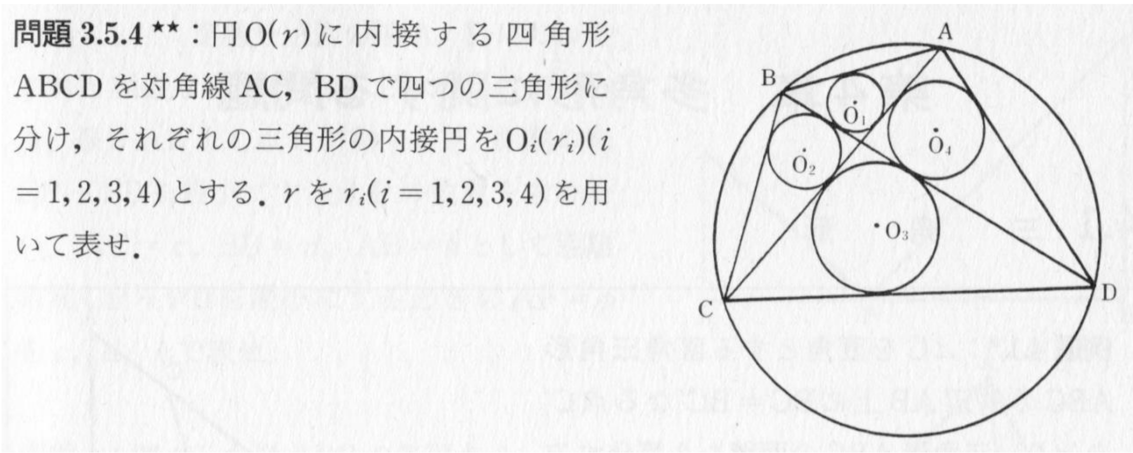
６９「幾何学超絶難問」その１

この問題は、６８「マルファッティの四角形」と同じ『日本の幾何－何題解けますか？』にあった問題である。はじめは気軽に取り組んだが、予想をはるかに超える難問だった。
その問題とは、

【問 題】


問題 3.5.4 **：円O(r)に内接する四角形ABCDを対角線AC，BDで四つの三角形に分け，それぞれの三角形の内接円を$O_i(r_i)$(i＝1,2,3,4)とする．rをr_i(i＝1,2,3,4)を用いて表せ．

（本を引用しそのまま掲載）

解説にはつぎのように記されている。
「この問題は、福島県二本松市坂上観音に寛政５年（１７９３年）に掲載された。この算額も現存しない。この問題は大変に難しく、文化８年（１８１１年）に東京都台東区下谷廣徳寺前稲荷社にも同じ問題が掲げられた。この算額も現存しない。この解答は非常に長い計算を要する。この掲額者は会田安明（１７４７～１８１７）の門人であり、会田はこのような円に関した問題を非常に広く研究した。」

図１において、
円に内接する四角形ＡＢＣＤを、対角線ＡＣ及びＢＤによって４つに分割する。ＡＣ，ＢＤの交点をＯとし、⊿ＡＢＯ，⊿ＢＣＯ，⊿ＣＤＯ，⊿ＤＡＯに内接する円の半径をそれぞれ、r_1，r_2，r_3，r_4とするとき、四角形の外接円の半径Ｒをr_1，r_2，r_3，r_4で表す問題である。

内接四角形の各辺の長さをa，b，c，d、
∠ＡＣＢ＝∠ＡＤＢ＝α，
∠ＢＡＣ＝∠ＢＤＣ＝β，
∠ＣＡＤ＝∠ＣＢＤ＝γ，
∠ＡＢＤ＝∠ＡＣＤ＝δ，
∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤ＝$\alpha+\gamma$，
∠ＡＯＤ＝∠ＢＯＣ＝$\beta+\delta$とする。

