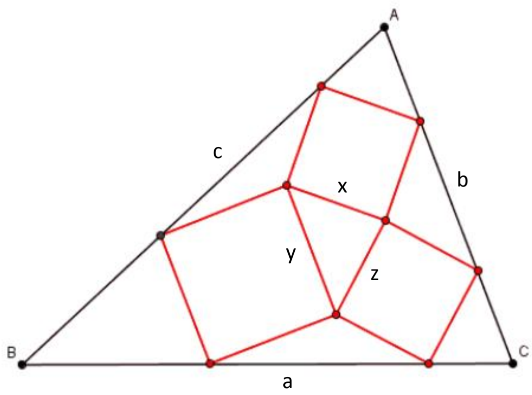
６６「マルファッティの正方形」

何とか自分なりの解答にたどり着いた『マルファッティの円』だったが、すぐに似かよった問題が見つかった。この問題は『日本の幾何－何題解けますか？』という本で発見した。
その問題とは、

【問題】

３辺がａ，ｂ，ｃである⊿ＡＢＣのうちに図のように２辺に頂点を接しさせ、残りの頂点が互いに共有して三角形を作っているような３個の正方形を描く。
このような正方形をマルハッチの正方形と呼ぼう。このマルハッチの正方形の頂点が作る三角形の３辺の長さ x, y, z を a, b, c で表わせ。

逆にｘ，ｙ，ｚが与えられたとき、このマルハッチ正方形からできる三角形ＡＢＣの外接円の半径ｒを求めよ。



この問題の前半は江戸時代中期の和算家；藤田貞資による「精要算法」の中にあったもので、「マルファッティの正方形」という呼び方は「日本の幾何､､､」の著者深川英俊が付けたものだ。実は「マルファッティの円」については、江戸時代の和算家；安島直円がこの問題を与え、マルファッティの論文よりも約３０年も早く、自ら著した本の中に発表している。安島は３個の円の半径の求め方を一般的に述べ、さらに整数解も与えている。

通常無理数になる数値解の整数解を得ることは、それだけでもかなりの難問である。

この問題を見つけすぐに挑戦を始めたが、「円」を「正方形」に変えただけなのに全く異質の問題でかなりの難問、むしろ「円」の場合より難しいように思った。

図１の三角形ＡＢＣにおいて、点ＡからＤＰに平行な直線，点ＢからＦＱに平行な直線，点ＣからＧＱに平行な直線、ＡＯ，ＢＯ，ＣＯを引くと、それらは一点で交わりその点をＯとする。
$\angle OBC = \alpha_1$，$\angle OCB = \alpha_2$，
$\angle OCA = \beta_1$，$\angle OAC = \beta_2$，
$\angle OAB = \gamma_1$，$\angle OBA = \gamma_2$とする。

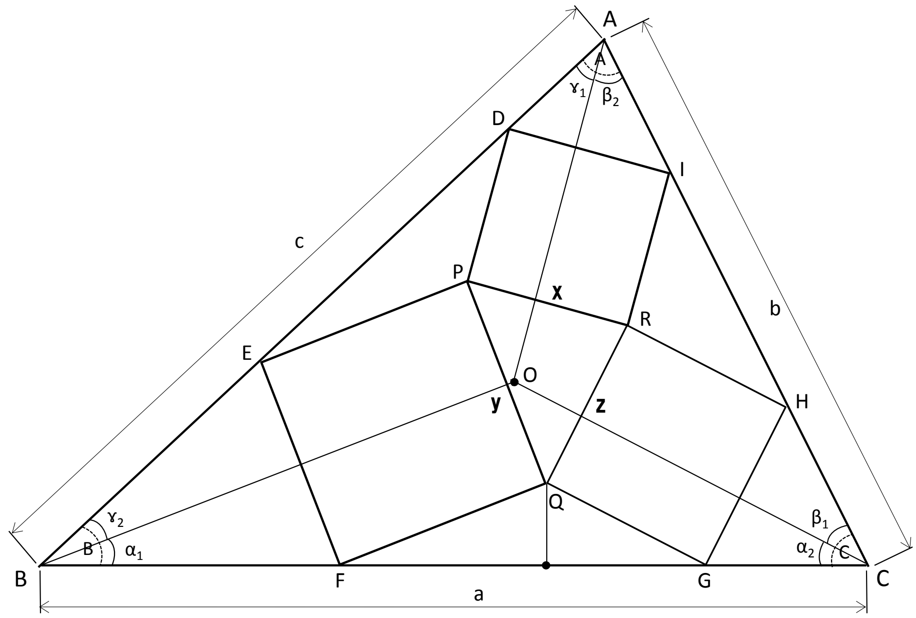


図１

まず思いつくのは、

$BF = ysin\alpha_1 + \frac{ycos\alpha_1}{tanB}$，$CG = zsin\alpha_2 + \frac{zcos\alpha_2}{tanC}$，$FG = ycos\alpha_1 + zcos\alpha_2$ から、

$$\left[sin\alpha_1 + (1+\frac{1}{tanB})cos\alpha_1\right]y + \left[sin\alpha_2 + (1+\frac{1}{tanC})cos\alpha_2\right]z = a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\left[sin\beta_1 + (1+\frac{1}{tanC})cos\beta_1\right]z + \left[sin\beta_2 + (1+\frac{1}{tanA})cos\beta_2\right]x = b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\left[sin\gamma_1 + (1+\frac{1}{tanA})cos\gamma_1\right]x + \left[sin\gamma_2 + (1+\frac{1}{tanB})cos\gamma_2\right]y = c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

という式が導ける。さらに次の④～⑪の関係が成り立つ。

$A = \beta_2 + \gamma_1$，$B = \alpha_1 + \gamma_2$，$C = \alpha_2 + \beta_1$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$④～⑥

