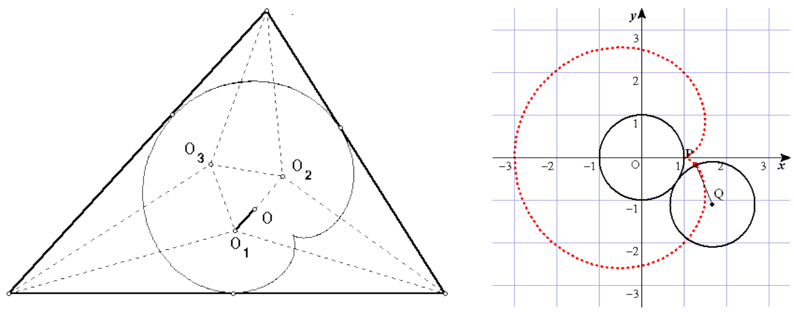
６３「モーリーの定理」

　モーリーの定理とは、

「任意の三角形において，各内角の３等分線の隣同士の交点を結んで得られる三角形は正三角形である」
という定理である。この不思議で美しい定理を知ったのはごく最近のことだ。

　アメリカの数学者フランク・モーリーは、ハート形曲線（カージオイド：円の外周を円が回転しながら動く時、円周上の１点が描く曲線）を三角形に内接させながら動かすとき、その中心の軌跡が正三角形を描くことを発見した。（図１）

　この定理に独自の証明を与えようと多くの時間を費やし、自分なりの証明ができたのでここに紹介したい。



カージオイド

図１

【証明１】

　図２　◿ＡＢＣにおいて、各辺の長さをａ，ｂ，ｃ、∠ＣＡＢ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＢＣＡ＝γとする。３つの角それぞれの３等分線の交点が作る三角形ＤＥＦが正三角形であることを証明する。

　ＡＤ，ＡＦ，ＢＤ，ＢＥの長さをそれぞれ a_1，a_2，b_1，b_2 とする。

　ベクトルＡＤ，ＡＦ，ＢＤ，ＢＥをそれぞれ $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$ と表すと、ベクトルＤＦ＝$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$，ベクトルＤＥ＝$\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ である。

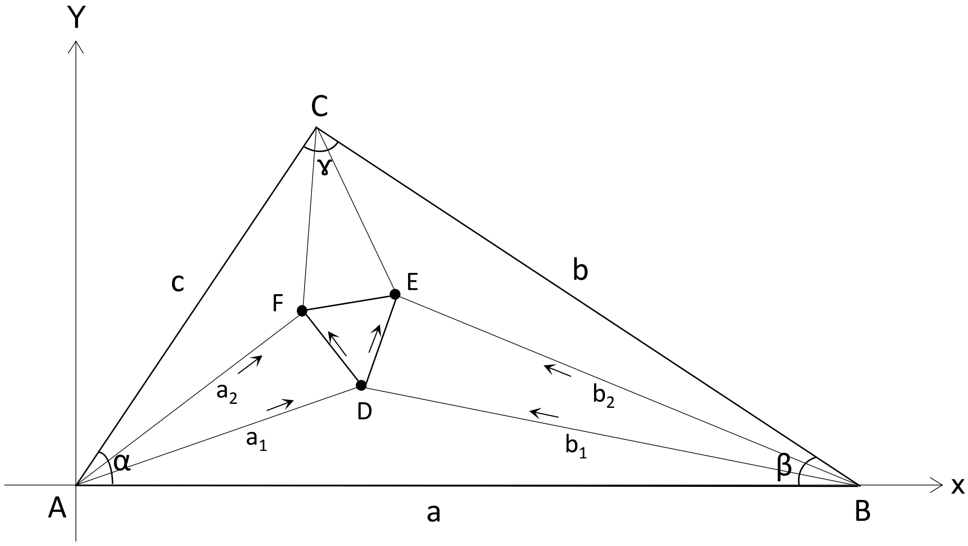


図２

　点Ａを原点とするＸ－Ｙ直交座標を考え、それぞれのベクトルを複素数で表すと、

$\mathbf{a}_1 = a_1 e^{i\frac{\alpha}{3}}$，$\mathbf{a}_2 = a_2 e^{i\frac{2\alpha}{3}}$，$\mathbf{b}_1 = b_1 e^{i(\pi-\frac{\beta}{3})} + a$，$\mathbf{b}_2 = b_2 e^{i(\pi-\frac{2\beta}{3})} + a$　と表せるので、

ＤＦ＝$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$＝$a_2e^{i\frac{2\alpha}{3}}-a_1e^{i\frac{\alpha}{3}}$，ＤＥ＝$\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1$＝$b_2e^{i(\pi-\frac{2\beta}{3})}-b_1e^{i(\pi-\frac{\beta}{3})}$

