６２「マルファッティの円」

１．マルファッティの問題

ほぼ半年この問題と格闘していた。この問題は『数学まちがい大全集』という本の中に見つけた。マルファッティ（1,737～1,807 年）の問題とは、

「与えられた三角形の内部に３つの円の面積が最大となるにはどのようにすれば良いか？」

というものである。

そもそもは、“三角形の断面をもつ石材からできるだけ大きな断面積の丸柱を切り出す”という問題だった。マルファッティは図１のように“３つの円がそれぞれ接し、各円が２辺に接している場合”と主張した。この場合与えられた三角形に対して、ただ１通りに３つの円の大きさが決まる。

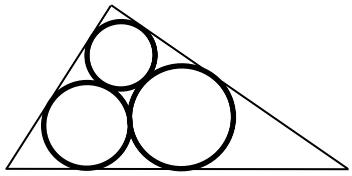

図１

後年、この問題に関するマルファッティの主張は誤りであることが指摘された。同じ三角形で図２（Ｂ－１）のようにすれば３つの円の面積の合計がより大きくなる。マルファッティを弁護するわけではないが、丸柱を切り出すということからすると、できるだけ似通ったサイズの方が本来の目的に合っているように思うがどうだろう？

マルファッティの場合をＡパターン、内接円を最大の円とする場合をＢパターンとし、結果のみを示すと表１のようになる。（３辺の長さの合計が「３」となるようにし正三角形と比較した）

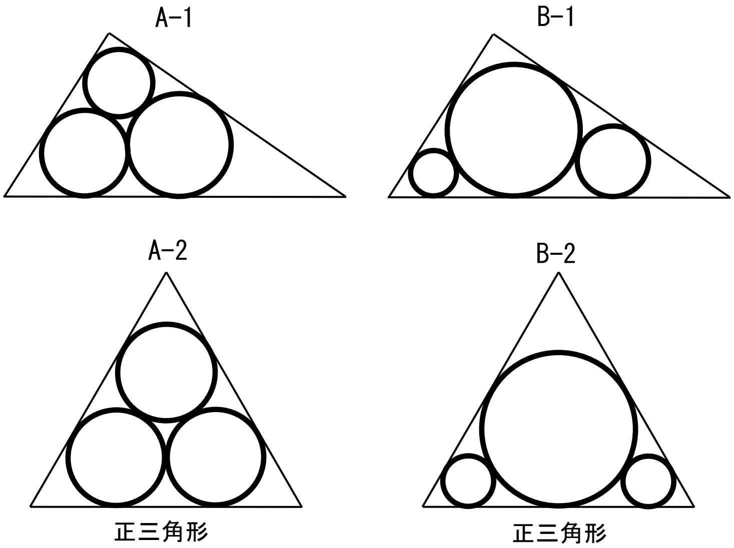

図２

表１を見ると、一般の三角形，正三角形いずれの場合もＢパターンの方が面積は大きくなることがわかる。

例えば、３辺の長さの合計が「３」の三角形で各辺が「1.3―0.4―1.3」の二等辺三角形の場合は、図３のようになり、明らかに右の方の合計面積が大きい。

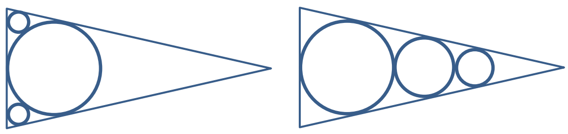

図３

		大きさ	面　積	面積比 (　)内は A-2 に対する比率
一　般	Ａ－１	1.2―1.0―0.8	0.273	0.913（0.864）
	Ｂ－１	同　上	0.299	1　（0.946）
正三角形	Ａ－２	1.0―1.0―1.0	0.316	1.057（　1　）
	Ｂ－２	同　上	0.320	1.070（1.013）

表１

さて、三角形の内部の３つの円の面積であるが、パターンＢの場合は比較的簡単である。

図４－１において、三角形ＡＢＣの３辺を、ＡＢ＝ａ，ＢＣ＝ｂ，ＣＡ＝ｃ，角∠ＢＡＣ＝α，ＣＢＡ＝β，ＡＣＢ＝γ、円の半径を大きい順から r_1, r_2, r_3, ･･･とする。

最も大きい円は内接円でありその半径は r_1 だから、

$$\frac{r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{r_1}{tan\frac{\beta}{2}}=\mathrm{a}\quad より$$

$$r_1=\frac{\mathrm{a}}{\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{tan\frac{\beta}{2}}}\qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

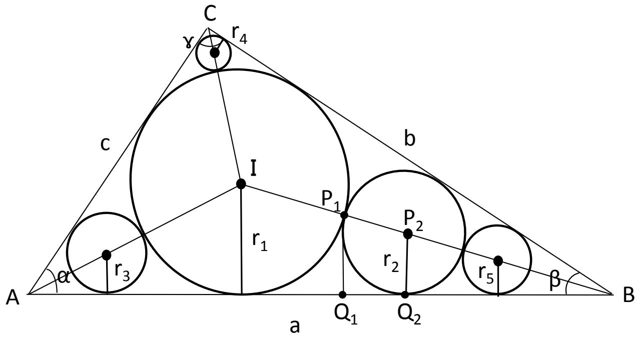

図４－１

第２，第３、、、の円の半径を r_2 ，r_3、、、とすると、

$$\frac{P_2B}{P_1B}=\frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}\ から\ \frac{\left(\frac{r_1}{sin\frac{\beta}{2}}-r_1\right)-r_2}{\frac{r_1}{sin\frac{\beta}{2}}-r_1}=\frac{r_2}{\left(\frac{r_1}{sin\frac{\beta}{2}}-r_1\right)sin\frac{\beta}{2}}\ ,これを解いて\ r_2=\frac{1-sin\frac{\beta}{2}}{1+sin\frac{\beta}{2}}r_1\ を得る。$$

同様の考え方で、 $r_3=\dfrac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}}r_1$ ， $r_4=\dfrac{1-sin\frac{\gamma}{2}}{1+sin\frac{\gamma}{2}}r_1$， $r_5=\dfrac{1-sin\frac{\beta}{2}}{1+sin\frac{\beta}{2}}r_2=\left(\dfrac{1-sin\frac{\beta}{2}}{1+sin\frac{\beta}{2}}\right)^2r_1$

となることから、r_2，r_3，r_4，r_5の中から上位２つを選べばよい。

r_2 ＞r_3となるのはどのような場合か？

$$\frac{1-sin\frac{\beta}{2}}{1+sin\frac{\beta}{2}}r_1>\frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}}r_1\ より、sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cdot cos\frac{\alpha+\beta}{4}>0,\ cos\frac{\alpha+\beta}{4}>0\ だから\ sin\frac{\alpha-\beta}{4}>0$$

であり $\alpha>\beta$ つまり、角度の小さい方に作られる円の面積が大きい。

次に r_3 ＞r_5 となるのはどのような場合か検討する。

$$r_3=\frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}}r_1\ ,r_5=\left(\frac{1-sin\frac{\beta}{2}}{1+sin\frac{\beta}{2}}\right)^2r_1\ だから\ r_3>r_5 となるのは、\frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}}r_1>\left(\frac{1-sin\frac{\beta}{2}}{1+sin\frac{\beta}{2}}\right)^2r_1\cdots\cdot ②$$

を解けばよい。

$$1+sin\frac{\alpha}{2}=1+(2\cos^2\frac{\alpha}{4}-1)=2\cos^2\frac{\alpha}{4}\ ,\ 1-sin\frac{\alpha}{2}=1-(1-2sin^2\frac{\alpha}{4})=2sin^2\frac{\alpha}{4}\ から、$$

$$\frac{sin^2\frac{\alpha}{4}}{cos^2\frac{\alpha}{4}}r_1>\left(\frac{sin^2\frac{\beta}{4}}{cos^2\frac{\beta}{4}}\right)^2r_1\ よって、\frac{sin\frac{\alpha}{4}}{cos\frac{\alpha}{4}}>\frac{sin^2\frac{\beta}{4}}{cos^2\frac{\beta}{4}}\ ,\ tan\frac{\alpha}{4}>tan^2\frac{\beta}{4}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

③が成り立つ条件はγによって異なる

γが$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$の場合についてグラフで示すと次の図４－２のようになる。

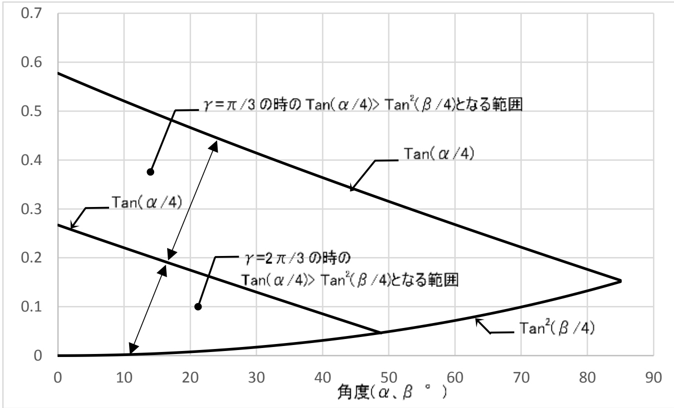

図４－２

図４－１ではγ＞α＞βなので $r_2>r_3>r_4$ であるが、β＞α＞γであれば $r_4>r_3>r_2$ となる。r_1，r_2，r_3を角α，β，γでなく、３辺 a，b，c で表すには図４－１において、

$$\cos\alpha = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{4ac}},\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{-(a-c)^2+b^2}{4ac}}$$

より、 $$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-(a-c)^2+b^2}{(a+c)^2-b^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

同様に、 $$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{-(a-b)^2+c^2}{(a+b)^2-c^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$（サブペリメータ）である。①より、

$$r_1 = \frac{a}{\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}}$$ だから④⑤を入れて、$$r_1 = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}+\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}} \cdots\cdots⑥$$

さらに変形して、$$r_1 = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{s^2(s-b)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\dfrac{s^2(s-c)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}} = \frac{a}{\dfrac{s(2s-b-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$$

$2s-b-c=a$，$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ はヘロンの公式より三角形の面積だから、それをＳとすると、

$r_1 = \dfrac{a}{\frac{sa}{S}} = \dfrac{S}{s}$ 三角形の面積Ｓをサブペリメータ s で割れば内接円の半径になる。

同様にr_2，r_3を求めると、$$r_2 = \frac{1-\sin\frac{\beta}{2}}{1+\sin\frac{\beta}{2}}r_1 = \frac{1-\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{1+\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}} = \frac{\sqrt{ab}-\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{ab}+\sqrt{(s-a)(s-b)}} \qquad \cdots\cdots\cdots⑦$$

$$r_3 = \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}r_1 = \frac{1-\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{1+\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}} = \frac{\sqrt{ac}-\sqrt{(s-a)(s-c)}}{\sqrt{ac}+\sqrt{(s-a)(s-c)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

パターンＢに対しパターンＡ（いわゆるマルファッティの問題）はかなりの難問である。マルファッティ自身は次のようなエレガントな解答を示している。（図５）

$$r_1=\frac{r}{2(s-b)}[s-r-(IB+IC-IA)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$r_2=\frac{r}{2(s-c)}[s-r-(IC+IA-IB)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

$$r_3=\frac{r}{2(s-a)}[s-r-(IA+IB-IC)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