$xsin\gamma_1 = ysin\gamma_2$，$ysin\alpha_1 = zsin\alpha_2$，$zsin\beta_1 = xsin\beta_2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$⑧～⑩

$A + B + C = \pi$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$⑪

未知数がx，y，z，α_1，$\alpha_2 \cdots$，γ_2で９個、式は１１個あるので解けるはずである。

① のy，zの係数をそれぞれ k_1，l_1、② のz，xの係数をそれぞれ k_2，l_2、

③ のx，yの係数をそれぞれ k_3，l_3 とすると、

$k_1 y + l_1 z = a$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$①’

$k_2 z + l_2 x = b$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$②’

$k_3 x + l_3 y = c$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$③’

①’～③’を解き、x，y，zを求めると次のようになる。

$$x = \frac{-k_2 l_3 a + l_3 l_1 b + k_1 k_2 c}{k_1 k_2 k_3 + l_1 l_2 l_3}$$

$$y = \frac{k_2 l_3 a - k_3 l_1 b + l_1 l_2 c}{k_1 k_2 k_3 + l_1 l_2 l_3}$$

$$z = \frac{l_2 l_3 a + k_3 k_1 b + k_1 l_2 c}{k_1 k_2 k_3 + l_1 l_2 l_3}$$

k_1，$k_2 \cdots$，l_3 を戻すと次式によりx，y，z が求められる。

$$x = \frac{-\left[sin\beta_1 + (1+\frac{1}{tanC})cos\beta_1\right]\left[sin\gamma_2 + (1+\frac{1}{tanB})cos\gamma_2\right]a + \left[sin\gamma_2 + (1+\frac{1}{tanB})cos\gamma_2\right]\left[sin\alpha_2 + (1+\frac{1}{tanC})cos\alpha_2\right]b}{\left[sin\alpha_1 + (1+\frac{1}{tanB})cos\alpha_1\right]\left[sin\beta_1 + (1+\frac{1}{tanC})cos\beta_1\right]\left[sin\gamma_1 + (1+\frac{1}{tanA})cos\gamma_1\right] +} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{+\left[sin\alpha_1 + (1+\frac{1}{tanB})cos\alpha_1\right]\left[sin\beta_1 + (1+\frac{1}{tanC})cos\beta_1\right]c}{\left[sin\alpha_2 + (1+\frac{1}{tanC})cos\alpha_2\right]\left[sin\beta_2 + (1+\frac{1}{tanA})cos\beta_2\right]\left[sin\gamma_2 + (1+\frac{1}{tanB})cos\gamma_2\right]}$$

y，z は省略。

ここまでは良いが、④～⑪の関係を用いてα_1，$\alpha_2 \cdots$，γ_2 を消去し、x，y，z をa，b，c及びA，B，C で表すことは式が複雑になり非常に難しい。

この問題は一般解は勿論、正三角形や直角二等辺三角形といった特別な三角形は別としてa，b，c に具体的な整数値を与えても、x，y，z を無理数で求めることが難しいことで、どうしても近似値になってしまう。いろいろ試行錯誤を繰り返しながらたどり着いた解を以下に紹介したい。

図１において、$tanB$及び$tanC$ をα_1，α_2 を用いて表す。
直線ＢＣに対するＡＢの勾配は、

$$tanB=\frac{ysin\alpha_1+(ysin\alpha_1+zsin\alpha_2)}{ycos\alpha_1+(ycos\alpha_1-zcos\alpha_2)}=\frac{2ysin\alpha_1+zsin\alpha_2}{2ycos\alpha_1-zcos\alpha_2}$$ ここで⑨$ysin\alpha_1=zsin\alpha_2$を使うと、

$$tanB=\frac{3ysin\alpha_1}{2ycos\alpha_1-zcos\alpha_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑫$$

直線ＢＣに対するＡＣの勾配は、

$$tanC=\frac{zsin\alpha_2+(ysin\alpha_1+zsin\alpha_2)}{zcos\alpha_2-(ycos\alpha_1-zcos\alpha_2)}=\frac{ysin\alpha_1+2zsin\alpha_2}{-ycos\alpha_1+2zcos\alpha_2}$$ 同じように⑨$ysin\alpha_1=zsin\alpha_2$を使うと、

$$tanC=\frac{3ysin\alpha_1}{-ycos\alpha_1+2zcos\alpha_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑬$$

⑫⑬から、$tanB(2ycos\alpha_1-zcos\alpha_2)=tanC(-ycos\alpha_1+2zcos\alpha_2)$
整理すると、$y(2tanB+tanC)cos\alpha_1=z(tanB+2tanC)cos\alpha_2$

$$\frac{2tanB+tanC}{tanB+2tanC}=\frac{zcos\alpha_2}{ycos\alpha_1}$$ ここで$\frac{z}{y}=\frac{sin\alpha_1}{sin\alpha_2}$ を使うと、

α_1，α_2とＢ，Ｃの関係として次式が導かれる。

$$tan\,\alpha_1\cdot cot\,\alpha_2=\frac{2tanB+tanC}{tanB+2tanC}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

対称性から同様に、β_1，β_1とＣ，Ａ、及び γ_1，γ_2とＡ，Ｂの関係が導かれる。

$$tan\,\beta_1\cdot cot\,\beta_2=\frac{2tanC+tanA}{tanC+2tanA}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

$$tan\,\gamma_1\cdot cot\,\gamma_2=\frac{2tanA+tanB}{tanA+2tanB}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