∠ＥＤＦ＝60°であることを証明するために、ベクトルＤＥを反時計回りに 60°回転させたものがベクトルＤＦに一致することを示す。

そのためにはＤＥに$e^{i\frac{\pi}{3}}$（$e^{i\frac{\pi}{3}}$=60°回転させる複素数）を掛けたものがＤＦに一致すればよいので、

$$\text{ＤＥ}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=\left[b_2e^{i\left(\pi-\frac{2\beta}{3}\right)}-b_1e^{i\left(\pi-\frac{\beta}{3}\right)}\right]\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=a_2e^{i\frac{2\alpha}{3}}-a_1e^{i\frac{\alpha}{3}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

が成り立てばよい。

$b_2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{2\beta}{3}\right)}=-b_2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\beta}{3}\right)}$，$b_1e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\beta}{3}\right)}=-b_1e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\beta}{3}\right)}$ に注意し①を変形すると、

$a_1e^{i\frac{\alpha}{3}}-a_2e^{i\frac{2\alpha}{3}}=b_2e^{i\frac{\pi-2\beta}{3}}-b_1e^{i\frac{\pi-\beta}{3}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$② となる。

②は、$a_1\left(cos\frac{\alpha}{3}+i\,sin\frac{\alpha}{3}\right)-a_2\left(cos\frac{2\alpha}{3}+i\,sin\frac{2\alpha}{3}\right)$

$$=b_2\left(cos\frac{\pi-2\beta}{3}+i\,sin\frac{\pi-2\beta}{3}\right)-b_1\left(cos\frac{\pi-\beta}{3}+i\,sin\frac{\pi-\beta}{3}\right)$$

と表すことができる。

この式が成り立つためには符号に注意しながら実部と虚部を整理し、

実部　$a_1cos\frac{\alpha}{3}-a_2cos\frac{2\alpha}{3}=b_2cos\frac{\pi-2\beta}{3}-b_1cos\frac{\pi-\beta}{3}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$③

虚部　$a_2\,sin\frac{2\alpha}{3}-a_1sin\frac{\alpha}{3}=b_1sin\frac{\pi-\beta}{3}-b_2sin\frac{\pi-2\beta}{3}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$④

③と④が同時に成り立つことが必要である。

③，④のそれぞれを二乗して、

$a_1{}^2cos^2\frac{\alpha}{3}+a_2{}^2cos^2\frac{2\alpha}{3}-2a_1a_2\,cos\frac{\alpha}{3}cos\frac{2\alpha}{3}$

$$=b_2{}^2cos^2\frac{\pi-2\beta}{3}+b_1{}^2cos^2\frac{\pi-\beta}{3}-2b_1b_2cos\frac{\pi-\beta}{3}cos\frac{\pi-2\beta}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots③'$$

$a_2{}^2sin^2\frac{2\alpha}{3}+a_1{}^2sin^2\frac{\alpha}{3}-2a_1a_2\,sin\frac{\alpha}{3}sin\frac{2\alpha}{3}$

$$=b_1{}^2sin^2\frac{\pi-\beta}{3}+b_2{}^2sin^2\frac{\pi-2\beta}{3}-2b_1b_2sin\frac{\pi-\beta}{3}sin\frac{\pi-2\beta}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots④'$$

③’+④’を作ると、

$a_1{}^2\left(sin^2\frac{\alpha}{3}+\cos^2\frac{\alpha}{3}\right)+a_2{}^2\left(sin^2\frac{2\alpha}{3}+\cos^2\frac{2\alpha}{3}\right)-2a_1a_2\left(cos\frac{\alpha}{3}cos\frac{2\alpha}{3}+sin\frac{\alpha}{3}sin\frac{2\alpha}{3}\right)$

$$=b_1{}^2\left(sin^2\frac{\pi-\beta}{3}+\cos^2\frac{\pi-\beta}{3}\right)+b_2{}^2\left(sin^2\frac{\pi-2\beta}{3}+\cos^2\frac{\pi-2\beta}{3}\right)$$

$$-2b_1b_2\left(cos\frac{\pi-\beta}{3}cos\frac{\pi-2\beta}{3}+sin\frac{\pi-\beta}{3}sin\frac{\pi-2\beta}{3}\right)$$

$cos\frac{\alpha}{3}cos\frac{2\alpha}{3}+sin\frac{\alpha}{3}sin\frac{2\alpha}{3}=cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)=cos\frac{\alpha}{3}$

$cos\frac{\pi-\beta}{3}cos\frac{\pi-2\beta}{3}+sin\frac{\pi-\beta}{3}sin\frac{\pi-2\beta}{3}=cos\left(\frac{\pi-\beta}{3}-\frac{\pi-2\beta}{3}\right)=cos\frac{\beta}{3}$ だから、

③$'$＋④$'$ から、$a_1{}^2+a_2{}^2-2a_1a_2cos\frac{\alpha}{3}=b_1{}^2+b_2{}^2-2b_1b_2cos\frac{\beta}{3}$ ･･････････⑤ を得る。