ここで、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，rは内接円の半径である。

この式の証明は次のとおりである。

図６－１において$P_1Q_1=IC+IR_1-CR_1$が成り立つ。（マルファッティの定理）

$IR_1=r$（内接円の半径)、図６から、

$s=a_1+a_2+b_2$ だから、$b_2=s-(a_1+a_2)=s-a$

よって $CR_1=s-a$であり、⑫が導かれる。

$$P_1Q_1=IC+r-(s-a)\cdots\cdots\cdots\cdots ⑫$$

図６－２，図６－３から同様に、

$$P_2Q_2=IA+r-(s-b)\cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

$$P_3Q_3=IB+r-(s-c)\cdots\cdots\cdots\cdots ⑭$$

が得られる。

図６－１において $\dfrac{I_1P_1}{IP}=\dfrac{AP_1}{AP}$ 、IP＝r，I_1P_1＝r_1

$AP=s-b$だから、

$\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{AP_1}{s-b}$ より、$AP_1=\dfrac{r_1}{r}(s-b)$

同様に、$BQ_1=\dfrac{r_2}{r}(s-c)$

図６－２，図６－３についても同じように、

$BP_2=\dfrac{r_2}{r}(s-c)$，$CQ_2=\dfrac{r_3}{r}(s-a)$

$CP_3=\dfrac{r_3}{r}(s-a)$，$AQ_3=\dfrac{r_1}{r}(s-b)$

となる。

⑨式[　　]内は、⑫～⑭を用いて、

$IB+IC-IA=[P_3Q_3-r+(s-c)]$

$+[P_1Q_1-r+(s-a)]-[P_2Q_2-r+(s-b)]$

$$P_1Q_1=a-\left[\frac{r_1}{r}(s-b)+\frac{r_2}{r}(s-c)\right]$$

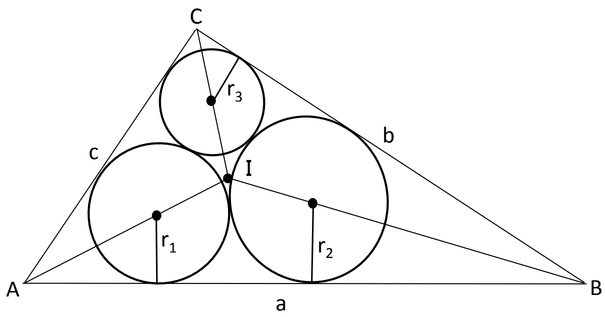

図５

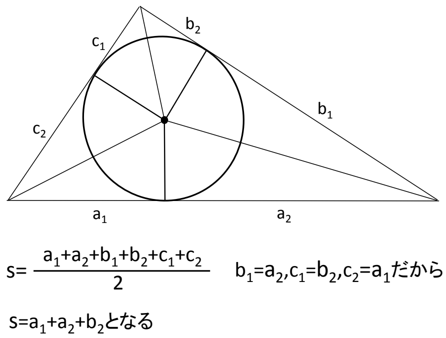

図６

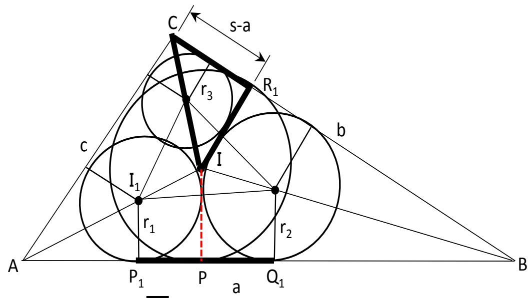

図６－１

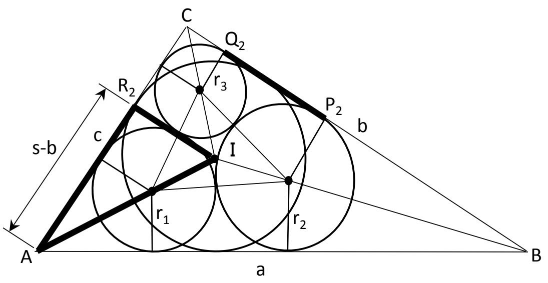

図６－２

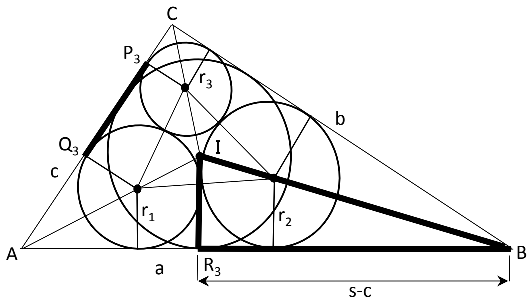

図６－３

$$P_2Q_2 = b - \left[\frac{r_2}{r}(s-c) + \frac{r_3}{r}(s-a)\right]$$

$$P_3Q_3 = c - \left[\frac{r_3}{r}(s-a) + \frac{r_1}{r}(s-b)\right]$$

であるから、

$$[P_3Q_3 - r + (s-c)] + [P_1Q_1 - r + (s-a)] + [P_2Q_2 - r + (s-b)]$$

$$= \left[c - \frac{r_3}{r}(s-a) - \frac{r_1}{r}(s-b) - r + (s-c)\right] + \left[a - \frac{r_1}{r}(s-b) - \frac{r_2}{r}(s-c) - r + (s-a)\right]$$

$$- \left[b - \frac{r_2}{r}(s-c) - \frac{r_3}{r}(s-a) - r + (s-b)\right] = -\frac{2r_1}{r}(s-b) + s - r$$

$$\frac{r}{2(s-b)}[s - r - (IB + IC - IA)] = \frac{r}{2(s-b)}\left[s - r - \left[-\frac{2r_1}{r}(s-b) + s - r\right]\right]$$

$$= \frac{r}{2(s-b)}\left[s - r + \frac{2r_1}{r}(s-b) - s + r\right] = \frac{r}{2(s-b)}\left[\frac{2r_1}{r}(s-b)\right] = r_1$$ （証明終わり）

r_2，r_3 についても同じように証明できる。

２．私の導いた解

　さて、ここからが本題である。この問題の解答をどのように導いたのか、その過程を含めて書いてみたい。

図７において、三角形ＡＢＣの３辺を、ＡＢ＝ａ，ＢＣ＝ｂ，ＣＡ＝ｃ，角∠ＢＡＣ＝α，ＣＢＡ＝β，ＡＣＢ＝γ，３つの円をC_1，C_2，C_3とし、その半径をそれぞれr_1，r_2，r_3、C_1，C_2，C_3から各辺に下した垂線と各辺の交点を u_1u_2，v_1v_2，w_1w_2，$u_1u_2=u$，$v_1v_2=v$，$w_1w_2=w$　とする。

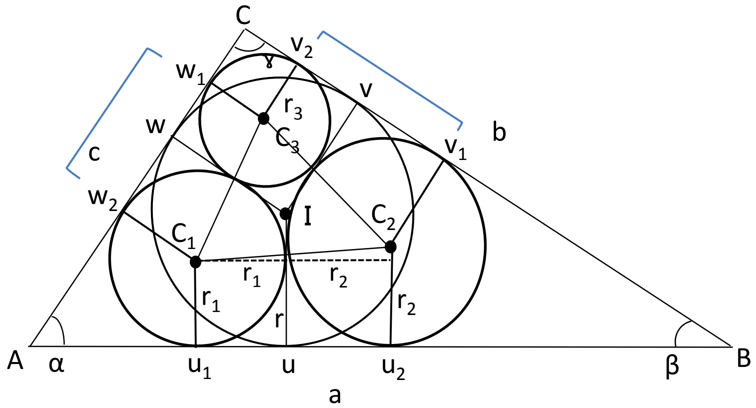

図７

まず、最初に思いつくのは、

$\overline{u_1u_2}^2+(\overline{C_2u_2}-\overline{C_1u_1})^2=\overline{C_1C_2}^2$

$u^2+(r_2-r_1)^2=(r_2+r_1)^2$　から、

$u=2\sqrt{r_1r_2}$ を得る。

$Au_1=\dfrac{r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}$，$Bu_2=\dfrac{r_2}{tan\frac{\beta}{2}}$ だから、

$$\frac{r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}+2\sqrt{r_1r_2}+\frac{r_2}{tan\frac{\beta}{2}}=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

$$\frac{r_2}{tan\frac{\beta}{2}}+2\sqrt{r_2r_3}+\frac{r_3}{tan\frac{\gamma}{2}}=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

$$\frac{r_3}{tan\frac{\gamma}{2}}+2\sqrt{r_3r_1}+\frac{r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰$$

が得られる。ここで、$tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{k_1}$，$tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{k_2}$，$tan\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{k_3}$　と置くと、

$$k_1r_1+2\sqrt{r_1r_2}+k_2r_2=a\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮'$$

$$k_2r_2+2\sqrt{r_2r_3}+k_3r_3=b\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯'$$

$$k_3r_3+2\sqrt{r_3r_1}+k_1r_1=c\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰'$$

さらに、$r_1=R_1{}^2$，$r_2=R_2{}^2$，$r_3=R_3{}^2$　と置くと、

$$k_1R_1{}^2+2R_1R_2+k_2R_2{}^2=a\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮''$$

$$k_2R_2{}^2+2R_2R_3+k_3R_3{}^2=b\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯''$$

$$k_3R_3{}^2+2R_3R_1+k_1R_1{}^2=c\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰''$$

⑮”～⑰” は三元連立２次方程式であり、R_1，R_2，R_3 に対して対称式となっているので解けそうに思われるが、この方程式の一般解はそう簡単に求めることはできない。

（後に、ネット上に解法を見つけたので詳述する）

　例えば、$a=4,b=3,c=5$（直角三角形）というように具体的に数値を入れると、

$k_1=3,k_2=1,k_3=2$ となり、

$3{R_1}^2+2R_1R_2+{R_2}^2 \ =4$
$ {R_2}^2+2R_2R_3+2{R_3}^2 \ =3$
$2{R_3}^2+2R_3R_1+3{R_1}^2=5$　という方程式となり、解は次のような複雑な無理数で与えられる。

$$r_1=\frac{1}{6}\left(5+\sqrt{10}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)\fallingdotseq 0.7520$$

$$r_2=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{10}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)\fallingdotseq 0.5079$$

$$r_3=\frac{1}{4}\left(5-\sqrt{10}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)\fallingdotseq 0.6649$$

⑮”～⑰” をそのまま解こうとすると、

$$4096(a-b-c)^3(a+b+c)^2{r_1}^8+8192(a-b-c)^3(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c){r_1}^7+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots 16(a-b-c)(a+b-c)^5(a-b+c)^5(a+b+c)r_1+(a-b-c)(a+b-c)^6(a-b+c)^6=0$$

という８次方程式になることがネット上に公開されている。

次に考えられるのは、
⑰”－⑯”＋⑮”を作り、

$$2k_1{R_1}^2+2(R_2+R_3)R_1+(-a+b-c-2R_2R_3)\ =0$$

これをR_1について解くと、

$$R_1=\frac{-(R_2+R_3)\pm\sqrt{(R_2+R_3)-2k_1(-a+b-c-2R_2R_3)}}{2k_1}\cdots\cdots\cdots ⑱$$ を得る。

⑮”からR_2をR_1で、⑰”からR_3をR_1で表すと、

$$R_2=\frac{-R_1\pm\sqrt{{R_1}^2-k_2(k_1{R_1}^2-a)}}{k_2}\cdots\cdots\cdots ⑲,\quad R_3=\frac{-R_1\pm\sqrt{{R_1}^2-k_3(k_1{R_1}^2-c)}}{k_3}\cdots\cdots\cdots ⑳$$