$\frac{2tanB+tanC}{tanB+2tanC}=k_a$， $\frac{2tanC+tanA}{tanC+2tanA}=k_b$， $\frac{2tanA+tanB}{tanA+2tanB}=k_c$ とおくと、⑭⑮⑯は

$$tan\,\alpha_1=k_a\,tan\,\alpha_2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑭'$$
$$tan\,\beta_1=\ k_b\,tan\,\beta_2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮'$$
$$tan\,\gamma_1=\ k_c\,tan\,\gamma_2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯'$$

と表せる。

⑭’～⑯’はα_1，α_2・・・・，γ_2 とＡ，Ｂ，Ｃとの関係を示したもので、６つの未知数α_1，α_2・・・・，γ_2 のうちそのいずれか１つをＡ，Ｂ，Ｃで表せれば、順次他の未知数も求められる。

ここでは、α_1 についての式を導く。
$\alpha_2=C-\beta_1$ から⑭’ $tan\,\alpha_1=k_a\,tan\,\alpha_2$ は次のように変形される。

$$tan\,\alpha_1=k_a\,tan\,\alpha_2=k_a\,tan(C-\beta_1)=k_a\frac{tanC-tan\beta_1}{1+tanC\cdot tan\beta_1}$$

⑮’より、$tan\,\beta_1=\ k_b\,tan\,\beta_2$ なので、

$$tan\,\alpha_1=k_a\frac{tanC-k_b\,tan\,\beta_2}{1+tanC\cdot k_b\,tan\,\beta_2}$$ ， $\beta_2=A-\gamma_1$ だから、

$$tan\,\alpha_1 = k_a \frac{tanC - k_b\,tan(A-\gamma_1\,)}{1+tanC\cdot\,k_b\,tan(A-\gamma_1)} = k_a \frac{tanC - k_b \dfrac{tanA - tan\gamma_1}{1+tanA\cdot tan\gamma_1}}{1+tanC\cdot k_b \dfrac{tanA - tan\gamma_1}{1+tanA\cdot tan\gamma_1}}$$

⑯'より、$tan\,\gamma_1 = \ k_c\,tan\,\gamma_2$ なので、

$$tan\,\alpha_1 = k_a \frac{tanC - k_b \dfrac{tanA - k_c\,tan\,\gamma_2}{1+tanA\cdot k_c\,tan\,\gamma_2}}{1+tanC\cdot k_b \dfrac{tanA - k_c\,tan\,\gamma_2}{1+tanA\cdot k_c\,tan\,\gamma_2}}\ ,$$ $\gamma_2 = B - \alpha_1$ だから、

$$tan\,\alpha_1 = k_a \frac{tanC - k_b \dfrac{tanA - k_c\,tan(B-\alpha_1)}{1+tanA\cdot k_c\,tan(B-\alpha_1)}}{1+tanC\cdot k_b \dfrac{tanA - k_c\,tan(B-\alpha_1)}{1+tanA\cdot k_c\,tan(B-\alpha_1)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰$$

式⑰を展開し α_1 について整理すると次式が得られる。

$k_c\,(tan\,A - \ k_b tanC)\ \ tan\,\alpha_1\,\cdot tan(B-\alpha_1)\ + (1+k_b\,tan\,A\cdot\,tanC)\,tan\,\alpha_1$

$-k_a k_c (tan\,A\cdot\,tanC + k_b)\,tan(B-\alpha_1) = \ k_a\,(tan\,C - \ k_b tanA)$・・・・・・・・・・・・・⑱

⑱は、未知数 α_1についての方程式である。

ここで⑱の係数を、

$p = k_c\,(tan\,A - \ k_b tanC)$

$q = 1 + k_b\,tan\,A\cdot\,tanC$

$r = k_a k_c (tan\,A\cdot\,tanC + k_b)$

$s = k_a\,(tan\,C - \ k_b tanA)$　　とおいて整理すると、

$(r+q)sin(2\alpha_1 - B) + (p-s)cos(2\alpha_1 - B) = (r-q)sinB + (p+s)cosB$ ・・・・・・・・⑲

が得られる。

$2\alpha_1 - B = \theta$ とおくと、

$(r+q)\,sin\,\theta + (p-s)\cos\theta = (r-q)sinB + (p+s)cosB$

さらにsinと cos を合成すると、

$\sqrt{(r+q)^2 + (p-s)^2}\ sin(\theta+\delta_1) = \sqrt{(r-q)^2 + (p+s)^2}\ sin(B+\delta_2)$　　・・・・・・・・⑳

ここに、

$tan\delta_1 = \dfrac{p-s}{r+q}$　,　$tan\delta_2 = \dfrac{p+s}{r-q}$　である。

方程式⑳をθについて解くと、

$$sin(\theta+\delta_1) = \sqrt{\frac{(r-q)^2 + (p+s)^2}{(r+q)^2 + (p-s)^2}}\ sin(B+\delta_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots㉑$$

㉑はp, q, r, s を戻すと非常に複雑な式になるが、これが任意の三角形に対する一般解である。これから θ を求め、$\alpha_1 = \frac{B+\theta}{2}$ よりα_1が求められれば、⑤ $\gamma_2 = B - \alpha_1$から γ_2 、

⑭’ $tan\,\alpha_1 = k_a\,tan\,\alpha_2$ から α_2 、⑥ $\beta_1 = C - \alpha_2$ から β_1、⑯ $tan\,\gamma_1 = k_c\,tan\,\gamma_2$ から γ_1 、
④ $\beta_2 = A - \gamma_1$ から β_2 が得られる。