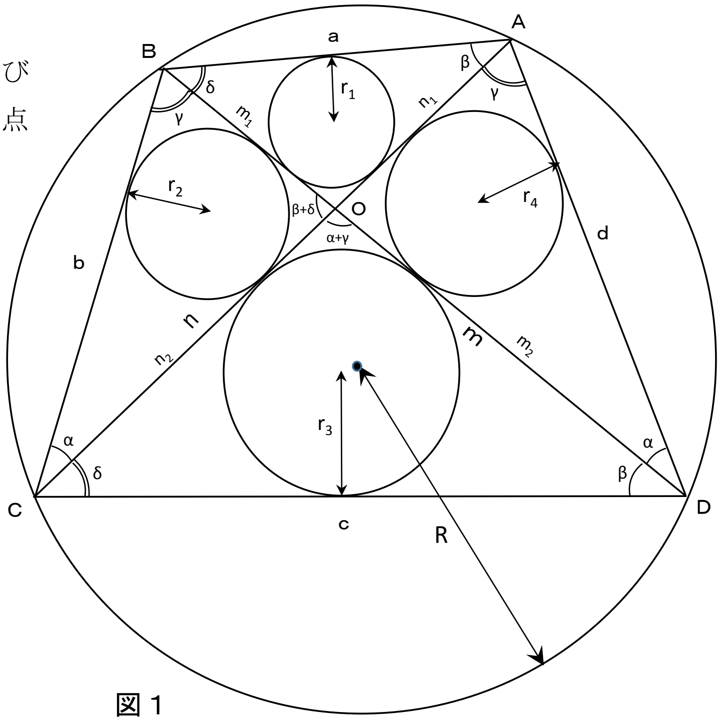


図１

ＢＤ＝ｍ，ＡＣ＝ｎ、さらにＢＯ＝ｍ$_1$，ＤＯ＝ｍ$_2$，ＡＯ＝ｎ$_1$，ＣＯ＝ｎ$_2$とすると、
ｍ＝ｍ$_1$＋ｍ$_2$，ｎ＝ｎ$_1$＋ｎ$_2$である。
⊿ＡＢＯ≡⊿ＣＤＯ，⊿ＢＣＯ≡⊿ＤＡＯ だから、次の①，②が成り立つ。

$$\frac{m_2}{n_1}=\frac{n_2}{m_1}=\frac{c}{a}=\frac{r_3}{r_1}$$ --①

$$\frac{n_1}{m_1}=\frac{m_2}{n_2}=\frac{d}{b}=\frac{r_4}{r_2}$$ --②

また、円に内接する四角形において次式③，④，⑤，⑥がなり立つことが知られている。

$$m=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$ --------------------------------③

$$n=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$ --------------------------------④

$mn=ac+bd$ （トレミーの定理） --------------------------⑤

$$R=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}$$ ---------------------⑥

$m=m_1+m_2$ ，$n=n_1+n_2$　及び①，②より、次式⑦が導かれる。

$$\left.\begin{array}{l} m_1=\dfrac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m \quad , \quad m_2=\dfrac{r_3r_4}{r_1r_2+r_3r_4}m \\ n_1=\dfrac{r_1r_4}{r_1r_4+r_2r_3}n \quad , \quad n_2=\dfrac{r_2r_3}{r_1r_4+r_2r_3}n \\ \dfrac{n}{m}=\dfrac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4} \end{array}\right\}$$ ---------------------------------⑦

①，②より、$c=\frac{r_3}{r_1}a$，$d=\frac{r_4}{r_2}b$ だからこれを⑥に入れると、

$$R=\sqrt{\frac{(ab+\frac{r_3}{r_1}a\cdot\frac{r_4}{r_2}b)(a\cdot\frac{r_3}{r_1}a+b\cdot\frac{r_4}{r_2}b)(a\cdot\frac{r_4}{r_2}b+b\cdot\frac{r_3}{r_1}a)}{(-a+b+\frac{r_3}{r_1}a+\frac{r_4}{r_2}b)(a-b+\frac{r_3}{r_1}a+\frac{r_4}{r_2}b)(a+b-\frac{r_3}{r_1}a+\frac{r_4}{r_2}b)(a+b+\frac{r_3}{r_1}a-\frac{r_4}{r_2}b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\frac{r_3}{r_1}a^2+\frac{r_4}{r_2}b^2)(\frac{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_4+r_2r_3)}{{r_1}^2{r_2}^2}a^2b^2)}{\left(2\ \frac{(r_1r_2+r_3r_4)^2+(r_1r_4+r_2r_3)^2}{{r_1}^2{r_2}^2}a^2b^2\right)-\left[\left(1-\frac{{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)^2a^4+\left(1-\frac{{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)^2b^4\right]}}$$

分母、分子を$\dfrac{(r_1r_2+r_3r_4)+(r_1r_4+r_2r_3)}{{r_1}^2{r_2}^2}a^2b^2$ で割ると、

$$R=\sqrt{\frac{\left(\frac{r_3}{r_1}a^2+\frac{r_4}{r_2}b^2\right)}{\left(2\left[\frac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}+\frac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_4+r_2r_3}\right]\right)-\frac{{r_1}^2{r_2}^2}{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_4+r_2r_3)}\left[\left(1-\frac{{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(1-\frac{{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}}$$

------------------⑧

が得られる。

①，②，③より、

$mn=\frac{r_3}{r_1}a^2+\frac{r_4}{r_2}b^2$，$mn=\frac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m^2$ だから、

$$\frac{r_3}{r_1}a^2+\frac{r_4}{r_2}b^2=\frac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m^2$$ ----------------------------------⑨