⊿ＡＤＦに余弦定理を適用すると、

ＤＦ$^2=a_1{}^2+a_2{}^2-2a_1a_2cos\frac{\alpha}{3}$･･････････⑥

同様に⊿ＢＤＥに余弦定理を適用すると、

ＤＥ$^2=b_1{}^2+b_2{}^2-2b_1b_2cos\frac{\beta}{3}$･･････････⑦

⑤式により⑥⑦の右辺は等しいので、ＤＥ＝ＤＦ が証明された。

図３において、∠ＥＤＦ＝θ，点Ｄを通りＡＢと平行な線A’B’とＤＦ，ＤＥの作る角をそれぞれθ_1，θ_2とする。さらに点Ｅを通り∠ＡＢＧ＝$\frac{\pi}{3}$ となる線ＢＧに平行な線をＥＥ’とすると、∠ＤＥ’Ｅ＝$\frac{\pi}{3}$から、∠ＤＥＥ’＝$\pi-\frac{\pi}{3}-\theta_2=\frac{2\pi}{3}-\theta_2$ である。

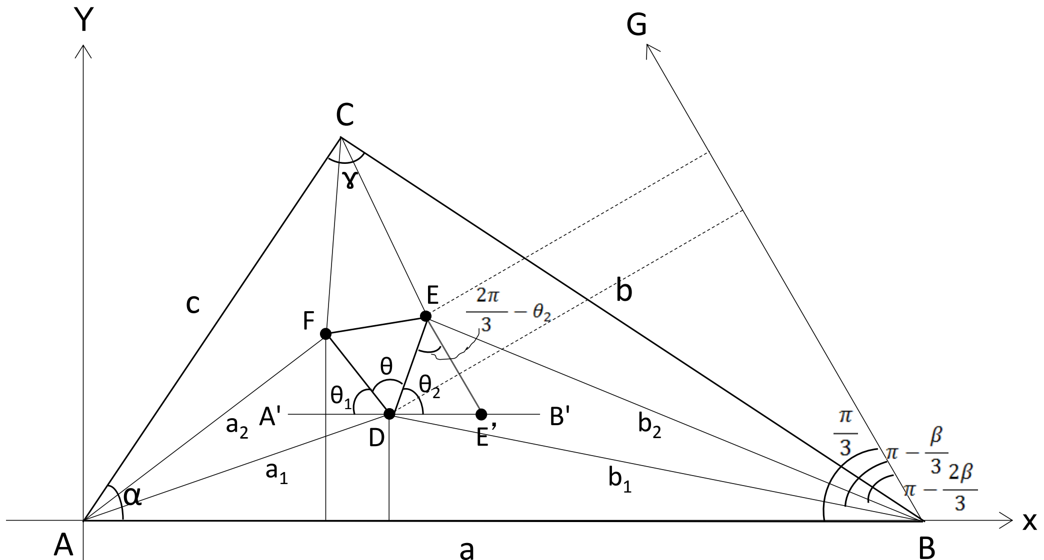


図３

③式、左辺及び右辺について、

$a_1cos\frac{\alpha}{3}-a_2cos\frac{2\alpha}{3}=$ ＤＦ$cos\theta_1$

$b_2cos\frac{\pi-2\beta}{3}-b_1cos\frac{\pi-\beta}{3}=$ ＤＥ$cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta_2\right)$だから、

$$\mathrm{DF}\,cos\theta_1 = \mathrm{DE}\,cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta_2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

④式についても同じように、

$$a_1 sin\frac{\alpha}{3} - a_2 sin\frac{2\alpha}{3} = \mathrm{DF}\,sin\theta_1$$

$$b_1 sin\frac{\pi-\beta}{3} - b_2 sin\frac{\pi-2\beta}{3} = \mathrm{DE}\,sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta_2\right)$$ から、

$$\mathrm{DF}\,sin\theta_1 = \mathrm{DE}\,sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta_2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

また、$\theta = \pi - (\theta_1 + \theta_2)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$⑩ である。

$\frac{⑧}{⑨}$を作ると、$\frac{\mathrm{DF}\,cos\theta_1}{\mathrm{DF}\,sin\theta_1} = \frac{\mathrm{DE}\,cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta_2\right)}{\mathrm{DE}\,sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta_2\right)}$， $\frac{cos\theta_1}{sin\theta_1} = \frac{cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta_2\right)}{sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta_2\right)}$ が得られ、整理すると

$$cos\theta_1 sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta_2\right) = sin\theta_1\, cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta_2\right)$$

$$cos\theta_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta_2 + \frac{1}{2}sin\theta_2\right) = sin\theta_1\,\left(-\frac{1}{2}cos\theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta_2\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1\, sin\theta_2) + \frac{1}{2}(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2) = 0$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}cos(\theta_1+\theta_2) + \frac{1}{2}sin(\theta_1+\theta_2) = 0$ から ， $sin\left[(\theta_1+\theta_2) + \frac{\pi}{3}\right] = 0$ が得られ、

$\theta_1 + \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$，または $\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ であることがわかる。

⑩及び $0 < \theta < \pi$ を考慮すると、$\theta = \pi - (\theta_1 + \theta_2) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ となる。