このように計算して得られた、α_1，α_2・・・・，γ_2 により、①～③，⑧～⑩と次の式から x，y，z が求められる。

$$x = \frac{c}{\left[sin\gamma_1 + \left(1 + \frac{1}{tanA}\right) cos\gamma_1\right] + \left[sin\gamma_2 + \left(1 + \frac{1}{tanB}\right) cos\gamma_2\right]\left(\frac{sin\gamma_1}{sin\gamma_2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdot ㉒$$

$$y = \frac{a}{\left[sin\alpha_1 + \left(1 + \frac{1}{tanB}\right) cos\alpha_1\right] + \left[sin\alpha_2 + \left(1 + \frac{1}{tanC}\right) cos\alpha_2\right]\left(\frac{sin\alpha_1}{sin\alpha_2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdot ㉓$$

$$z = \frac{a}{\left[sin\beta_1 + \left(1 + \frac{1}{tanC}\right) cos\beta_1\right] + \left[sin\beta_2 + \left(1 + \frac{1}{tanA}\right) cos\beta_2\right]\left(\frac{sin\beta_1}{sin\beta_2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdot ㉔$$

α_1，α_2・・・・，γ_2 を求めてから、x，y，z を計算する過程も式も複雑なので、一般解としてとても満足できるものではないが、これ以外に一般解を導くことができなかったので以上を私の解とした。

「日本の幾何、、、」を見ると、その解答（ここでは模範解答と呼ぶ）はとてもシンプルで美しい式で与えられていた。

【解】

⊿ＡＢＣの面積をＳ，　$\alpha = \dfrac{6S}{6S + a^2 + b^2 + c^2}$ 　とすると、

$x = \dfrac{\alpha}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ ，$y = \dfrac{\alpha}{3}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$ ，$z = \dfrac{\alpha}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ である。

模範解答は「答」のみで計算過程は示されていない。

⊿ＡＢＣの面積Ｓを a，b，c で表わすと，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ としてヘロンの公式より、

Ｓ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ なので、

$$x = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{6\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + a^2+b^2+c^2}$$

$$y = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{6\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + a^2+b^2+c^2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,\sqrt{2b^2+2b^2-c^2}}{6\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + a^2+b^2+c^2}$$

と表せる。

ここで、実際に数値を入れて計算してみよう。
計算が簡単になるよう角度を、Ａ＝７５°，Ｂ＝４５°，Ｃ＝６０°とした。

この条件で辺の長さをａ＝10 とすると、ｂ＝$\frac{20}{1+\sqrt{3}}$ (=7.3205)，Ｃ＝$\frac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$ (=8.9658)となる。（図２）

■私の導いた解による計算

$tanA = \tan(75^\circ) = 2 + \sqrt{3}$

$tanB = \tan(45^\circ) = 1$

$tanC = \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

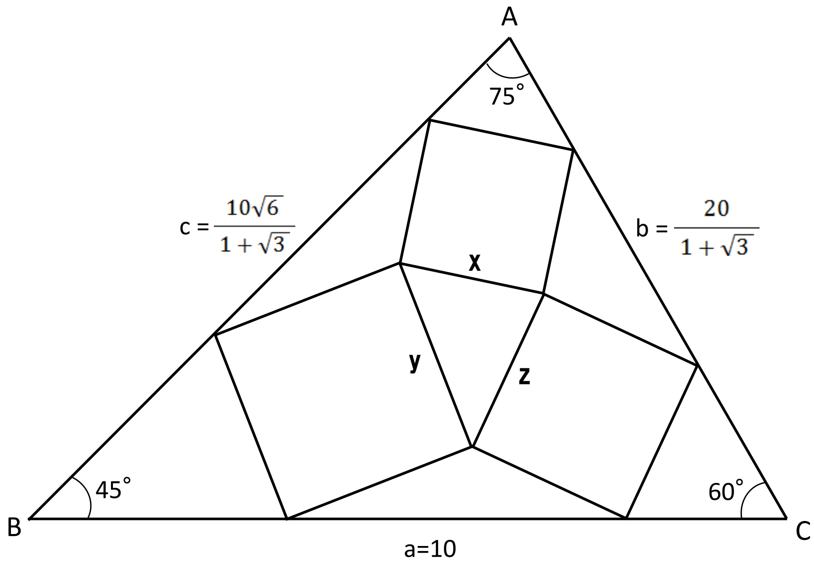


図２

$$k_a = \frac{2tanB + tanC}{tanB + 2tanC} = \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} = 0.8360$$

$$k_b = \frac{2tanC + tanA}{tanC + 2tanA} = \frac{2+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = 0.7825$$

$$k_c = \frac{2tanA + tanB}{tanA + 2tanB} = \frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = 1.4766$$

$p = k_c\,(tan\,A - k_b tanC)$より、

$$p = \frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \cdot \left[\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{2+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\right] = \frac{8(5+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4+3\sqrt{3})} = \frac{8(11+7\sqrt{3})}{25+16\sqrt{3}} = 3.5095$$

$q = 1 + k_b\,tan\,A \cdot tanC$ より、

$$q = 1 + \frac{2+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} = 1 + \frac{(2+3\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}} = \frac{4(7+4\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}} = 6.0583$$

$r = k_a k_c(tan\,A \cdot tanC + k_b)$ より、

$$r = \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} \cdot \frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} + \frac{2+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right] = \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} \cdot \frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \cdot \frac{4(8+5\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4(263+152\sqrt{3})}{11(11+6\sqrt{3})} = 8.9458$$