⑲⑳を⑱に代入しR_1の式にしても、結局６次以上の方程式になり解くのは難しい。

次は、図７において台形$C_1u_1u_2C_2$の面積に着目すると次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{2}(r_1+r_2)\cdot 2\sqrt{r_1r_2}=\frac{1}{2}(r+r_1)\cdot\frac{r-r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}(r+r_2)\cdot\frac{r-r_2}{tan\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{r-r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r-r_2}{tan\frac{\beta}{2}}\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})$$
$$\cdots\cdots\cdots ㉑$$

$$2\sqrt{r_1r_2}=a-\left(\frac{r_1}{tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{r_2}{tan\frac{\beta}{2}}\right),\quad tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{k_1},\quad tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{k_2}$$

を用いて㉑を整理すると次式になる。

$(k_1+k_2-k_1k_2)r_1r_2+(k_1k_2r-a)(r_1+r_2)=k_1k_2r^2$ 　　$\cdots\cdots\cdots$㉑
台形 $C_2v_1v_2C_3$，$C_3w_1w_2C_2$ についても同様に、
$(k_2+k_3-k_2k_3)r_2r_3+(k_2k_3r-b)(r_2+r_3)=k_2k_3r^2$ 　　$\cdots\cdots\cdots$㉒

$(k_3+k_1-k_3k_1)r_3r_1+(k_3k_1r-c)(r_3+r_1)=k_3k_1r^2$　　 ・・・・・・・・㉓

㉑，㉒，㉓は、

$a_1xy+b_1(x+y)=c_1$ ，$a_2yz+b_2(y+z)=c_2$，$a_3zx+b_3(z+x)=c_3$

という方程式で一見解けそうに見えるが、実際に解こうとすると結局４次方程式となり、やはり簡単には解くことはできない。

問題を解くには別の観点からのアプローチが必要である。

図８に示すように、円C_1C_2，C_2C_3，C_3C_1の接する点における共通の接線と各辺のなす角度をθ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5，θ_6とすると、$\theta_1+\theta_2=\theta_3+\theta_4=\theta_5+\theta_6=\pi$ ・・・・・・・・㉔　である。

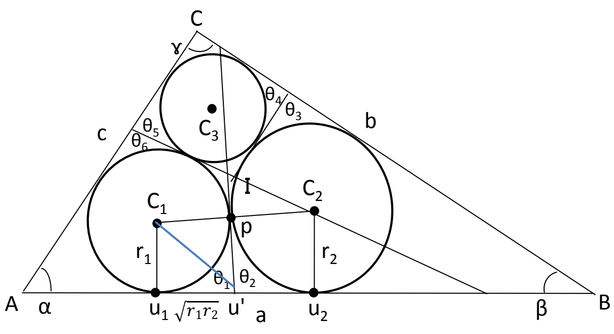

図８

また、円C_1C_2の接線と辺ＡＢとの交点を u'，直線C_1C_2との交点を p とすると、

$u'u_1=u'p=u'u_2$ 、$u_1u_2=2\sqrt{r_1r_2}$ であるから、

$u'u_1=u'u_2=\sqrt{r_1r_2}$となる。

これから、$tan\frac{\theta_1}{2}=\frac{r_1}{\sqrt{r_1r_2}}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$・・・・・・・・㉕

辺ＢＣ，ＣＡに対しても同様に、

$tan\frac{\theta_3}{2}=\sqrt{\frac{r_2}{r_3}}$・・・・・・・・㉖，$tan\frac{\theta_5}{2}=\sqrt{\frac{r_3}{r_1}}$・・・・・・・・㉗ が得られる。

従って、r_1，r_2，r_3 を求めるためには$tan\frac{\theta_1}{2}$，$tan\frac{\theta_3}{2}$，$tan\frac{\theta_5}{2}$ を求めればよい。

㉕㉖㉗より、$tan\frac{\theta_1}{2}\cdot tan\frac{\theta_3}{2}\cdot tan\frac{\theta_5}{2}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\cdot\sqrt{\frac{r_2}{r_3}}\cdot\sqrt{\frac{r_3}{r_1}}=1$・・・・・・・・㉘

㉔より、$\theta_1+\theta_3+\theta_5=\frac{3}{2}\pi$・・・・・・・・㉙

以上から、r_1，r_2，r_3 をθ_1，θ_3，θ_5 で表し、㉘㉙の関係を使ってθ_1あるいはθ_3，θ_5の式を導き解けばよい。

$2\sqrt{r_1r_2}=\dfrac{2r_1}{tan\frac{\theta_1}{2}}$ ，$2\sqrt{r_2r_3}=\dfrac{2r_2}{tan\frac{\theta_3}{2}}$ ，$2\sqrt{r_3r_1}=\dfrac{2r_3}{tan\frac{\theta_5}{2}}$ だから

⑮’⑯’⑰’は、

$$\left(k_1+\frac{2}{tan\frac{\theta_1}{2}}\right)r_1+k_2r_2=a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉚$$

$$\left(k_2+\frac{2}{tan\frac{\theta_3}{2}}\right)r_2+k_3r_3=b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉛$$

$$\left(k_3+\frac{2}{tan\frac{\theta_5}{2}}\right)r_3+k_1r_1=c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉜$$

これを解いて、　$$r_1=\frac{a\left(k_2+2tan\frac{\theta_3}{2}\right)\left(k_1+2tan\frac{\theta_5}{2}\right)-bk_2\left(k_3+2tan\frac{\theta_1}{2}\right)+ck_2k_3}{\left(k_1+2tan\frac{\theta_1}{2}\right)\left(k_2+2tan\frac{\theta_3}{2}\right)\left(k_3+2tan\frac{\theta_5}{2}\right)-k_1k_2k_3}$$

r_2，r_3についても同様に$tan\frac{\theta_1}{2}$，$tan\frac{\theta_3}{2}$，$tan\frac{\theta_5}{2}$の式で表すことができるが、この式から㉘，㉙の関係を使って r_1，r_2，r_3 を導く計算は非常に複雑であり、途中で断念せざるを得なかった。

　次に着目したのは、円C_1，C_2，C_3がそれぞれ内接円となるような６つの三角形を考え、式を導くことである。（図９）

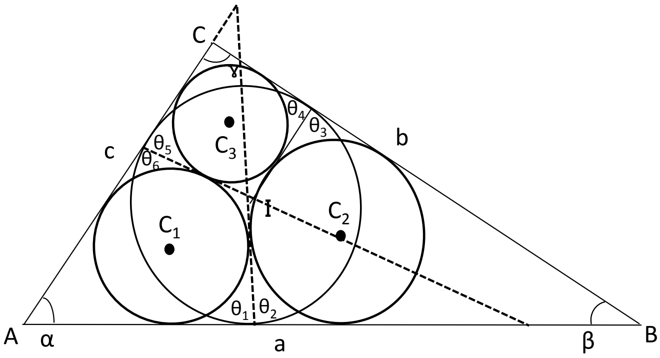

図９

内接円の半径ｒ，三角形ＡＢＣの面積Ｓ，サブペリメータ sとの間には前述のようにｒ $=\frac{S}{s}$ という関係がある。

　図９－１，９－２に示すように、円C_1を内接円とする三角形は２つ考えられその面積をS_{1a}，S_{1b}サブペリメータをs_{1a}，s_{1b}とすると、次のような式が導かれる。

$$r_1=\frac{S_{1a}}{s_{1a}}=\frac{sin\theta_1\,sin\alpha(k_1r_1+\sqrt{r_1r_2})}{\sin(\theta_1+\alpha)+sin\theta_1+sin\alpha}$$

$$r_1=\frac{S_{1b}}{s_{1b}}=\frac{sin\theta_6\,sin\alpha(k_1r_1+\sqrt{r_1r_3})}{\sin(\theta_6+\alpha)+sin\theta_6+sin\alpha}$$

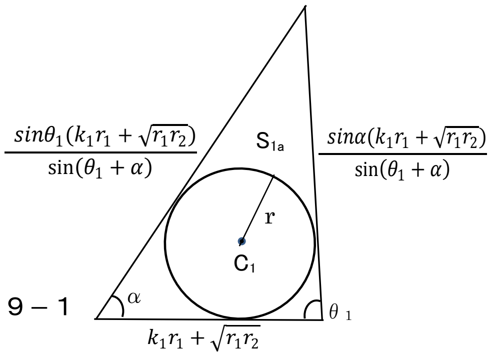

図９－１

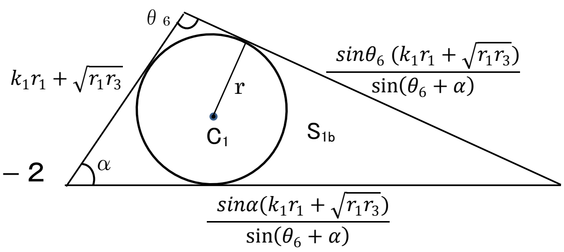

図９－２

円C_2，C_3についても同様に、

$$r_2=\frac{S_{2a}}{s_{2a}}=\frac{sin\theta_2\,sin\beta(k_2r_2+\sqrt{r_1r_2})}{\sin(\theta_2+\beta)+sin\theta_2+sin\beta}$$

$$r_2=\frac{S_{2b}}{s_{2b}}=\frac{sin\theta_3\,sin\beta(k_2r_2+\sqrt{r_2r_3})}{\sin(\theta_3+\beta)+sin\theta_3+sin\beta}$$

$$r_3=\frac{S_{3a}}{s_{3a}}=\frac{sin\theta_4\,sin\gamma(k_3r_3+\sqrt{r_2r_3})}{\sin(\theta_4+\gamma)+sin\theta_4+sin\gamma}$$

$$r_3=\frac{S_{3b}}{s_{3b}}=\frac{sin\theta_5\,sin\gamma(k_3r_3+\sqrt{r_3r_1})}{\sin(\theta_5+\gamma)+sin\theta_5+sin\alpha}$$

これらの式からは、次のような美しい関係が導かれる。

$$sin\frac{\theta_1+\beta}{2}\cdot sin\frac{\theta_3+\gamma}{2}\cdot sin\frac{\theta_5+\alpha}{2}=cos\frac{\theta_1-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\theta_3-\beta}{2}\cdot cos\frac{\theta_5-\gamma}{2}$$

$$\left(sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}\right)\left(sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}tan\frac{\theta_1}{2}-sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\alpha}{2}\frac{1}{tan\frac{\theta_1}{2}}\right)+$$

$$\left(sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}tan\frac{\theta_3}{2}-sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\beta}{2}\frac{1}{tan\frac{\theta_3}{2}}\right)+$$

$$\left(\sin\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\theta_5}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\frac{1}{\tan\frac{\theta_5}{2}}\right)$$

$$\tan\frac{\theta_1}{2}\cdot\tan\frac{\theta_3}{2}\cdot\tan\frac{\theta_5}{2}=\frac{1-\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\cdot\frac{1-\cos\theta_3}{\sin\theta_3}\cdot\frac{1-\cos\theta_5}{\sin\theta_5}=1$$

$$[1+\sin(\theta_1+\theta_2)]\cdot(1-\cos\theta_1)\cdot(1-\cos\theta_2)+\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdot[\cos(\theta_1+\theta_2)]=0$$

　などいろいろ興味深い式が導かれるが、これらの式から

$\tan\frac{\theta_1}{2}$，$\tan\frac{\theta_3}{2}$，$\tan\frac{\theta_5}{2}$ を求めることはできなかった。