以上より、ＤＥ ＝ ＤＦ ，∠ＥＤＦ ＝ $\frac{\pi}{3}$ が導かれた。

　隣り合う２辺の長さが等しく、その２辺のなす角度が$\frac{\pi}{3}$(60°)の⊿ＤＥＦは正三角形である。
以上でモーリーの定理が証明された。

　③式は図４において、点Ｄ，Ｆからx軸への投影長さ$\mathrm{D_1F_1}$と点Ｂから∠ＡＢＧ＝$\frac{\pi}{3}$となるように引いた線ＢＧを考えたとき、点Ｄ，ＥからＢＧ軸への投影長さ$\mathrm{D_1'E_1'}$が等しいことを示している。

　同様に④式は、点Ｄ，Ｆからy軸への投影長さ$\mathrm{D_2F_2}$と点Ｄ，ＥからＢＧ軸に直交するＢＧ’軸への投影長さ$\mathrm{D_2'E_2'}$が等しいことを示している。

　以上は、Ａを原点としＡＢをＸ軸とする直交座標で考えたが、Ｂを原点としＢＣをＸ軸とした場合，Ｃを原点としＣＡをＸ軸とした場合でも同様のことが言える。

ＤＥを反時計回りに 60°　($\frac{\pi}{3}$)回転させたものがＤＦに一致するという条件で導かれた結果は、正三角形の内部にある正三角形から外側の正三角形の対向する各辺への投影長さが、その向きに関係なく等しくなることを示している。

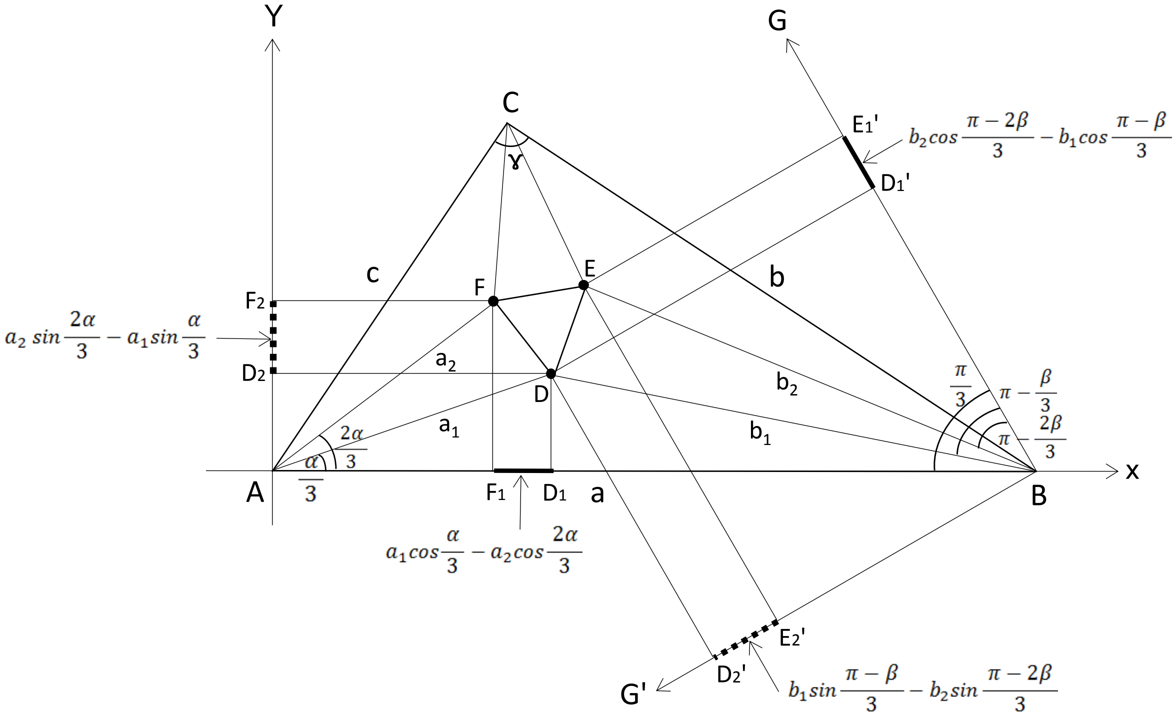


図４

【証明２】

図５の◿ＡＢＣにおいて、各辺の長さをａ，ｂ，ｃ、∠ＣＡＢ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＢＣＡ＝γ、ＡＤ，ＡＦ，ＢＤ，ＢＥの長さをそれぞれ a_1，a_2，b_1，b_2 とする。

点Ｄを通りＡＦに平行な直線と辺ＡＢとの交点をＧとすると、∠ＤＧＢ $= \frac{2\alpha}{3}$ ，点Ｄを通りＢＥに平行な直線と辺ＡＢとの交点をＨとすると、∠ＤＨＡ $= \frac{2\beta}{3}$である。

ＧからＤＦに平行な直線とＡＦとの交点をＧ’とするとＤＦ＝ＧＧ’，ＨからＤＥに平行な直線とＢＥとの交点をＨ’とするとＤＥ＝ＨＨ’であるから◿ＤＥＦの辺ＤＦ＝ＤＥを証明するにはＧＧ’＝ＨＨ’を証明すればよい。