$s = k_a\,(tan\,C - k_b tanA)$ より、

$$s = \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} \cdot \left[\sqrt{3} - \frac{2+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)\right] = \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} \cdot \left[-\frac{4(1+\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}}\right] = -\frac{4\left(5+3\sqrt{3}\right)}{11\left(2+\sqrt{3}\right)} = -0.9935$$

$$r+q=\frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}\cdot\frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\cdot\frac{4(8+5\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}}+\frac{4(7+4\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}}=\frac{12(147+85\sqrt{3})}{11(11+6\sqrt{3})}=15.0041$$

$$r-q=\frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}\cdot\frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\cdot\frac{4(8+5\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}}-\frac{4(7+4\sqrt{3})}{4+3\sqrt{3}}=\frac{4(85+49\sqrt{3})}{11(11+6\sqrt{3})}=2.8875$$

$$p+s=\frac{8(11+7\sqrt{3})}{25+16\sqrt{3}}+\left[-\frac{4(5+3\sqrt{3})}{11(2+\sqrt{3})}\right]=\frac{4(677+395\sqrt{3})}{11(25+16\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{4(677+395\sqrt{3})}{1078+627\sqrt{3}}=2.5160$$

$$p-s=\frac{8(11+7\sqrt{3})}{25+16\sqrt{3}}-\left[-\frac{4(5+3\sqrt{3})}{11(2+\sqrt{3})}\right]=\frac{60(81+47\sqrt{3})}{11(25+16\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{60(81+47\sqrt{3})}{1078+627\sqrt{3}}=4.5030$$

$$\sqrt{\frac{(r-q)^2+(p+s)^2}{(r+q)^2+(p-s)^2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{4(85+49\sqrt{3})}{11(11+6\sqrt{3})}\right)^2+\left(\frac{4(677+395\sqrt{3})}{1078+627\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{12(147+85\sqrt{3})}{11(11+6\sqrt{3})}\right)^2+\left(\frac{60(81+47\sqrt{3})}{1078+627\sqrt{3}}\right)^2}}=0.2445$$

$$tan\delta_1=\frac{p-s}{r+q}=\frac{60(81+47\sqrt{3})}{11(25+16\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\cdot\frac{11(11+6\sqrt{3})}{12(147+85\sqrt{3})}=0.3001 \text{ より } \delta_1=0.2916\,(rad)$$

$$tan\delta_2=\frac{p+s}{r-q}=\frac{4(677+395\sqrt{3})}{11(25+16\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\cdot\frac{11(11+6\sqrt{3})}{4(85+49\sqrt{3})}=0.8713 \text{ より } \delta_2=0.7168\,(rad)$$

$B=\frac{\pi}{4}$ だから、 $sin(\theta+\delta_1)=0.2445sin(\frac{\pi}{4}+\delta_2)=0.2445sin(\frac{\pi}{4}+0.7168)=0.2439$

$sin(\theta+\delta_1)=0.2439$ より、$\theta+\delta_1=0.2464\,(rad)$，$\theta=0.2464-0.2916=-0.0452\,(rad)$

$$\alpha_1=\frac{\mathrm{B}+\theta}{2}=\frac{-\frac{\pi}{4}-0.0452}{2}=0.3701\,(rad)\ =(21.21^\circ)$$

$$\gamma_2=\mathrm{B}-\alpha_1=\frac{\pi}{4}-0.3701=0.4153\,(rad)\ =(23.79^\circ)$$

⑭’ $tan\,\alpha_1=k_a\,tan\,\alpha_2$ から、$tan\,\alpha_2=\frac{1}{k_a}tan\,\alpha_1=\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot tan(0.3701)=0.4641$

$\alpha_2=0.4345\,(rad)\ =(24.90^\circ)$

$\beta_1=C-\alpha_2$，$C=\frac{\pi}{3}$ だから、$\beta_1=\frac{\pi}{3}-0.4345=0.6127\,(rad)\ =(35.10^\circ)$

⑯’ $tan\,\gamma_1=k_c\,tan\,\gamma_2$ から、$tan\gamma_1=\frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\cdot tan(0.4153)=0.6511$

$\gamma_1=0.5771\,(rad)\ =(33.07^\circ)$

$\beta_2=A-\gamma_1$，$A=75^\circ\ (=1.3090\,rad)$だから、$\beta_2=1.3090-0.5771=0.7319\,(rad)\ =(41.93^\circ)$
が得られる。

以上をまとめると次の表のとおりとなる。

	rad	(°)
α_1	0.3701	21.21
α_2	0.4345	24.90
β_1	0.6127	35.10
β_2	0.7319	41.93
γ_1	0.5771	33.07
γ_2	0.4153	23.79

$\mathrm{A} = \beta_2 + \gamma_1 = 41.93 + 33.07 = 75(°)$
$\mathrm{B} = \alpha_1 + \gamma_2 = 21.21 + 23.79 = 45(°)$
$\mathrm{C} = \alpha_2 + \beta_1 = 24.90 + 35.10 = 60(°)$ が確認される。

以上、α_1，α_2・・・・，γ_2 を用いて㉒～㉔により、

$$x = \frac{8.9658}{\left[\sin(0.5771) + \left(1 + \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)cos(0.5771)\right] + \left[\sin(0.4153) + \left(1 + \frac{1}{1}\right)\cos(0.4153)\right]\left(\frac{sin(0.5771)}{sin(0.4153)}\right)} = 1.9370$$

$$y = \frac{10}{\left[\sin(0.3701) + \left(1 + \frac{1}{1}\right)cos(0.3701)\right] + \left[\sin(0.4345) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos(0.4345)\right]\left(\frac{sin(0.3701)}{sin(0.4345)}\right)} = 2.6196$$

$$z = \frac{7.3205}{\left[\sin(0.6127) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)cos(0.6127)\right] + \left[\sin(0.7319) + \left(1 + \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\cos(0.7319)\right]\left(\frac{sin(0.6127)}{sin(0.7319)}\right)} = 2.2509$$