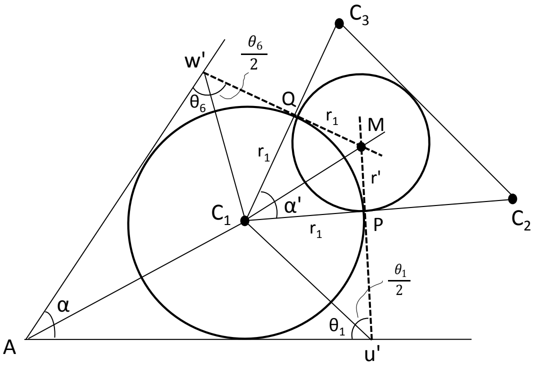

図１０

　θ_1，θ_3，θ_5 の３つの角を対象に考えると式が非常に複雑になり解くことができないことが明らかになった。

　ここで、対象とする角を２つに絞るため、図１０に示す円C_1 に外接する四角形 $Au'Mw'$ に注目しθ_1，θ_6に対する式を導きだす。ここでMはマルファッティポイントと呼ばれている。

三角形$\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3$ の内接円の半径をｒ’，∠ＰC_1Ｑ＝α’とすると、$\tan\frac{\alpha'}{2}=\frac{r'}{r_1}$，$\alpha'=\theta_1+\theta_6+\alpha-\pi$ である。

三角形$\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3$のサブペリメータを$s'$，面積をＳ’とすると、$s'=r_1+r_2+r_3$，

面積（Ｓ’）はヘロンの公式より $S'=\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$ だから、

$$r'=\frac{S'}{s'}=\frac{\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_1+r_2+r_3}=\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}$$

よって、$\tan\frac{\alpha'}{2}=\tan\left(\frac{\theta_1+\theta_6+\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}}{r_1}=\sqrt{\frac{r_2r_3}{r_1(r_1+r_2+r_3)}}$ となる。

㉔～㉗より得られる

$r_2=\frac{r_1}{\tan^2\frac{\theta_1}{2}}$，$r_3=r_1\tan^2\frac{\theta_5}{2}=\frac{r_1}{\tan^2\frac{\theta_6}{2}}$ を代入して整理すると、

$$\tan\left(\frac{\theta_1+\theta_6+\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\frac{\theta_1}{2}\tan^2\frac{\theta_6}{2}+\tan^2\frac{\theta_1}{2}+\tan^2\frac{\theta_6}{2}}}$$ を得る。

$$\tan\left(\frac{\theta_1+\theta_6+\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta_1+\theta_6+\alpha}{2}\right)}$$ だから、

$$\tan^2\frac{\theta_1+\theta_6+\alpha}{2}=\tan^2\frac{\theta_1}{2}\tan^2\frac{\theta_6}{2}+\tan^2\frac{\theta_1}{2}+\tan^2\frac{\theta_6}{2}=\left(\tan^2\frac{\theta_1}{2}+1\right)\left(\tan^2\frac{\theta_6}{2}+1\right)-1$$

$$=\frac{1}{cos^2\frac{\theta_1}{2}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{\theta_6}{2}}-1=\frac{1-cos^2\frac{\theta_1}{2}cos^2\frac{\theta_6}{2}}{cos^2\frac{\theta_1}{2}cos^2\frac{\theta_6}{2}}$$

より $tan^2\frac{\theta_1+\theta_6+\alpha}{2}=\frac{1-cos^2\frac{\theta_1}{2}cos^2\frac{\theta_6}{2}}{cos^2\frac{\theta_1}{2}cos^2\frac{\theta_6}{2}}$ となり、

これをθ_6について解くと、

$$tan\frac{\theta_6}{2}=\sqrt{\frac{cos(\theta_1+\alpha)+2\cos\left(\theta_1+\frac{\alpha}{2}\right)+cos\theta_1+2cos\frac{\alpha}{2}}{1-cos(\theta_1+\alpha)}}=\sqrt{2\,(1+\cos\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\theta_1+\frac{\alpha}{2}\right)}{1-cos(\theta_1+\alpha)}}$$

$$=\sqrt{2\,(1+2cos^2\frac{\alpha}{4}-1)}\sqrt{\frac{1+2cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)-1}{1-\left(1-2sin^2(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\alpha}{2})\right)}}=2\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{cos\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)}{sin(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\alpha}{2})}=$$

$$\frac{\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right)-sin\frac{\alpha}{2}tan\frac{\theta_1}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}+cos\frac{\alpha}{2}tan\frac{\theta_1}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots㉝$$ を得る。

㉝式以外にさらに θ_1とθ_6に関する方程式がもう一つ必要である。

㉔～㉗式より得られる $r_2=\frac{r_1}{tan^2\frac{\theta_1}{2}}$，$r_3=\frac{r_1}{tan^2\frac{\theta_6}{2}}$ と㉚，㉜により、r_1 を θ_1とθ_6の式にすると、

$$r_1=\frac{a}{k_1+\frac{2}{tan\frac{\theta_1}{2}}+\frac{k_2}{tan^2\frac{\theta_1}{2}}}\cdots\cdots㉞\qquad r_1=\frac{c}{k_1+\frac{2}{tan\frac{\theta_6}{2}}+\frac{k_3}{tan^2\frac{\theta_6}{2}}}\cdots\cdots㉟$$ を得る。

㉞㉟から、$\mathrm{c}\left(k_1+\frac{2}{tan\frac{\theta_1}{2}}+\frac{k_2}{tan^2\frac{\theta_1}{2}}\right)=\mathrm{a}\left(k_1+\frac{2}{tan\frac{\theta_6}{2}}+\frac{k_3}{tan^2\frac{\theta_6}{2}}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots㊱$

$\frac{1}{tan\frac{\theta_1}{2}}=t_1$，$\frac{1}{tan\frac{\theta_6}{2}}=t_6$ と置くと㊱は、

$c(k_1+2t_1+k_2{t_1}^2)=a(k_1+2t_6+k_3{t_6}^2)$ となりt_6について整理すると、

$ak_3{t_6}^2+2at_6+[(a-c)k_1-2ct_1-ck_2{t_1}^2]=0$

というようにt_6に関する２次方程式になる。

これを解いて、$t_6=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-ak_3[(a-c)k_1-2ct_1-ck_2{t_1}^2]}}{ak_3}\cdots\cdots\cdots\cdots㊲$

㉝を t_6

$=\frac{sin\frac{\alpha}{2}t_1+cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right)t_1-sin\frac{\alpha}{2}}$ と変形し、これと㊲を組み合わせるとt_1についての２次方程式になる。

$$\frac{sin\frac{\alpha}{2}t_1+cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right)t_1-sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-ak_3[(a-c)k_1-2ct_1-ck_2{t_1}^2]}}{ak_3}$$

左辺分子を$\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right)t_1-sin\frac{\alpha}{2}$で割り、左辺分子から$t_1$を消去し、右辺から$-\frac{a}{ak_3}=-\frac{1}{k_3}$ を移項すると、

$$\frac{\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+cos\frac{\alpha}{2}}+cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right)t_1-sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{1+cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{k_3}=\frac{\pm\sqrt{a^2-ak_3[(a-c)k_1-2ct_1-ck_2{t_1}^2]}}{ak_3}\cdots\cdots\cdots\cdots㊳$$

㊳式の左辺第１項の分子は、$\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+cos\frac{\alpha}{2}}+cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4\,sin^2\frac{\alpha}{4}cos^2\frac{\alpha}{4}}{1+(2cos^2\frac{\alpha}{4}-1)}+(cos^2\frac{\alpha}{4}-sin^2\frac{\alpha}{4})$

左辺第２，３項は、$\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{1+cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{k_3}=\frac{2sin\frac{\alpha}{4}cos\frac{\alpha}{4}}{1+(2cos^2\frac{\alpha}{4}-1)}+tan\frac{\gamma}{2}=tan\frac{\alpha}{4}+tan\frac{\gamma}{2}$

さらに右辺$\frac{\pm\sqrt{a^2-ak_3[(a-c)k_1-2ct_1-ck_2{t_1}^2]}}{ak_3}$ を$k_1=\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}$， $k_2=\frac{1}{tan\frac{\beta}{2}}$， $k_3=\frac{1}{tan\frac{\gamma}{2}}$に戻すと

$$=\pm\frac{tan\frac{\gamma}{2}}{a}\sqrt{a^2-a\frac{1}{tan\frac{\gamma}{2}}\left[(a-c)\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}-2ct_1-\frac{c}{tan\frac{\beta}{2}}{t_1}^2\right]}$$

$$=\pm\frac{tan\frac{\gamma}{2}}{a}\sqrt{\frac{ac}{tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}}{t_1}^2+\frac{2ac}{tan\frac{\gamma}{2}}t_1+\left(a^2-\frac{a(a-c)}{tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}}\right)}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}\sqrt{{t_1}^2+2tan\frac{\beta}{2}t_1+\left(tan^2\frac{\beta}{2}-tan^2\frac{\beta}{2}\right)+\frac{a}{c}tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}-\frac{a-c}{c}\frac{tan\frac{\beta}{2}}{tan\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}\sqrt{\left(t_1+tan\frac{\beta}{2}\right)^2+tan\frac{\beta}{2}\left(\frac{a}{c}tan\frac{\gamma}{2}-\frac{a-c}{c}\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}-tan\frac{\beta}{2}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots㊴$$

となり、㊴式$\sqrt{\quad}$の(　)内は

$$\frac{a}{c}tan\frac{\gamma}{2}-\frac{a-c}{c}\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}-tan\frac{\beta}{2}=\frac{a}{c}\left(tan\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}\right)-\left(tan\frac{\beta}{2}-\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$=\frac{a}{c}\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\gamma}{2}}-\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}=-\frac{a}{c}\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\gamma}{2}}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\beta}{2}}-\frac{a}{c}\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{sin\frac{\alpha}{2}}\frac{\mathrm{c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}-a\cdot\sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}}{\mathrm{c}\cdot cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(c\cdot\sin\gamma-a\cdot\sin\beta\right)}{\mathrm{c}\cdot sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}$$ と変形される。

ここで $c\cdot\sin\gamma-a\cdot\sin\beta=0$ に注意すれば ㊴式の$\sqrt{\quad}$が外れ、

$$\pm\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}\sqrt{\left(t_1+tan\frac{\beta}{2}\right)^2+tan\frac{\beta}{2}\left(\frac{a}{c}tan\frac{\gamma}{2}-\frac{a-c}{c}\frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}}-tan\frac{\beta}{2}\right)}=\pm\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}\left(t_1+tan\frac{\beta}{2}\right)$$

となる。以上より㊳式は次のように整理され、左辺及び右辺は常に＋でなければならないので次式

$$\frac{1}{(1+cos\frac{\alpha}{2})t_1-sin\frac{\alpha}{2}}+\left(tan\frac{\alpha}{4}+tan\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}\left(t_1+tan\frac{\beta}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots ㊵$$

が得られる。これはt_1についての２次方程式である。

ここで $A=1+cos\frac{\alpha}{2}$ ， $B=sin\frac{\alpha}{2}$， $C=tan\frac{\alpha}{4}+tan\frac{\gamma}{2}$， $D=\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}$， $E=tan\frac{\beta}{2}$ と置き㊵式を解くと

$$t_1=\left(\frac{B}{2A}+\frac{C}{2D}-\frac{E}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{B}{2A}-\frac{C}{2D}+\frac{E}{2}\right)^2+\frac{1}{AD}}\cdots\cdots\cdots\cdots ㊶$$ が得られる。

