916}{16^2}} = \frac{54}{16}$$

$$x = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{30}{4} + \frac{54}{16}}{6\left(1+\frac{1}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{12^2}{4^2}\cdot\frac{1}{3^2}} = 1$$

となり、$x = 1$を得る。

中心からほんの少しずれた点なのに、計算はややこしく結構大変である。
$\sqrt{\ }$内は０でなく平方数となり、結果は$x = 1$に一致し７－（7）式の正しいことが確認できた。

正三角形の中の１点から各頂点に引いた線の長さから、正三角形の一辺の長さを求めるという単純な問題から、四角形，五角形、、、，ｎ角形と一般化してみた。

求める多角形の一辺の長さは、何角形になっても２次方程式を解きその平方根をとることで求められることが分かった。三角形の場合は、各頂点までの距離と辺の長さの間に美しい関係が成り立ったが、四角形，五角形、、、ではそれらの間に美しい関係は認められなかった。

この問題の一般解を導いたところでそれほど意味があるとは思えないが、どのような多角形になっても係数が複雑になるだけで、２次方程式で解くことができるのは興味深いことだと思う。

（２０１５．１１．０１）