	数値解（近似解）
x	1.9370
y	2.6196
z	2.2509

■模範解答に基づく計算

⊿ＡＢＣの面積をＳ，　$\alpha = \dfrac{6S}{6\mathrm{S} + a^2 + b^2 + c^2}$　とすると、

$x = \dfrac{\alpha}{3}\sqrt{2b^2+2c^2 - a^2}$ ，$y = \dfrac{\alpha}{3}\sqrt{2c^2+2a^2 - b^2}$ ，$z = \dfrac{\alpha}{3}\sqrt{2b^2+2b^2 - c^2}$ から、

$a = 10$，$b = \dfrac{20}{1+\sqrt{3}}(= 7.3205)$，$c = \dfrac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$ $(= 8.9658)$

⊿ＡＢＣの面積Ｓは、

$$\mathrm{s} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}\left(10 + \frac{20}{1+\sqrt{3}} + \frac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right) = \frac{15 + 5\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{3}} = 13.1431$$

$$\mathrm{S} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{5 + 5\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{5 + 5\sqrt{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{-5 + 5\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{3}}$$

$$\cdot\frac{15-5\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}{1+\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=31.6987$$

$$\alpha=\frac{6S}{6S+a^2+b^2+c^2}=\frac{6\cdot\frac{50\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{6\cdot\frac{50\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+10^2+\left(\frac{20}{1+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{23+5\sqrt{3}}=0.4484$$

$$x=\frac{\alpha}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{23+5\sqrt{3}}\sqrt{2\cdot\left(\frac{20}{1+\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot\left(\frac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right)^2-10^2}=$$

$$\frac{10\sqrt{6}\sqrt{8-\sqrt{3}}}{23+5\sqrt{3}}=1.9370$$

$$y=\frac{\alpha}{3}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{23+5\sqrt{3}}\sqrt{2\cdot\left(\frac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot10^2-\left(\frac{20}{1+\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$\frac{20\sqrt{3}\sqrt{4+\sqrt{3}}}{23+5\sqrt{3}}=2.6196$$

$$z=\frac{\alpha}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{23+5\sqrt{3}}\sqrt{2\cdot10^2+2\cdot\left(\frac{20}{1+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{10\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$\frac{10\sqrt{6}\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{23+5\sqrt{3}}=2.2509$$

以上をまとめると、

	解	**近似解**
x	$\frac{10\sqrt{6}\sqrt{8-\sqrt{3}}}{23+5\sqrt{3}}$	1.9370
y	$\frac{20\sqrt{3}\sqrt{4+\sqrt{3}}}{23+5\sqrt{3}}$	2.6196
z	$\frac{10\sqrt{6}\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{23+5\sqrt{3}}$	2.2509

計算が簡単になるようＡ＝７５°，Ｂ＝４５°，Ｃ＝６０°，a＝１０としたが、
それでも複雑な計算になった。結果は一致することが確認され、私の解が正しいことが証明できた。模範解答はシンプルであり、答えが無理数で得られるところが素晴らしい。
（２０１８．０３．０９）

後日談

数値計算を再確認していて、

$\alpha = \dfrac{6S}{6\mathrm{S} + a^2 + b^2 + c^2}$ $(= 0.4484)$ が図１において、$\dfrac{DE}{\mathrm{AB}}$ $\left(= \dfrac{FG}{\mathrm{BC}},\ \ = \dfrac{HI}{\mathrm{CA}} = 0.4484\right)$ に一致していることに気付いた。つまり、

$$\frac{6S}{6\mathrm{S} + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ycos\gamma_1 + zsin\gamma_2}{c}\left[= \frac{ycos\alpha_1 + zsin\alpha_2}{a},\quad = \frac{zcos\beta_1 + xsin\beta_2}{b}\right]$$ ということである。

これに気付いたことで、模範解答の導き方を明らかにすることができた。
以下、その内容を記す。

図３において、⊿ＡＢＣ内の正方形の面積をＳ₁，Ｓ₂，Ｓ₃、⊿ＡＢＣの外側にＤＥ，ＦＧ，ＨＩを一辺とする正方形を作り、その面積をそれぞれＳ₄，Ｓ₅，Ｓ₆とすると、

$3(S_1 + S_2 + S_3) = S_4 + S_5 + S_6$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・（イ）　が成り立つ。