これが求める解である。A~E を戻すと、

$$t_1=\left(\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{2(1+cos\frac{\alpha}{2})}+\frac{tan\frac{\alpha}{4}+sin\frac{\gamma}{2}}{2\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}}-\frac{tan\frac{\beta}{2}}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{2(1+cos\frac{\alpha}{2})}-\frac{tan\frac{\alpha}{4}+sin\frac{\gamma}{2}}{2\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}}+\frac{tan\frac{\beta}{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{(1+cos\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}}}}$$

整理すると、

$$t_1=\frac{1}{2}\left[\left(tan\frac{\alpha}{4}-tan\frac{\beta}{2}\right)+\sqrt{\frac{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}}\left(tan\frac{\alpha}{4}+tan\frac{\gamma}{2}\right)\right]$$

$$+\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left\{\left(tan\frac{\alpha}{4}+tan\frac{\beta}{2}\right)-\sqrt{\frac{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}}\left(tan\frac{\alpha}{4}+tan\frac{\gamma}{2}\right)\right\}\right]^2+\frac{1}{(1+cos\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{a\cdot tan\frac{\beta}{2}}{c\cdot tan\frac{\gamma}{2}}}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ㊷$$

根号$\sqrt{\quad}$ のない、もっとシンプルで美しい式にしたかったが、残念ながらこれ以上は難しい。

㊷式により $t_1=\frac{1}{tan\frac{\theta_1}{2}}$ が計算できれば㉞式により r_1が求められる。

r_1 がわかれば r_2， r_3 は㉕〜㉘式により計算することができる。

A〜Eをα，β，γ を使わずに三辺 a，b，c，s($=\frac{a+b+c}{2}$)，r(内接円の半径 $=\frac{S}{s}$)だけで表してみる。

$$sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{ac}}},\ cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\mathrm{ac}}},\ tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{b})}}=\frac{\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{a})^2(\mathrm{s}-\mathrm{c})^2}}{\sqrt{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}$$

$$=\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{S}}=\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{S}}\cdot\frac{\mathrm{r}^2\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{b}}$$

$$sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\mathrm{ab}}},\ cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{ab}}},\ tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{c}}$$

$$sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{bc}}},\ cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\mathrm{bc}}},\ tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{a})}}=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{a}}$$

$$tan\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}$$

以上を㊷に入れると次式が得られる。

$$t_1=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}-\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{c}}\right)+\sqrt{\frac{\mathrm{a}(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\mathrm{c}(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}\left(\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{a}}\right)\right]$$

$$+\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{c}}\right)-\sqrt{\frac{\mathrm{a}(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\mathrm{c}(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}\left(\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-\mathrm{a}}\right)\right\}\right]^2+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\mathrm{ac}}}}\sqrt{\frac{\mathrm{a}(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\mathrm{c}(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}}\quad\cdots\cdots㊸$$

⑨式マルファッティの式,

$$r_1=\frac{r}{2(s-b)}[s-r-(IB+IC-IA)]$$ に、

$IB=\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{c})^2+\mathrm{r}^2}$, $IC=\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{a})^2+\mathrm{r}^2}$, $IA=\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2+\mathrm{r}^2}$ を入れると、

$$r_1=\frac{r}{2(s-b)}\left[s-r-\left(\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{c})^2+\mathrm{r}^2}+\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{a})^2+\mathrm{r}^2}-\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2+\mathrm{r}^2}\right)\right]\cdots\cdots\cdots\cdots㊹$$

が得られ、㊸式に比べるとシンプルで実用的な式であることがわかる。

㊶式によりいくつか実例を計算してみよう。

例えば、$a=5$, $b=4$, $c=3$，$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=12$（$\gamma=\frac{\pi}{2}$の直角三角形）の場合について、㊶，㉕～㉘式により $\frac{1}{t_1}$， $\frac{1}{t_2}$， $\frac{1}{t_3}$ を求め r_1， r_2， r_3 を計算すると下表のようになる。（結果のみ示す）

A～E				t_1,t_2,t_3		r_1,r_2,r_3		各円の面積	合計面積
A１	1.894	D１	1.142	$t_1=1/tan\frac{\theta_1}{2}$	1.0634	r_1	0.6649	1.3888	3.9759
B１	0.447	E１	0.333	$t_2=1/tan\frac{\theta_2}{2}$	0.8218	r_2	0.7520	1.7765	
C１	1.236			$t_3=1/tan\frac{\theta_3}{2}$	1.1441	r_3	0.5079	0.8105	

一般の三角形 $a=5.5$，$b=3.0$，$c=3.5$，$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=12$ について、

A～E				t_1, t_2, t_3		r_1, r_2, r_3		各円の面積	合計面積
A１	1.967	D１	1.784	$t_1=1/tan\frac{\theta_1}{2}$	0.9785	r_1	0.6264	1.2328	2.7102
B１	0.255	E１	0.316	$t_2=1/tan\frac{\theta_2}{2}$	0.7443	r_2	0.5998	1.1303	
C１	1.711			$t_3=1/tan\frac{\theta_3}{2}$	1.3729	r_3	0.3323	0.3470	

正三角形 $a=b=c=4.0$，$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=12$ について、

A～E				t_1, t_2, t_3		r_1, r_2, r_3		各円の面積	合計面積
A１	1.866	D１	1.000	$t_1=1/tan\frac{\theta_1}{2}$	1.0000	r_1	0.7321	1.6835	5.0507
B１	0.500	E１	0.577	$t_2=1/tan\frac{\theta_2}{2}$	1.0000	r_2	0.7321	1.6835	
C１	0.845			$t_3=1/tan\frac{\theta_3}{2}$	1.0000	r_3	0.7321	1.6835	

以上の結果は、マルファッティの式 ⑨～⑪による計算と一致し、正しい解でることが確認できた。

この解にたどり着くまでに長い時間を要した。

複雑な計算を行い終わりが見えてくるころになると、結局三角関数の恒等式が導かれるだけで、解に結びつかず途中でギブアップしそうになった。それでも最後は自分なりの解を見つけることができ満足している。

㊴式を変形していき $c \cdot \sin\gamma - a \cdot \sin\beta = 0$ に気付き、$\sqrt{\quad}$ が外れ２次方程式に帰着できたときは“やった！”と思ったが、最終的にシンプルな式にできなかったことが心残りである。

いろいろな方法でアプローチを行い、試行錯誤を繰り返しながら何とか解にたどり着いたが、自分でも予想していなかったほど長くかかった。

㊹マルファッティイの式と㊸を比較すると、角度を主眼に解を求めたためか。かなり複雑になってしまった。何とかシンプルな式にしたかったがこれ以上は難しく、納得するところまで行かなかったがこれを私の解とした。

問題は１９世紀初めのもので、調べたところ公表されている解法はそう多くない。有名なものとして１つはスタイナー（Steiner）のものであり、彼自身は結論のみで内容は明らかにしていない。

もう一つはシェルバッハ（Schellbach）のもので、素晴らしい発想によるものだ。これについては後述する。

３．三元連立２次方程式の解法

図７に対して導かれた三元連立２次方程式に関し、ネット上で見つけた解法のヒントをもとに、自分なりに解答にたどり着いたので紹介したい。

$$k_1{R_1}^2+2R_1R_2+k_2{R_2}^2=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑮''$$
$$k_2{R_2}^2+2R_2R_3+k_3{R_3}^2=b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑯''$$
$$k_3{R_3}^2+2R_3R_1+k_1{R_1}^2=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑰''$$

において変数を、$R_1=x$，$R_2=y$，$R_3=z$ とすると、$x=\sqrt{r_1}$，$y=\sqrt{r_2}$，$z=\sqrt{r_3}$となり、

⑮''，⑯''，⑰''は次のように表せる。それを新たに①，②，③とする。

$$k_1x^2+2xy+k_2y^2=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$k_2y^2+2yz+k_3z^2=b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$k_3z^2+2zx+k_1x^2=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

この方程式を解く方針としては、x^2，y^2，z^2を消去しxy，yz，zxのみの式とすることにより解を導くものである。

②，③からzを消去する。

$$k_3z^2+(2y)z+(k_2y^2-b)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②'$$
$$k_3z^2+(2x)z+(k_1x^2-c)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③'$$

②'，③'をzの２次方程式として解くと、

$$z=\frac{-y\pm\sqrt{(1-k_2k_3)y^2+bk_3}}{ak_3}\ ,\ z=\frac{-x\pm\sqrt{(1-k_1k_3)x^2+ck_3}}{ak_3}$$ となる。

zを消去すると、$-y\pm\sqrt{(1-k_2k_3)y^2+bk_3}=-x\pm\sqrt{(1-k_1k_3)x^2+ck_3}$

$x-y=\pm\sqrt{(1-k_1k_3)x^2+ck_3}\mp\sqrt{(1-k_2k_3)y^2+bk_3}$ 、両辺を２乗して、

$$x^2-2xy+y^2=(1-k_1k_3)x^2+ck_3+(1-k_2k_3)y^2+bk_3-2\sqrt{(1-k_1k_3)x^2+ck_3}\cdot\sqrt{(1-k_2k_3)y^2+bk_3}$$

$\sqrt{\quad}$ の項とそれ以外の項を分離して再び２乗すると、

$$\left[-k_3\left(k_1x^2+k_2y^2\right)+\{2xy+k_3(b+c)\}\right]^2=\left(2\sqrt{(1-k_1k_3)x^2+ck_3}\cdot\sqrt{(1-k_2k_3)y^2+bk_3}\right)^2$$

$$\begin{aligned}&{k_3}^2\left(k_1x^2+k_2y^2\right)^2+\{2xy+k_3(b+c)\}^2-2k_3\left(k_1x^2+k_2y^2\right)\{2xy+k_3(b+c)\}\\&\qquad=4\left\{(1-k_1k_3)x^2+ck_3\right\}\left\{(1-k_2k_3)y^2+bk_3\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

① より、$k_1x^2+k_2y^2=a-2xy$ だから、$k_1x^2+k_2y^2$ はxyの式で表すことができる。

$xy=t$とおくと、$k_1x^2+k_2y^2=a-2t$ となり、これで④を書き直すと、

$$\begin{aligned}&4\left[(1-k_1k_3)(1-k_2k_3)t^2+bk_3(1-k_1k_3)x^2+ck_3(1-k_2k_3)y^2+bc{k_3}^2\right]\\&\qquad={k_3}^2(a-2t)^2+[2t+k_3(b+c)^2]-2[2t+k_3(b+c)][k_3(a-2t)] \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

⑤において、$bk_3(1-k_1k_3)x^2+ck_3(1-k_2k_3)y^2$ をtで表すことができれば、すべてをtの式で表せる。

$k_1=\dfrac{s-b}{r}$，$k_2=\dfrac{s-c}{r}$，$k_3=\dfrac{s-a}{r}$ から、$k_1\cdot k_2\cdot k_3=\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^3}$

$s(s-a)(s-b)(s-c)=S^2=(\mathrm{rs})^2$ だから、$k_1\cdot k_2\cdot k_3=\dfrac{(\mathrm{rs})^2}{s}\cdot\dfrac{1}{r^3}=\dfrac{s}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$