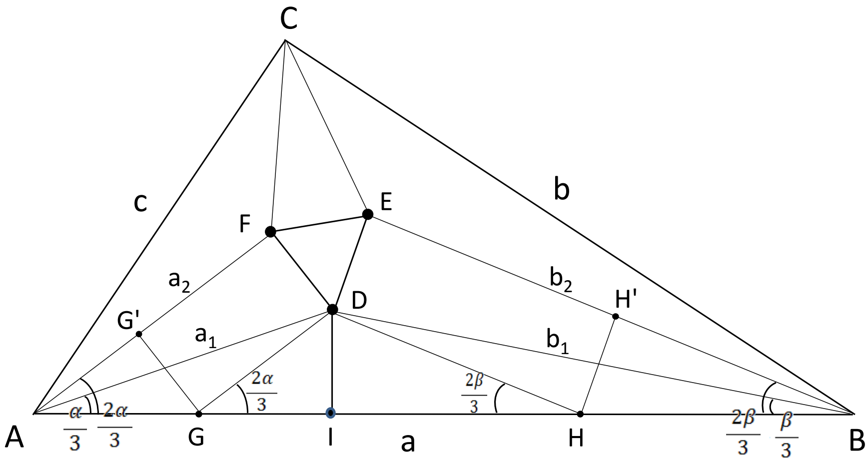


図５

$a_1\, cos\frac{\alpha}{3} + b_1 cos\frac{\beta}{3} = a$ ，$a_1\, sin\frac{\alpha}{3} = b_1 sin\frac{\beta}{3}$ だから、$a_1\, cos\frac{\alpha}{3} + a_1\frac{sin\frac{\alpha}{3}}{sin\frac{\beta}{3}} cos\frac{\beta}{3} = a$,

$a_1 \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{3}\cos\dfrac{\beta}{3}+\cos\dfrac{\alpha}{3}\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\dfrac{\beta}{3}} = a_1 \dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}}{\sin\dfrac{\beta}{3}} = a$ より、$a_1 = \dfrac{a\cdot\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}}$ …………⑪

同じように、$b_1 = \dfrac{a\cdot\sin\dfrac{\alpha}{3}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}}$ …………⑫　点Ｄから辺ＡＢへの垂線をＤＩとすると、

ＡＩ＝$a_1\cos\dfrac{\alpha}{3}$，ＢＩ＝$b_1\cos\dfrac{\beta}{3}$，ＤＩ $= a_1\sin\dfrac{\alpha}{3}$＝$b_1\sin\dfrac{\beta}{3}$ から、

ＧＩ $= \dfrac{\text{ＤＩ}}{\tan\dfrac{2\alpha}{3}} = \dfrac{a_1\sin\dfrac{\alpha}{3}}{\tan\dfrac{2\alpha}{3}} = \dfrac{a_1\sin\dfrac{\alpha}{3}\ \cos\dfrac{2\alpha}{3}}{\sin\dfrac{2\alpha}{3}} = \dfrac{a_1\sin\dfrac{\alpha}{3}\ \cos\dfrac{2\alpha}{3}}{2\sin\dfrac{\alpha}{3}\cos\dfrac{\alpha}{3}} = \dfrac{a_1\cos\dfrac{2\alpha}{3}}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}}$

従って、ＡＧ＝ＡＩ－ＧＩ＝$a_1\cos\dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{a_1\cos\dfrac{2\alpha}{3}}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}} = a_1\left(\cos\dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{\cos\dfrac{2\alpha}{3}}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}}\right) = a_1\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{3} - \cos\dfrac{2\alpha}{3}}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}}$

$= a_1\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{3} - \left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{3} - 1\right)}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}} = \dfrac{a_1}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}}$

ＧＧ'＝ＡＧ$\sin\dfrac{2\alpha}{3}$ より、ＧＧ'＝$\dfrac{a_1\sin\dfrac{2\alpha}{3}}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}}$ …………⑬

同じように、ＨＩ $= \dfrac{\text{ＤＩ}}{\tan\dfrac{2\beta}{3}} = \dfrac{b_1\sin\dfrac{\beta}{3}}{\tan\dfrac{2\beta}{3}} = \dfrac{b_1\sin\dfrac{\beta}{3}\ \cos\dfrac{2\beta}{3}}{\sin\dfrac{2\beta}{3}} = \dfrac{b_1\sin\dfrac{\beta}{3}\ \cos\dfrac{2\beta}{3}}{2\sin\dfrac{\beta}{3}\cos\dfrac{\beta}{3}} = \dfrac{b_1\cos\dfrac{2\beta}{3}}{2\cos\dfrac{\beta}{3}}$