が導かれる。

⑨を⑧に入れて、分母、分子を $\frac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}$ で割ると⑩が得られる。

$$R=\frac{m}{\sqrt{2\left[1+\left(\frac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_4+r_2r_3}\right)^2\right]-\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_4+r_2r_3}\right)^2\left[\left(1-\frac{{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(1-\frac{{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}}$$ --------------⑩

よって⑩式において、mと$\left(\frac{a}{b}\right)^2$，$\left(\frac{b}{a}\right)^2$ が求まればＲが得られることになる。

まず、a,b をr_1，r_2，r_3，r_4とmで表すことを考える。

⊿ＡＢＯ，⊿ＢＣＯの面積をそれぞれS_1，S_2とする。

三角形の面積は、三角形のサブペリメータｓ（３辺を合計した値の$\frac{1}{2}$）と内接円の半径ｒを用いてＳ＝rs と表せる。⊿ＡＢＯ，⊿ＢＣＯのサブペリメータをs_1，s_2 とすると、

$s_1=\frac{a+\ m_1+n_1}{2}$，$s_2=\frac{b+\ m_1+n_2}{2}$ だから、

$$S_1=\ r_1s_1=r_1\frac{a+\ m_1+n_1}{2},\quad S_2=\ r_2s_2=r_2\frac{b+\ m_1+n_2}{2}$$

また、$S_1:S_2=n_1:n_2$，$S_1n_2=S_2n_1$から、

$r_1\frac{a+\ m_1+n_1}{2}n_2=r_2\frac{b+\ m_1+n_2}{2}n_1$ を得る。

⑦を用いて m_1，n_1，n_2をすべてmで表すと、

$$\frac{r_1}{2}\left(a+\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m+\frac{r_1r_4}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)\frac{r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m=\frac{r_2}{2}\left(b+\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m+\frac{r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)\frac{r_1r_4}{r_1r_2+r_3r_4}m$$

整理すると、

$$r_3a-r_4b=\frac{r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)}{r_1r_2+r_3r_4}m$$ ---------------------------------⑪

が得られる。⑪を変形して、

$$b=\frac{1}{r_4}\left[r_3a-\frac{r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)}{r_1r_2+r_3r_4}m\right]$$ を⑨に入れると、

$$\frac{r_3}{r_1}a^2+\frac{r_4}{r_2}\frac{1}{{r_4}^2}\left[r_3a-\frac{r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)}{r_1r_2+r_3r_4}m\right]^2=\frac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m^2$$

これをaについて整理すると、次のようなaについての２次方程式になる。

$$r_3(r_1r_3+r_2r_4)a^2-2r_1r_3\frac{r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)}{r_1r_2+r_3r_4}m\,a$$
$$+r_1\left[\left(\frac{r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)}{r_1r_2+r_3r_4}\right)^2-r_2r_4\left(\frac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}\right)\right]m^2=0 \quad \text{--------------------⑫}$$

⑫を解いてaを求めると次の通りとなる。

（非常に複雑な計算になるため、途中の計算を省略し結果のみ示す）

$$a=\frac{r_1\left[r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)+r_2r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_3+r_2r_4)}m \quad \text{--------------------⑬}$$

⑪、⑬からbを求めると、

$$b=\frac{r_2\left[-r_2r_4(r_1+r_3)+r_1r_3(r_2+r_4)+r_1r_3\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_3+r_2r_4)}m \quad \text{--------------------⑭}$$

$\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}$ については、

$\sqrt{(r_1+r_2)^2+(r_3+r_4)^2-2(r_1-r_2)(r_3-r_4)}$ または、$\sqrt{(r_1-r_3)^2+(r_2-r_4)^2-2(r_1+r_3)(r_2+r_4)}$

とも表せる。

次に、mをr_1，r_2，r_3，r_4で表す。

$S_1=r_1s_1=r_1\dfrac{a+m_1+n_1}{2}$，　$S_2=r_2s_2=r_2\dfrac{b+m_1+n_2}{2}$ から次式が導かれる。

$$S_1=r_1\frac{a+m_1+n_1}{2}=\frac{r_1a}{2}+\frac{r_1}{2}\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m+\frac{r_1r_4}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)=\frac{r_1a}{2}+\frac{{r_1}^2}{2}\left(\frac{r_2+r_4}{r_1r_2+r_3r_4}\right)m \quad \text{--------⑮}$$

$$S_2=r_2\frac{b+m_1+n_2}{2}=\frac{r_2b}{2}+\frac{r_2}{2}\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m+\frac{r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)=\frac{r_2b}{2}+\frac{{r_2}^2}{2}\left(\frac{r_1+r_3}{r_1r_2+r_3r_4}\right)m \quad \text{--------⑯}$$