よって $k_1k_3=\dfrac{s}{s-c}$，$k_2k_3=\dfrac{s}{s-b}$ となるから、

これを $bk_3(1-k_1k_3)x^2+ck_3(1-k_2k_3)y^2$に入れると、

$$bk_3\left(1-\frac{s}{s-c}\right)x^2+ck_3\left(1-\frac{s}{s-b}\right)y^2=\frac{-bck_3}{s-c}x^2+\frac{-bck_3}{s-b}y^2=-bck_3\left(\frac{1}{s-c}x^2+\frac{1}{s-b}y^2\right)$$

$$=-bck_3\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{r}{s-c}x^2+\frac{r}{s-b}y^2\right)=\frac{-bck_3}{r}\left(\frac{1}{k_2}x^2+\frac{1}{k_3}y^2\right)=\frac{-bck_3}{k_1\,k_2r}(\,k_1x^2+\,k_2y^2)$$

これで $k_1x^2+\,k_2y^2$ の式で表すことができた。これを⑤に代入し展開，整理すると tの２次方程式になる。

$$4\left[(1-k_1k_3)(1-k_2k_3)-{k_3}^2-2k_3-1\right]t^2+4k_3\left[\frac{2bc}{k_1k_2r}+k_3(a-b-c)+(a-b-c)\right]t$$

$$+{k_3}^2\left[4bc-a^2-(b+c)^2+2a(b+c)-\frac{4abc}{s}\right]=0\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦式のt^2の項について、

$$4\left[(1-k_1k_3)(1-k_2k_3)-{k_3}^2-2k_3-1\right]=4k_3[k_1k_2k_3-(k_1+k_2+k_3)-2]$$

$$=4k_3\left[\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}-\left(\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}\right)-2\right]$$

ここで、$\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$のとき、$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$ だから、

$\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}$ であり[　　]*内は*-2 *となるので*、

t^2の項は、 $\underline{\underline{-8k_3t^2}}$ である。

⑦式のtの項について、

$$4k_3\left[\frac{2bc}{k_1k_2r}+k_3(a-b-c)+(a-b-c)\right]=4k_3\left[\frac{2bc}{k_1k_2r}-2k_3(s-a)-2(s-a)\right]$$

$=8k_3\left(\dfrac{bc}{k_1k_2r}-{k_3}^2r-k_3r\right)$，$\dfrac{bc}{k_1k_2r}=\dfrac{bck_3}{s}=\dfrac{bck_3r}{sr}$ と変形すると、分母は$sr=S$，分子 bck_3r は

$\dfrac{1}{2}bc\sin\gamma\cdot k_3r\cdot\dfrac{2}{\sin\gamma}$ と考えれば、$\dfrac{1}{2}bc\sin\gamma=S$ だから $bck_3r=\dfrac{2k_3rS}{\sin\gamma}$ となる。

従って、$\dfrac{bc}{k_1k_2r}=\dfrac{\frac{2k_3rS}{\sin\gamma}}{S}=\dfrac{2k_3r}{\sin\gamma}$ となる。

よって、$8k_3\left(\dfrac{bc}{k_1k_2r}-{k_3}^2r-k_3r\right)=8k_3r\left(\dfrac{2k_3}{\sin\gamma}-{k_3}^2-k_3\right)$

$$\frac{2k_3}{\sin\gamma}=\frac{\dfrac{2\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{1}{sin^2\frac{\gamma}{2}}=1+\frac{1}{tan^2\frac{\gamma}{2}},\ {k_3}^2=\frac{1}{tan^2\frac{\gamma}{2}}$$ であるから (　　)内は $1-k_3$となる。

従って、tの項は、 $\underline{\underline{8k_3r(1-k_3)t}}$ である。

⑦式の定数項について、

$${k_3}^2\left[4bc-a^2-(b+c)^2+2a(b+c)-\frac{4abc}{s}\right]$$

[　　]内の１～４項は、$-\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ca)=-(a+b+c)^2+4(ab+bc+ca)$

と変形できる。$(s-a)(s-b)(s-c)$ を展開して、

$(s-a)(s-b)(s-c)=s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc$，$s^2$で両辺を割れば、

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}=s-(a+b+c)+\frac{ab+bc+ca}{s}-\frac{abc}{s^2}$$

$$\frac{ab+bc+ca}{s}-\frac{abc}{s^2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}-s+(a+b+c)$$ となることに注意すれば、

[　　]内は、

$$-(a+b+c)^2+4(ab+bc+ca)-\frac{4abc}{s}=s\left[-\frac{(a+b+c)^2}{s}+4\left\{\frac{ab+bc+ca}{s}-\frac{abc}{s^2}\right\}\right]$$

$$=s\left[-\frac{(a+b+c)^2}{s}+4\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}-s+(a+b+c)\right\}\right]$$

$$=-(a+b+c)^2+4\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}-4s^2+4s(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)[4s-(a+b+c)]+4\frac{(rs)^2}{s^2}-4s^2=2s(4s-2s)+4r^2-4s^2=4r^2$$ となるので、

定数項は、 $\underline{\underline{4{k_3}^2r^2}}$ である。

　以上をまとめると⑦は、$\mathrm{t}=xy$ の２次方程式として、

　$-8k_3t^2+8k_3r(1-k_3)t+\ 4{k_3}^2r^2=0$ となる。$-4k_3$で割って

　 $2t^2-2r(1-k_3)t-\ k_3r^2=0$ ･･････････⑧ が得られる。

これを解いて、$t=xy=\dfrac{(1-k_3)r\pm\sqrt{r^2(1-k_3)^2+2k_3r^2}}{2}=\dfrac{(1-k_3)r\pm r\sqrt{1+{k_3}^2}}{2}$ 、xy＞0 より、

$$xy=\frac{r}{2}\left(1-k_3+\sqrt{1+{k_3}^2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\text{⑨}$$ が導かれる。

⑨式は、$2xy=r-k_3r+\sqrt{r^2+(k_3r)^2}$ と変形すると、図６ － １において $P_1Q_1=\mathrm{I}R_1-\mathrm{C}R_1+IC$ であることを示しており、マルファッティの定理を計算から導いたものとなっている。

①，②，③式が対称形であることに注意すると、同様の計算により、

$$yz=\frac{r}{2}\left(1-k_1+\sqrt{1+{k_1}^2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\text{⑩}$$

$$zx=\frac{r}{2}\left(1-k_2+\sqrt{1+{k_2}^2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑪$$ となる。

$x=\sqrt{r_1}$，$y=\sqrt{\mathrm{r}_2}$，$z=\sqrt{r_3}$ であるから、⑨×⑩×⑪を作ると、

$$x^2y^2z^2=r_1r_2r_3=\left(\frac{r}{2}\right)^3\left(1-k_1+\sqrt{1+{k_1}^2}\right)\left(1-k_2+\sqrt{1+{k_2}^2}\right)\left(1-k_3+\sqrt{1+{k_3}^2}\right)\cdots\cdots⑫$$

⑨～⑫から、

$$r_1=\frac{r_1r_2r_3}{r_2r_3}=\frac{r_1r_2r_3}{(yz)^2}=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1-k_2+\sqrt{1+{k_2}^2}\right)\left(1-k_3+\sqrt{1+{k_3}^2}\right)}{\left(1-k_1+\sqrt{1+{k_1}^2}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑬$$

$$r_2=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1-k_3+\sqrt{1+{k_3}^2}\right)\left(1-k_1+\sqrt{1+{k_1}^2}\right)}{\left(1-k_2+\sqrt{1+{k_2}^2}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

$$r_3=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1-k_1+\sqrt{1+{k_1}^2}\right)\left(1-k_2+\sqrt{1+{k_2}^2}\right)}{\left(1-k_3+\sqrt{1+{k_3}^2}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

$k_3=\dfrac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}$ だから、$\sqrt{1+{k_3}^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{\tan^2\frac{\gamma}{2}}}=\dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ であり⑨は、$xy=\dfrac{r}{2}\left(1-\dfrac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)$

$$=\frac{r}{2}\left(1-\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)=\frac{r}{2}\left(1+\frac{1-\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)=\frac{r}{2}\left(1+\frac{1-(1-2sin^2\frac{\gamma}{4})}{2\sin\frac{\gamma}{4}\cos\frac{\gamma}{4}}\right)=\frac{r}{2}\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)$$

と表せる。同じように⑩⑪は、$yz=\dfrac{r}{2}\left(1+\tan\dfrac{\alpha}{4}\right)$，$zx=\dfrac{r}{2}\left(1+\tan\dfrac{\beta}{4}\right)$ となり、

$$r_1=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)}{\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

$$r_2=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)}{\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰$$

$$r_3=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)}{\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑱$$

というように、$tan\dfrac{\alpha}{4}$，$tan\dfrac{\beta}{4}$，$tan\dfrac{\gamma}{4}$ を用いてシンプルな式で表せる。

a，b，c の式で表すには、⑬⑭⑮に$k_1 = \dfrac{s-b}{r}$，$k_2 = \dfrac{s-c}{r}$，$k_3 = \dfrac{s-a}{r}$ を入れて、

$$r_1 = \frac{r}{2}\frac{\left[r-(s-c)+\sqrt{r^2+(s-c)^2}\right]\left[r-(s-a)+\sqrt{r^2+(s-a)^2}\right]}{\left[r-(s-b)+\sqrt{r^2+(s-b)^2}\right]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑲$$

$$r_1 = \frac{r}{2}\frac{\left[r-(s-a)+\sqrt{r^2+(s-a)^2}\right]\left[r-(s-b)+\sqrt{r^2+(s-b)^2}\right]}{\left[r-(s-c)+\sqrt{r^2+(s-c)^2}\right]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑳$$

$$r_1 = \frac{r}{2}\frac{\left[r-(s-b)+\sqrt{r^2+(s-b)^2}\right]\left[r-(s-c)+\sqrt{r^2+(s-c)^2}\right]}{\left[r-(s-a)+\sqrt{r^2+(s-a)^2}\right]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots㉑$$

とすることができる。

４．シェルバッハの解法

マルファッティの問題について公表されている解法はあまり多くはない。
よく知られているのはスタイナー（Steiner）と、シュルバッハ（Schellbach）の解法である。

スタイナーの方は、マルファッティの３つの円の作図法についてのもの。シェルバッハの解法についてはネット上で多くの論文が見つかった。英語やドイツ語などいくつかの国の論文を調べたがなかなか理解できなかった。調べた範囲では最後の r_1，r_2，r_3 を求めるところの説明がなかったためである。

それでも諦めず根気よく読み計算を繰り返し、何とか理解することができた。ここで、自分なりに理解したシェルバッハの解法について記す。その着想のすばらしさに感心してしまう。

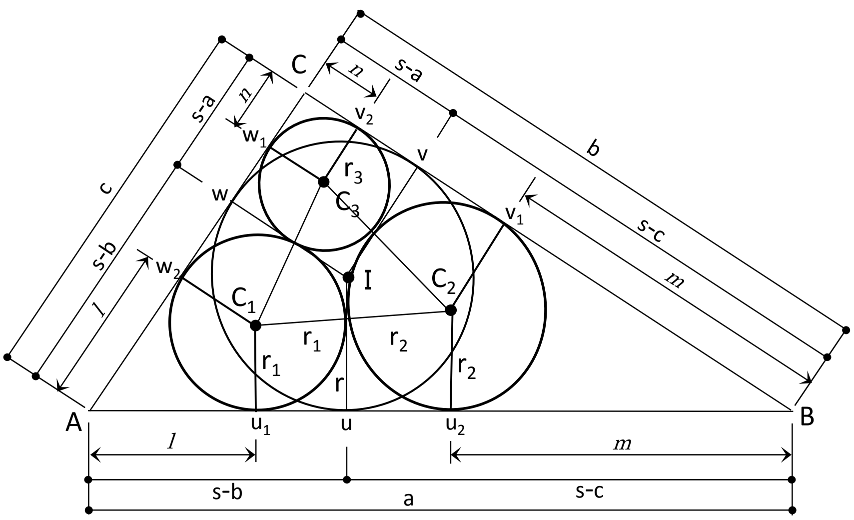

図１

図１において、$r_1 : l = r : s-b$ から $r_1 = \dfrac{lr}{s-b}$， 同様に、$r_2 : m = r : s-c$ から $r_2 = \dfrac{mr}{s-c}$，

$$u_1u_2 = 2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{\frac{lr}{s-b}\cdot\frac{mr}{s-c}} = 2r\left(\frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\right),$$