ＢＨ＝ＢＩ－ＨＩ＝$b_1\cos\dfrac{\beta}{3} - \dfrac{b_1\cos\dfrac{2\beta}{3}}{2\cos\dfrac{\beta}{3}} = b_1\left(\cos\dfrac{\beta}{3} - \dfrac{\cos\dfrac{2\beta}{3}}{2\cos\dfrac{\beta}{3}}\right) = \dfrac{b_1}{2\cos\dfrac{\beta}{3}}$

ＨＨ'＝ＢＨ$\sin\dfrac{2\beta}{3}$ より、ＨＨ'＝$\dfrac{b_1\sin\dfrac{2\beta}{3}}{2\cos\dfrac{\beta}{3}}$ …………⑭

⑬－⑭をつくると、ＧＧ'－ＨＨ'＝$a_1\dfrac{\sin\dfrac{2\alpha}{3}}{2\cos\dfrac{\alpha}{3}} - b_1\dfrac{\sin\dfrac{2\beta}{3}}{2\cos\dfrac{\beta}{3}}$　ここでa_1，b_1 に⑪，⑫を入れて、

ＧＧ'－ＨＨ'＝$\dfrac{a\cdot\sin\dfrac{\beta}{3}\sin\dfrac{2\alpha}{3}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}\ \cos\dfrac{\alpha}{3}} - \dfrac{a\cdot\sin\dfrac{\alpha}{3}\sin\dfrac{2\beta}{3}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}\cos\dfrac{\beta}{3}} = \dfrac{a\left(\sin\dfrac{\beta}{3}\cos\dfrac{\beta}{3}\sin\dfrac{2\alpha}{3} - \sin\dfrac{\alpha}{3}\cos\dfrac{\alpha}{3}\sin\dfrac{2\beta}{3}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}\cos\dfrac{\alpha}{3}\cos\dfrac{\beta}{3}}$

$= \dfrac{a\left(\sin\dfrac{2\beta}{3}\sin\dfrac{2\alpha}{3} - \sin\dfrac{2\alpha}{3}\sin\dfrac{2\beta}{3}\right)}{4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{3}\cos\dfrac{\alpha}{3}\cos\dfrac{\beta}{3}} = 0$

よって、ＧＧ'－ＨＨ'＝0 からＤＦ＝ＤＥが証明された。

この計算は辺ＡＢに対して行ったが、辺ＢＣ，辺ＡＣに対しても同様の計算が成り立ち、ＤＥ＝ＤＦ＝ＥＦが証明される。

モーリーの定理に対する独自の証明を考え始めたころ、ＤＦ＝ＤＥを証明しようと、⊿ＡＤＦと⊿ＢＤＥに余弦定理を適用して、

ＤＦ^2＝$a_1{}^2+a_2{}^2-2a_1a_2\cos\frac{\alpha}{3}$，ＤＥ^2＝$b_1{}^2+b_2{}^2-2b_1b_2\cos\frac{\beta}{3}$

$a_1=\dfrac{a\cdot\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}}$，$a_2=\dfrac{c\cdot\sin\frac{\gamma}{3}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{3}}$，$b_1=\dfrac{a\cdot\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}}$，$b_2=\dfrac{b\cdot\sin\frac{\gamma}{3}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{3}}$を代入して、

$$\left(\frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}}\right)^2+\left(\frac{c\cdot\sin\frac{\gamma}{3}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{3}}\right)^2-2\frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{3}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}}\cdot\frac{c\cdot\sin\frac{\gamma}{3}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}$$

$$=\left(\frac{a\cdot\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}}\right)^2+\left(\frac{b\cdot\sin\frac{\gamma}{3}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{3}}\right)^2-2\frac{a\cdot\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}}\cdot\frac{c\cdot\sin\frac{\gamma}{3}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{3}}\cos\frac{\beta}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

⑮式が成り立つことを示そうとしたが、この方法は計算が複雑になりすぎて諦めた。

長い間試行錯誤を繰り返していたが、ＤＦをＧＧ'に，ＤＥをＨＨ'に平行移動しＧＧ'＝ＨＨ' を示せばよいことに気付き呆気なく証明することができた。

モーリーの定理については多くの証明が示されている。初等幾何によるもの，正弦定理を主体とした三角関数によるもの，複素数を用いたもの，ベクトルを用いたものなどである。

以下に２つの例を示す。

【証明一例１】

一般的に見られる正弦定理を用いた証明

図２において、$\alpha+\beta+\gamma=\pi$から、$\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\pi}{3}$

⊿ＡＢＤに対して正弦定理を用いると、$\frac{a_1}{sin\frac{\beta}{3}}=\frac{a}{\sin(\pi-\frac{\alpha+\beta}{3})}$ ･･････････⑯

⊿ＡＢＣの外接円の半径をＲとすると $\frac{\mathrm{a}}{\sin\ \gamma}=2R,\quad sin\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{3}\right)=sin\frac{\alpha+\beta}{3}$ だから⑯右辺は、

$\frac{2R\sin\ \gamma}{sin\frac{\alpha+\beta}{3}}=\frac{2R\,sin\,\gamma}{sin\frac{\pi-\gamma}{3}}$ となり、$a_1=\frac{2R\,sin\,\gamma\,sin\frac{\beta}{3}}{sin\frac{\pi-\gamma}{3}}$ ･･････････⑰ が得られる。