（証明）

$S_1 + S_2 + S_3 = x^2 + y^2 + z^2$ 、

S_4，S_5，S_6 については余弦定理を用いて、

$S_4 = x^2 + y^2 - 2xycos(\pi - P) = x^2 + y^2 + 2xycosP$

$S_5 = y^2 + z^2 - 2yzcos(\pi - Q) = y^2 + z^2 + 2yzcos\mathrm{Q}$

$S_6 = z^2 + x^2 - 2zxycos(\pi - R) = z^2 + x^2 + 2zxcosR$

よって、

$S_4 + S_5 + S_6 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$

$\qquad + 2xycosP + 2yzcos\mathrm{Q} + 2zxcosR$

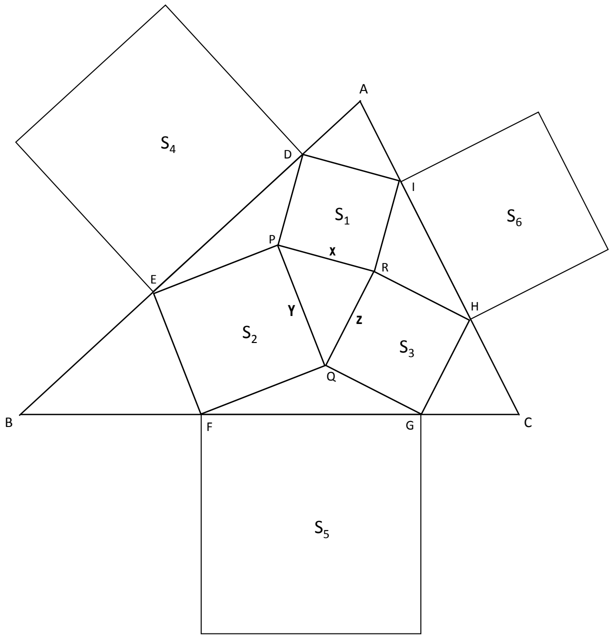


図３

図４において、

$2xycosP = x \cdot ycosP$ ㋑ $+ y \cdot xcosP$ ㋺

$2yzcos\mathrm{Q} = y \cdot zcos\mathrm{Q}$ ㋩ $+ z \cdot ycos\mathrm{Q}$ ㋥

$2zxcosR = z \cdot xcosR$ ㋭ $+ x \cdot zcosR$ ㋬

であるから、

$2xycosP + 2yzcos\mathrm{Q} + 2zxcosR =$ ㋑+㋺+㋩+㋥+㋭+㋬ となり、

$2xycosP + 2yzcos\mathrm{Q} + 2zxcosR = x^2 + y^2 + z^2$ が得られる。

$S_4 + S_5 + S_6 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ なので、

$3(S_1 + S_1 + S_1) = S_4 + S_5 + S_6$ が成り立つ。（証明終わり）

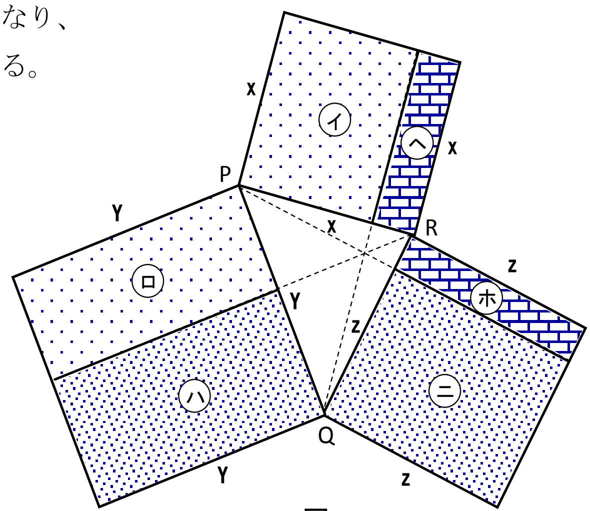


図４

図１において、ＤＥ＝l，ＦＧ＝m，ＨＩ＝n とすると、

$\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{l}{c}$，$\dfrac{FG}{BC} = \dfrac{m}{a}$，$\dfrac{HI}{CA} = \dfrac{n}{b}$ である。

$\dfrac{l}{c} = \dfrac{m}{a} = \dfrac{n}{b} = k$ ・・・・・・・・・・・・・・・・（ロ）

とおく。

図５において ◿ＰＤＥ，◿ＱＦＧ，◿ＲＨＩは
それぞれx，y，z の二辺を共通にしているので、３つの
三角形を合わせると◿ＡＢＣと相似形であり、その比は“ k”である。
従って◿ＡＢＣの面積をＳ、◿A'B'C'の面積をＳＡとすると、
$S_A = k^2 S$ となる。

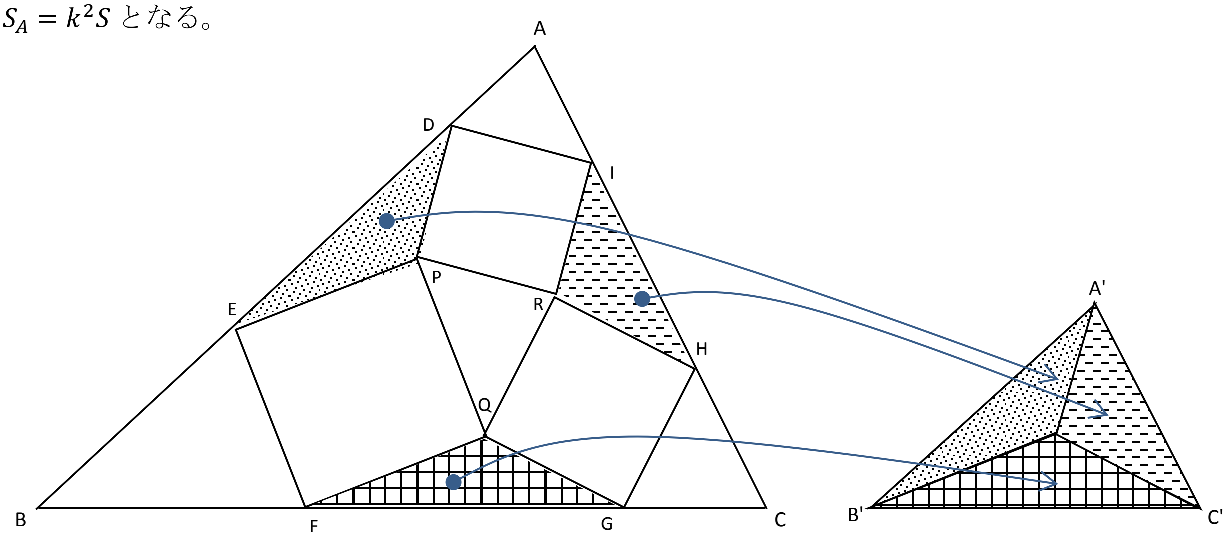


図５

図６において、◿ＡＤＩ，◿ＢＦＥ，◿ＣＨＧ，◿ＰＱＲ ４つの三角形の共通辺を合わせると、
◿ＡＢＣと相似形となり、その比は “$1-k$”である。
従って◿A"B"C" の面積をＳＡとすると、$S_B = (1-k)^2 S$ となる。