ヘロンの公式 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ を入れると、

$$u_1u_2 = 2r\left(\frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\right) = 2r\frac{\sqrt{lm}}{\left(\dfrac{S}{\sqrt{s(s-a)}}\right)} = 2r\left(\frac{\sqrt{lm}\cdot\sqrt{s(s-a)}}{rs}\right) = 2\sqrt{lm}\sqrt{\frac{s-a}{s}}$$

$l + u_1u_2 + m = a$ だから、

$$a = l + m + 2\sqrt{lm}\sqrt{\frac{s-a}{s}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同じように次式を得る。

$$b = m + n + 2\sqrt{mn}\sqrt{\frac{s-b}{s}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$c = n + l + 2\sqrt{nl}\sqrt{\dfrac{s-c}{s}}$ ・・・・・・・・・・・・・・③

$b+c<a$ より、$a+b+c<2a$，$\mathrm{s}=\dfrac{a+b+c}{2}=1$ とすると、$a<1$，同様に$b<1$，$c<1$ である。

さらに、0<l，m，n<1 だから、a，b，c，l，m，n に対し６つの角、θ_1～θ_3，ϕ_1～ϕ_3 を対応させることができる。

$\mathrm{a}=sin^2\,\theta_1$，$b=sin^2\,\theta_2$，$c=sin^2\,\theta_3$，$l=sin^2\varphi_1$，$m=sin^2\varphi_2$，$n=sin^2\varphi_3$ とすると、

$s=a+(s-a)=1$ より、$s-a=1-a=1-sin^2\,\theta_1=cos^2\,\theta_1$

一方、①式 $\sqrt{\dfrac{s-a}{s}}$ について、$\sqrt{s-a}=\sqrt{cos^2\,\theta_1}$ なので、$\sqrt{\dfrac{s-a}{s}}=\dfrac{\sqrt{cos^2\,\theta_1}}{1}=\cos\theta_1$である。

よって、

①は、$sin^2\,\theta_1\ =sin^2\varphi_1+sin^2\varphi_2+2sin\varphi_1\cdot sin\varphi_2\cdot\cos\theta_1$ ・・・・・・・・・・・・・・④

同様に、

②は、$sin^2\,\theta_2=sin^2\varphi_2+sin^2\varphi_3+2sin\varphi_2\cdot sin\varphi_3\cdot\cos\theta_2$ ・・・・・・・・・・・・・・⑤

③は、$sin^2\,\theta_3=sin^2\varphi_3+sin^2\varphi_1+2sin\varphi_3\cdot sin\varphi_1\cdot\cos\theta_3$ ・・・・・・・・・・・・・・⑥ と表せる。

ここで、図２のような三角形を考える。

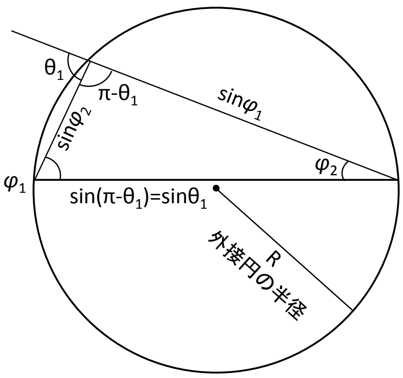

図２

正弦定理から、$\dfrac{\text{三角形の１辺}}{\text{辺の対角の正弦}}=2\times$外接円の半径（$R$）だから、

$\dfrac{sin\theta 1}{sin(\pi-\theta 1)}=\dfrac{sin\varphi_1}{sin\varphi_1}=\dfrac{sin\varphi_2}{sin\varphi_2}=2R=1$ より、$\mathrm{R}=\dfrac{1}{2}$ である。

この三角形に余弦定理を適用すると、

$sin^2\,\theta_1\ =sin^2\varphi_1+sin^2\varphi_2-2sin\varphi_1\cdot sin\varphi_2\cdot\cos(\pi-\ \theta_1)$

$\qquad =sin^2\varphi_1+sin^2\varphi_2+2sin\varphi_1\cdot sin\varphi_2\cdot\cos\theta_1$ ・・・・・・・・・・・・・・⑦

が得られ、⑦は④に一致する。このとき $\varphi_1+\varphi_2<\frac{\pi}{2}$ である。同様に、

$sin^2\,\theta_2=sin^2\varphi_2+sin^2\varphi_3+2sin\varphi_2\cdot sin\varphi_3\cdot\cos\theta_2$ ・・・・・・・・・・・・・・⑧

$sin^2\,\theta_3=sin^2\varphi_3+sin^2\varphi_1+2sin\varphi_3\cdot sin\varphi_1\cdot\cos\theta_3$ ・・・・・・・・・・・・・・⑨

が得られ、$\varphi_1+\varphi_2+\left(\pi-\ \theta_1\right)=\ \pi$から、$\theta_1=\varphi_1+\varphi_2$，$\theta_2=\varphi_2+\varphi_3$，$\theta_3=\varphi_3+\varphi_1$・・・・・・・・⑩ が導かれる。

余弦定理から導かれる式 ⑦⑧⑨が ④⑤⑥ と一致するところがポイントである。

$\mathrm{r}=\dfrac{S}{\mathrm{s}}=\dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$，$\mathrm{s}=1$ なので、$r=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}=cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 cos\,\theta_3$

$r_1=\dfrac{l\,r}{s-b}=\dfrac{sin^2\varphi_1\cdot cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 cos\,\theta_3}{cos^2\,\theta_2}=\dfrac{cos\,\theta_1 cos\,\theta_3}{cos\,\theta_2}sin^2\varphi_1$ ・・・・・・・・・・・・・・⑪

$r_2=\dfrac{m\,r}{s-c}=\dfrac{sin^2\varphi_2\cdot cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 cos\,\theta_3}{cos^2\,\theta_3}=\dfrac{cos\,\theta_1 cos\,\theta_2}{cos\,\theta_3}sin^2\varphi_2$ ・・・・・・・・・・・・・・⑫

$r_3=\dfrac{n\,r}{s-a}=\dfrac{sin^2\varphi_3\cdot cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 cos\,\theta_3}{cos^2\,\theta_1}=\dfrac{cos\,\theta_2 cos\,\theta_3}{cos\,\theta_1}sin^2\varphi_3$ ・・・・・・・・・・・・・・⑬

これから、$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$，$\sin^2\varphi_1$，$\sin^2\varphi_2$，$\sin^2\varphi_3$ がわかればr_1，r_2，r_3が求められる。

⑩より、$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\dfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\sigma$ とおくと、

$\varphi_1=\sigma-\theta_2$，$\varphi_2=\sigma-\theta_3$，$\varphi_3=\sigma-\theta_1$ である。

$\sin\theta_1=\sqrt{a}$，$\sin\theta_2=\sqrt{b}$，$\sin\theta_3=\sqrt{c}$

$\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\sqrt{1-a}$，同様に、$\cos\theta_2=\sqrt{1-b}$，$\cos\theta_3=\sqrt{1-c}$，

$\sin^2\varphi_1=\sin^2(\sigma-\theta_2)=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos(2\sigma-2\theta_2)\right]$ ・・・・・・・・・・・⑭となるから、

$\cos\left(2\sigma-2\theta_2\right)$を展開して整理すると、

$$\cos\left(2\sigma-2\theta_2\right)=\cos 2\sigma\cdot\cos 2\theta_2+\sin 2\sigma\cdot\sin 2\theta_2=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\cos\theta_2+\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\sin\theta_2$$
$$=(1-2b)\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right\}$$
$$+2\sqrt{b}\sqrt{1-b}\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right\}$$

これを⑭に入れ、a，b，cで表した$\sin^2\varphi_1$を⑪に代入し、$s=1$ としたことを考慮し s 倍したものが求める円の半径である。

$$r_1=s\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_3}{\cos\theta_2}\sin^2\varphi_1=\frac{1}{2}s\sqrt{\frac{(1-a)(1-c)}{1-b}}\Big[1-(1-2b)\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right\}+2\sqrt{b}\sqrt{1-b}\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑮$$

同様にr_2，r_3を求めると、

$$r_2=s\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos\theta_3}\sin^2\varphi_2=\frac{1}{2}s\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1-c}}\Big[1-(1-2c)\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right\}+2\sqrt{c}\sqrt{1-c}\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑯$$

$$r_3=s\cdot\frac{\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\theta_1}\sin^2\varphi_3=\frac{1}{2}s\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{1-a}}\Big[1-(1-2a)\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right\}+2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\right\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑰$$

かなり複雑な式になるが、⑮⑯⑰が求める解である。

ネット上で公開されている論文は図２と⑩式までで、⑪式以降のことは書かれていない。あとは式を立てて解けば自然と答えが出るということなのだろうが、私としてはこの繋がりのところがずっと理解できなかったのである。$s=1$ として、a，b，c，l，m，n に対し６つの角$(\theta_1\sim\theta_3,\ \phi_1\sim\phi_3)$を対応させる。

$\sin\theta_1$，$\sin\varphi_1$，$\sin\varphi_2$を３辺とする三角形を考え、これに余弦定理を適用した式と、もとの三角形の１辺に対して立てた式を一致させるという発想だが、 私としてはどのようにしてこの発想にたどり着いたのか知りたいと思った。

５．手計算で解を求める

３つの円の半径（r_1, r_2, r_3）は必ず無理数で表すことができる。

ここで、$a = 4, b = 3, c = 5$（$\beta = \frac{\pi}{2}$の直角三角形）の場合について、次の５つの式を用いて手計算で求めてみる。

１．マルファッティの式による計算

２．三元連立２次方程式から導かれた式による計算

３．tan(α/4)，tan(β/4)，tan(γ/4)の式による計算

４．シェルバッハの式による計算

５．私が導いた式による計算

１．マルファッティの式による計算

$$r_1 = \frac{r}{2(s-b)}[s - r - (IB + IC - IA)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$r_2 = \frac{r}{2(s-c)}[s - r - (IC + IA - IB)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

$$r_3 = \frac{r}{2(s-a)}[s - r - (IA + IB - IC)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

$$\mathrm{s} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+3+5}{2} = 6 \quad , S = \sqrt{\mathrm{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \sqrt{6(6-4)(6-3)(6-5)} = 6$$

$\mathrm{r} = \frac{S}{s} = \frac{6}{6} = 1$ から、

$$IA = \sqrt{(s-b)^2 + r^2} = \sqrt{(6-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$IB = \sqrt{(s-c)^2 + r^2} = \sqrt{(6-5)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$IC = \sqrt{(s-a)^2 + r^2} = \sqrt{(6-4)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$　　　以上より、

$$r_1 = \frac{1}{2(6-3)}\left[6 - 1 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10}\right)\right] = \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$$

$$r_2 = \frac{1}{2(6-5)}\left[6 - 1 - \left(\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$$

$$r_3 = \frac{1}{2(6-4)}\left[6 - 1 - \left(\sqrt{10} + \sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(5 - \sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$$