三倍角の公式から、$sin\gamma=3sin\frac{\gamma}{3}-4sin^3\frac{\gamma}{3}=sin\frac{\gamma}{3}(3cos^2\frac{\gamma}{3}-sin^2\frac{\gamma}{3})$

$=4sin\frac{\gamma}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\frac{\gamma}{3}+\frac{1}{2}sin\frac{\gamma}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{2}sin\frac{\gamma}{3}\right)=4sin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}sin\frac{\pi-\gamma}{3}$

よって⑰は、

$a_1=\frac{2Rsin\frac{\beta}{3}\cdot 4sin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}sin\frac{\pi-\gamma}{3}}{sin\frac{\pi-\gamma}{3}}=8Rsin\frac{\beta}{3}sin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}$ ･･････････⑱となる。

⊿ＡＣＦについて同様の計算（γとβを入れ替えればよい）を行うと、

$a_2=8Rsin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\beta}{3}sin\frac{\pi+\beta}{3}$ ･･････････⑲となる。

⊿ＡＤＦに対して余弦定理を適用し、⑱，⑲を入れると

$\mathrm{DF}^2=a_1{}^2+a_2{}^2-2a_1a_2cos\frac{\alpha}{3}=\left(8Rsin\frac{\beta}{3}sin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}\right)^2+\left(8Rsin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\beta}{3}sin\frac{\pi+\beta}{3}\right)^2$

$-2\cdot\left(8Rsin\frac{\beta}{3}sin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}\right)\left(8Rin\frac{\gamma}{3}sin\frac{\beta}{3}sin\frac{\pi+\beta}{3}\right)cos\frac{\alpha}{3}$

$=\left(8Rsin\frac{\beta}{3}sin\frac{\gamma}{3}\right)^2\left[sin^2\frac{\pi+\beta}{3}+sin^2\frac{\pi+\gamma}{3}-2sin\frac{\pi+\beta}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}cos\frac{\alpha}{3}\right]$ ･･････････⑳

⑳の[　]内は、

$\left(sin\frac{\pi+\beta}{3}+sin\frac{\pi+\gamma}{3}\right)^2-2sin\frac{\pi+\beta}{3}sin\frac{\pi+\gamma}{3}\left(1+cos\frac{\alpha}{3}\right)$

$=\left(2cos\frac{\alpha}{6}cos\frac{\gamma-\beta}{6}\right)^2-\left(cos\frac{\gamma-\beta}{3}+cos\frac{\alpha}{3}\right)\left(1+cos\frac{\alpha}{3}\right)$

$$= \left(1 + cos\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 + cos\frac{\gamma - \beta}{3}\right) - \left(cos\frac{\gamma - \beta}{3} + cos\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 + cos\frac{\alpha}{3}\right) = \left(1 + cos\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 - cos\frac{\alpha}{3}\right)$$

$= 1 - cos^2\dfrac{\alpha}{3} = sin^2\dfrac{\alpha}{3}$ であるから、⑳はＤＦ^2 $= \left(8Rsin\dfrac{\beta}{3}sin\dfrac{\gamma}{3}\right)^2 sin^2\dfrac{\alpha}{3}$

$= \left(8Rsin\dfrac{\alpha}{3}sin\dfrac{\beta}{3}sin\dfrac{\gamma}{3}\right)^2$ より、ＤＦ $= 8Rsin\dfrac{\alpha}{3}sin\dfrac{\beta}{3}sin\dfrac{\gamma}{3}$ となる。

同様にα→β，β→γ，γ→αと循環すれば、ＤＥ，ＥＦについても同様の結果が得られ、

⊿ＤＥＦは一辺の長さが $8Rsin\dfrac{\alpha}{3}sin\dfrac{\beta}{3}sin\dfrac{\gamma}{3}$ の正三角形であることが証明される。