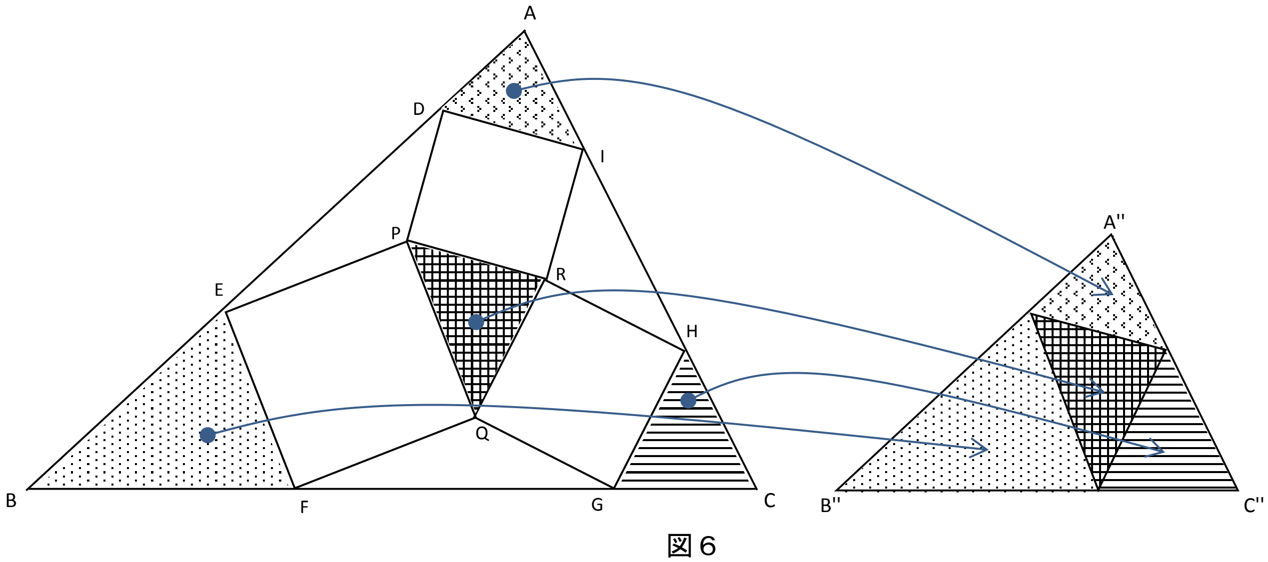


図６

（ロ）より、$DE = l = kc$，$\mathrm{FG} = m = ka$，$HI = n = kb$ なので、
$l^2 + m^2 + n^2 = (kc)^2 + (ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ ･････････ （ハ）が成り立つ。
図５，図６から、
$S_A + S_B + (x^2 + y^2 + z^2) = S$ なので、$k^2 S + (1-k)^2 S + (x^2 + y^2 + z^2) = S$

$x^2+y^2+z^2=\dfrac{k^2}{3}(a^2+b^2+c^2)$ を入れると、$k^2\,S+(1-k)^2S+\dfrac{k^2}{3}(a^2+b^2+c^2)=S$

整理すると、

$2k(1-k)S=\dfrac{k^2}{3}(a^2+b^2+c^2)$ から、$\dfrac{1-k}{k}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6S}$ となる。

これから k を求めると、

$k=\dfrac{6S}{6S+a^2+b^2+c^2}$ が得られる。

また図３において、∠ＰＱＲ＝φ として ⊿ＰＱＲと⊿ＱＦＧに着目して余弦定理を適用すると、

$x^2=y^2+z^2-2yz\cos\varphi$,

$\mathrm{F}G=ka$ だから、$(ka)^2=y^2+z^2-2yz\cos(\pi-\varphi)=y^2+z^2+2yz\cos\varphi$

これらの式の和をつくると $2yz\cos\varphi$ が消去されて、

$2y^2+2z^2=x^2+(ka)^2$ ････････････････････････････････（ニ）

が得られる。同様に⊿ＰＤＥと⊿ＲＩＨに余弦定理を適用して、

$2z^2+2x^2=y^2+(kb)^2$ ････････････････････････････････（ホ）

$2x^2+2y^2=z^2+(kc)^2$ ････････････････････････････････（ヘ）が得られる。

（ニ）$-$（ホ）より、　$3y^2-3x^2=(ka)^2-(kb)^2$ ･････････（ト）

（ホ）$+$（ヘ）×2 より、$6x^2+3y^2=(kb)^2+2(kc)^2$ ･････････（チ）

（チ）$-$（ト）より、　$9x^2=2(kb)^2+2(kc)^2-(ka)^2$ ･････（リ）

同様に、　$9y^2=2(kc)^2+2(ka)^2-(kb)^2$ ･････（ヌ）

$9z^2=2(ka)^2+2(kb)^2-(kc)^2$ ･････（ル）

（ニ）$+$（ホ）$+$（ヘ）から、$k^2(a^2+b^2+c^2)=3(x^2+y^2+z^2)$ が導かれる。これは（ハ）式である。

（リ）（ヌ）（ル）から求めるべき解が得られる。

$$x=\frac{k}{3}\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)}$$

$$y=\frac{k}{3}\sqrt{(2c^2+2a^2-b^2)}$$

$$z=\frac{k}{3}\sqrt{(2a^2+2b^2-a^2)}$$

$\alpha=\dfrac{6S}{6S+a^2+b^2+c^2}$ がどのように導き出されたのかわからなかったが、偶然ＢＣ：ＦＧの比であることを発見して、解を導くことができスッキリした。この解法はテクニックを駆使したもので、いかにも幾何の難問を解いたという感じがする。