この解を２６０ページの結果、

$$r_1 = \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right) \fallingdotseq 0.7520$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{10} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right) \fallingdotseq 0.5079$$

$$r_3 = \frac{1}{4}\left(5 - \sqrt{10} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right) \fallingdotseq 0.6649$$

と比較する。

$\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$を計算すると、$5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$ から、$\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$

$\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{10} + 2 = 7 + 2\sqrt{10}$ となるから、$\sqrt{5} + \sqrt{2} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ と一致する。

２．三元連立２次方程式から導かれた式による計算

$$r_1 = \frac{r}{2}\,\frac{\left(1 - k_2 + \sqrt{1 + {k_2}^2}\right)\left(1 - k_3 + \sqrt{1 + {k_3}^2}\right)}{\left(1 - k_1 + \sqrt{1 + {k_1}^2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑬$$

$$r_2 = \frac{r}{2}\,\frac{\left(1 - k_3 + \sqrt{1 + {k_3}^2}\right)\left(1 - k_1 + \sqrt{1 + {k_1}^2}\right)}{\left(1 - k_2 + \sqrt{1 + {k_2}^2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

$$r_3 = \frac{r}{2}\,\frac{\left(1 - k_1 + \sqrt{1 + {k_1}^2}\right)\left(1 - k_2 + \sqrt{1 + {k_2}^2}\right)}{\left(1 - k_3 + \sqrt{1 + {k_3}^2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

$\mathrm{s} = 6 \ \ , r = 1$

$$k_1 = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{s - b}{\mathrm{r}} = \frac{6 - 3}{1} = 3 \ , k_2 = \frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}} = \frac{s - c}{\mathrm{r}} = \frac{6 - 5}{1} = 1 \ , k_3 = \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{s - a}{\mathrm{r}} = \frac{6 - 4}{1} = 2$$

$$1 - k_1 + \sqrt{1 + {k_1}^2} = 1 - 3 + \sqrt{1 + 3^2} = -2 + \sqrt{10}$$

$$1 - k_2 + \sqrt{1 + {k_2}^2} = 1 - 1 + \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$1 - k_3 + \sqrt{1 + {k_3}^2} = 1 - 2 + \sqrt{1 + 2^2} = -1 + \sqrt{5}$　　以上を⑬⑭⑮に入れると、

$$r_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{-2 + \sqrt{10}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(-2 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)}{6} = \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(-1 + \sqrt{5}\right)\left(-2 + \sqrt{10}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{2 - \sqrt{10} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$$

$$r_3 = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(-2 + \sqrt{10}\right)}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(-2 + \sqrt{10} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{1}{4}\left(5 - \sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$$

結果は一致する。

３．tan(α/4)，tan(β/4)，tan(γ/4)の式による計算

$$r_1=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)}{\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

$$r_2=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)}{\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰$$

$$r_3=\frac{r}{2}\,\frac{\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)}{\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑱$$

$s=6$,$r=1$ より、

$$\tan\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-a)(s-c)}}=\frac{\sqrt{4\cdot5}-\sqrt{6(6-3)}}{\sqrt{(6-4)(6-5)}}=\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-3+\sqrt{10}$$

$$\tan\frac{\beta}{4}=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}=\frac{\sqrt{4\cdot3}-\sqrt{6(6-5)}}{\sqrt{(6-4)(6-3)}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=-1+\sqrt{2}$$

$$\tan\frac{\gamma}{4}=\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}=\frac{\sqrt{3\cdot5}-\sqrt{6(6-4)}}{\sqrt{(6-3)(6-5)}}=\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{5}$$

以上を⑯⑰⑱に入れると、

$$r_1=\frac{1}{2}\,\frac{\left(1-1+\sqrt{2}\right)\left(1-2+\sqrt{5}\right)}{\left(1-3+\sqrt{10}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)}{-2+\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\,\frac{-10+2\sqrt{10}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(5+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

$$r_2=\frac{1}{2}\,\frac{\left(1-2+\sqrt{5}\right)\left(1-3+\sqrt{10}\right)}{\left(1-1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(-2+\sqrt{10}\right)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

$$r_3=\frac{1}{2}\,\frac{\left(1-3+\sqrt{10}\right)\left(1-1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-2+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(-2+\sqrt{10}\right)}{-1+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\,\frac{10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

結果は一致する。

４．シェルバッハの式による計算

$$r_1=s\cdot\frac{cos\,\theta_1 cos\,\theta_3}{cos\,\theta_2}sin^2\varphi_1=\frac{1}{2}s\sqrt{\frac{(1-a)(1-c\,)}{1-b}}\left[1-(1-2b)\left\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(\,1-b)}-\sqrt{ab}\,\right)\right.\right.$$

$$-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\Big\}+2\sqrt{b}\sqrt{1-b}\Big\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)$$
$$+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\Big\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑮$$

$$r_2=s\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos\theta_3}\sin^2\varphi_2=\frac{1}{2}s\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1-c}}\Big[1-(1-2c)\Big\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)$$
$$-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\Big\}+2\sqrt{c}\sqrt{1-c}\Big\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)$$
$$+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\Big\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑯$$

$$r_3=s\cdot\frac{\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\theta_1}\sin^2\varphi_3=\frac{1}{2}s\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{1-a}}\Big[1-(1-2a)\Big\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)$$
$$-\sqrt{c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)\Big\}+2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\Big\{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-b}+\sqrt{b}\sqrt{1-a}\right)$$
$$+\sqrt{c}\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}-\sqrt{ab}\right)\Big\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑰$$

$a=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$b=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$c=\frac{5}{6}$，$s=6$ を⑮式に入れて計算すると、

$$r_1=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{\frac{(1-\frac{2}{3})(1-\frac{5}{6})}{1-\frac{1}{2}}}\left[1-\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)\left\{\sqrt{1-\frac{5}{6}}\left(\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}-\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right)-\sqrt{\frac{5}{6}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{2}{3}}\right)\right\}\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{1-\frac{5}{6}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{2}{3}}\right)+\sqrt{\frac{5}{6}}\left(\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}-\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right)\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{3}\left[1-\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{\frac{1-\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}\right\}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1-\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{6}\right\}\right.$$
$$=\frac{1}{6}\left(5+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

結果は一致する。（r_2，r_3 については省略）

５．私が導いた式による計算

$$t_1=\frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{\alpha}{4}-\tan\frac{\beta}{2}\right)+\sqrt{\frac{a\cdot\tan\frac{\beta}{2}}{c\cdot\tan\frac{\gamma}{2}}}\left(\tan\frac{\alpha}{4}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)\right]$$
$$+\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\tan\frac{\alpha}{4}+\tan\frac{\beta}{2}\right)-\sqrt{\frac{a\cdot\tan\frac{\beta}{2}}{c\cdot\tan\frac{\gamma}{2}}}\left(\tan\frac{\alpha}{4}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)\right\}\right]^2+\frac{1}{(1+\cos\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{a\cdot\tan\frac{\beta}{2}}{c\cdot\tan\frac{\gamma}{2}}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ㊷$$

$s=6$　$,r=1$

$\tan\frac{\alpha}{4}=-3+\sqrt{10}$，$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-c}=\frac{1}{6-5}=1$，$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-a}=\frac{1}{6-4}=\frac{1}{2}$

$$cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{s(s-b)}}{\mathrm{ac}}}=\sqrt{\frac{6(6-3)}{4\cdot 5}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$$ を㊷式に入れて計算する。

$$t_1=\frac{1}{2}\left[\left(-3+\sqrt{10}-1\right)+\sqrt{\frac{4\cdot 1}{5\cdot\frac{1}{2}}}\left(-3+\sqrt{10}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$+\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left\{\left(-3+\sqrt{10}+1\right)-\sqrt{\frac{4\cdot 1}{5\cdot\frac{1}{2}}}\left(-3+\sqrt{10}+\frac{1}{2}\right)\right\}\right]^2+\frac{1}{(1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}})}\sqrt{\frac{4\cdot 1}{5\cdot\frac{1}{2}}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(-4+\sqrt{10}\right)\left(4-\sqrt{10}\right)\right]+\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left\{\left(-2+\sqrt{10}\right)-\left(4-\sqrt{10}\right)\right\}\right]^2+\left(10-3\sqrt{10}\right)}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

$t_1=\dfrac{1}{tan\frac{\theta_1}{2}}$ から、$tan\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{3}$

㉞より、$r_1=\dfrac{a}{k_1+\frac{2}{tan\frac{\theta_1}{2}}+\frac{k_2}{tan^2\frac{\theta_1}{2}}}$ ，$k_1=3$，$k_2=1$ と$tan\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{3}$ を入れると、

$$r_1=\frac{4}{3+\frac{2\cdot 3}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}+\frac{1\cdot 3^2}{(\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2}}=\frac{4}{3}\frac{4}{1+\frac{2}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}+\frac{3}{7+2\sqrt{10}}}$$

$\dfrac{2}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}=\dfrac{2\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{3}$ ，$\dfrac{3}{7+2\sqrt{10}}=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$ だから、

$$r_1=\frac{4}{3}\frac{1}{1+\frac{2\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{3}+\frac{7-2\sqrt{10}}{3}}=\frac{2}{5-\sqrt{10}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=\frac{5-\sqrt{10}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{2(7-2\sqrt{10})}$$

$$=\frac{15+3\sqrt{10}-(7+2\sqrt{10})\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{18}=\frac{1}{6}\left(5+\sqrt{10}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)$$

$$r_2=\frac{r_1}{tan^2\frac{\theta_1}{2}}=r_1{t_1}^2=\frac{1}{6}\left(5+\sqrt{10}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

$$t_6=\frac{sin\frac{\alpha}{2}t_1+cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right)t_1-sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{tan\frac{\alpha}{2}t_1+1}{\left(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}}+1\right)t_1-tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{r}{s-b}t_1+1}{\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ac}}{s(s-b)}}+1\right)t_1-\frac{r}{s-b}}=\frac{t_1+3}{(3+\sqrt{10})t_1-1}$$

$$=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}+3}{(3+\sqrt{10})\sqrt{7-2\sqrt{10}}-1}=\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{10}+\sqrt{10}\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)$$

$r_3 = \dfrac{r_1}{tan^2 \dfrac{\theta_6}{2}}$ ， $t_6 = \dfrac{1}{tan \dfrac{\theta_6}{2}}$ から、$r_3 = r_1 {t_6}^2$

$$r_3 = r_1 {t_6}^2 = \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right) \cdot \frac{1}{4^2}\left(-2 + \sqrt{10} + \sqrt{10}\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(21 - 6\sqrt{10} + (5 - \sqrt{10})\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(5 - \sqrt{10} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)$$

他の解に比べて計算がやや複雑である。r_3を求める時にθ_1からθ_6を計算する必要があり、手間がかかることが難点であるが結果は一致する。

自分自身で導いた式を含め、５種類の式で計算してみた。式は全く異なるのに、数値を入れて計算すると必ず最後には答えが一致するのが凄い！ 勿論、途中で計算を間違わなければの話だが。数学は見えない奥底どこかで繋がっていることを感じる。

当然と言えば当然なのだが、$\frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$というような複雑な無理数がピッタリ合うのには何故か感動してしまった。$\frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{10} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right)$という解が出て来た時は「？」となったが、結局は同じ答えだった。代数学的方法，幾何学的方法，三角関数を用いる方法などいろいろあるが、難易度の差はあってもそれぞれの方法で解くことができる、というのが数学の面白いところであり惹かれるところでもある。（２０１６．８．１８）