【証明一例２】

ベクトルの直交を用いた証明

２，０１３年幾何学フォーラムで公表された、Cesare Donolato 氏の証明

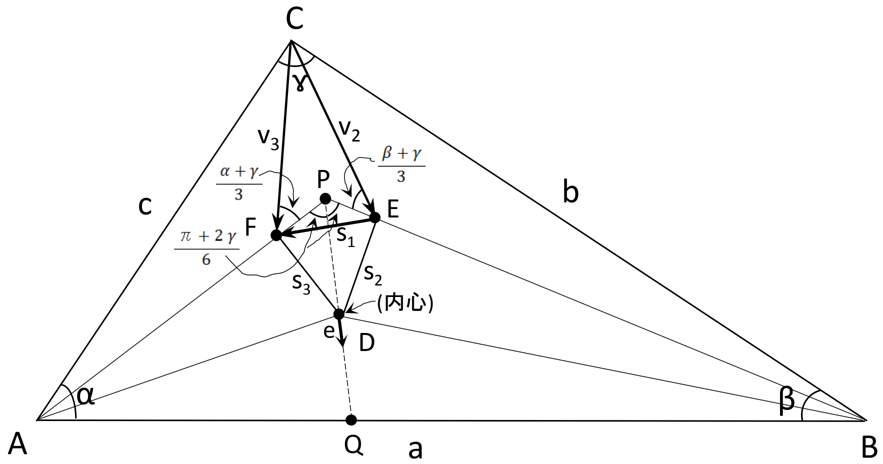


図６

図６の⊿ＡＢＣにおいて、ＡＦとＢＥの延長線の交点をＰとする。

∠ＡＰＢの２等分線ＰＱは同時に∠ＡＤＢの２等分線となり、Ｄは⊿ＡＰＢの内心である。

まず、ＰＱとＥＦが直交することを証明する。

eをＰＱ方向の単位ベクトル、$\mathbf{s}_1$をＥＦ方向のベクトルを表すものとすると、スカラー積

$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e} = 0$ となればＰＱとＥＦは直交することがいえる。

ベクトルＣＥ＝$\mathbf{v}_2$，ベクトルＣＦ＝$\mathbf{v}_3$とすると、$\mathbf{s}_1 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2$から

$(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{e} = 0$ がいえればよい。

⊿ＡＰＣにおいて、$\angle APB = \pi - \dfrac{2\alpha + 2\beta}{3} = \dfrac{\pi + 2\gamma}{3}$　だから、$\angle APQ = \angle BPQ = \dfrac{\pi + 2\gamma}{6}$

である。ここで、$\angle CEP = \dfrac{\beta + \gamma}{3}$，$\angle CFP = \dfrac{\alpha + \gamma}{3}$ より、ベクトル$\mathbf{v}_3$と**e**のなす角度は、

∠ＤＰＦと∠ＣＦＰとの差 $\frac{\pi-2\alpha}{6}$ である。

同様にベクトル $\mathbf{v}_2$ と $\mathbf{e}$ のなす角度は、$\frac{\pi-2\beta}{6}$ となるので、

$$(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{e}=\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{e}-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}=\mathrm{v}_3 cos\frac{\pi-2\alpha}{6}-\mathrm{v}_2 cos\frac{\pi-2\beta}{6}=\mathrm{v}_3 sin\frac{\pi+\alpha}{3}-\mathrm{v}_2 sin\frac{\pi+\beta}{3}$$

…………㉑

$\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2$ の長さは、◿ＡＦＣ，◿ＢＥＣに正弦定理を適用して、

$$\mathrm{v}_3=\frac{c\cdot sin\frac{\alpha}{3}}{sin\frac{\gamma+\alpha}{3}}=\frac{c\cdot sin\frac{\alpha}{3}}{sin\frac{\pi-\beta}{3}}\ ,\ \mathrm{v}_2=\frac{b\cdot sin\frac{\beta}{3}}{sin\frac{\beta+\gamma}{3}}=\frac{b\cdot sin\frac{\beta}{3}}{sin\frac{\pi-\alpha}{3}}$$ となるから、

㉑に代入すると、

$$(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{e}=\frac{c\cdot sin\frac{\alpha}{3}sin\frac{\pi+\alpha}{3}}{sin\frac{\pi-\beta}{3}}-\frac{b\cdot sin\frac{\beta}{3}sin\frac{\pi+\beta}{3}}{sin\frac{\pi-\alpha}{3}}=$$

$$=\frac{c\cdot sin\frac{\alpha}{3}sin\frac{\pi+\alpha}{3}sin\frac{\pi-\alpha}{3}-b\cdot sin\frac{\beta}{3}sin\frac{\pi+\beta}{3}sin\frac{\pi-\beta}{3}}{sin\frac{\pi-\alpha}{3}sin\frac{\pi-\beta}{3}}$$

$$=\frac{\frac{c}{2}\left(sin\frac{\alpha}{3}cos\frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{2}sin\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{b}{2}\left(sin\frac{\beta}{3}cos\frac{2\beta}{3}+\frac{1}{2}sin\frac{\beta}{3}\right)}{sin\frac{\pi-\alpha}{3}sin\frac{\pi-\beta}{3}}=\frac{\frac{1}{4}(\mathrm{c}\cdot\sin\alpha-\mathrm{b}\cdot\sin\beta)}{sin\frac{\pi-\alpha}{3}sin\frac{\pi-\beta}{3}}$$

$\mathrm{c}\cdot\sin\alpha-\mathrm{b}\cdot\sin\beta=0$ なので、$(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{e}=0$ となり、ＰＱとＥＦは直交する。

以上から、◿ＥＤＦはＰＤに２等分されるので、ＰＥ＝ＰＦである。
さらに、◿ＰＥＤ＝◿ＰＦＤから $\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_3$ が導かれ、
Ａ→Ｂ，Ｂ→Ｃ，Ｃ→Ａと入れ替えることにより、同じように $\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_2$ が導かれるので、
$\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_3$ となり、◿ＤＥＦが正三角形であることが証明される。（２０１７．２．１１）