また、S_1，S_2は∠ＣＯＤ（＝$\alpha+\gamma$）を用いて、それぞれ次のように表せる。

$$S_1=\frac{1}{2}m_1n_1\sin(\alpha+\gamma)=\frac{1}{2}\frac{{r_1}^2r_2r_4}{(r_1r_2+r_3r_4)^2}m^2\sin(\alpha+\gamma) \quad \text{--------------------⑰}$$

$$S_2=\frac{1}{2}m_1n_2\sin(\alpha+\gamma)=\frac{1}{2}\frac{{r_2}^2r_1r_3}{(r_1r_2+r_3r_4)^2}m^2\sin(\alpha+\gamma) \quad \text{--------------------⑱}$$

⑮，⑰から、

$\dfrac{r_1a}{2}+\dfrac{{r_1}^2}{2}\left(\dfrac{r_2+r_4}{r_1r_2+r_3r_4}\right)m=\dfrac{1}{2}\dfrac{{r_1}^2r_2r_4}{(r_1r_2+r_3r_4)^2}m^2\sin(\alpha+\gamma)$ この式からaを求めると、

$$a=\frac{r_1r_2r_4}{(r_1r_2+r_3r_4)^2}\sin(\alpha+\gamma)\,m^2-\frac{r_1(r_2+r_4)}{r_1r_2+r_3r_4}m \quad \text{----------------------------⑲}$$

⑬式によりaはr_1，r_2，r_3，r_4とmにより、$a = F(r_1 \sim r_4)m$と表されているから、

$$F(r_1 \sim r_4)m = \frac{r_1 r_2 r_4}{(r_1 r_2 + r_3 r_4)^2} sin(\alpha+\gamma)\, m^2 - \frac{r_1(r_2+r_4)}{r_1 r_2 + r_3 r_4} m$$

両辺を$m \neq 0$で割ってmを求めると、

$$m = \frac{F(r_1 \sim r_4) + \dfrac{r_1(r_2+r_4)}{r_1 r_2 + r_3 r_4}}{\dfrac{r_1 r_2 r_4}{(r_1 r_2 + r_3 r_4)^2} sin(\alpha+\gamma)}$$

$$F(r_1 \sim r_4) = \frac{r_1\left[r_2 r_4(r_1+r_3) - r_1 r_3(r_2+r_4) + r_2 r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2 - 4(r_1 r_3 + r_2 r_4)}\,\right]}{(r_1 r_2 + r_3 r_4)(r_1 r_3 + r_2 r_4)}$$

を上式に入れると、

$$m = \frac{\dfrac{r_1\left[r_2 r_4(r_1+r_3) - r_1 r_3(r_2+r_4) + r_2 r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2 - 4(r_1 r_3 + r_2 r_4)}\,\right]}{(r_1 r_2 + r_3 r_4)(r_1 r_3 + r_2 r_4)} + \dfrac{r_1(r_2+r_4)}{r_1 r_2 + r_3 r_4}}{\dfrac{r_1 r_2 r_4}{(r_1 r_2 + r_3 r_4)^2} sin(\alpha+\gamma)}$$

$$m = \frac{r_1 r_2 + r_3 r_4}{r_1 r_3 + r_2 r_4}\left[(r_1+r_2+r_3+r_4) + \sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2 - 4(r_1 r_3 + r_2 r_4)}\,\right]\frac{1}{sin(\alpha+\gamma)}$$

が得られる。従って$sin(\alpha+\gamma)$を求めることができれば、mをr_1，r_2，r_3，r_4で表せる。

図２の⊿ＡＢＣにおいて、

$$\frac{b-c}{a} = \frac{sin\dfrac{B-C}{2}}{cos\dfrac{A}{2}} \quad , \quad \frac{b+c}{a} = \frac{cos\dfrac{B-C}{2}}{sin\dfrac{A}{2}}$$ が成り立つ。

これをモルワイデの公式と呼んでいる。

この関係を⊿ＡＢＯに適用すると、

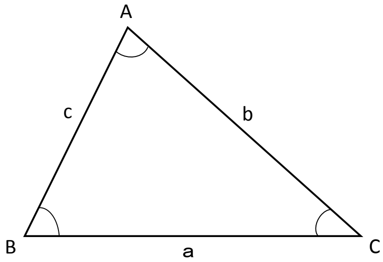


図２

$$\frac{m_1 - n_1}{a} = \frac{sin\dfrac{\beta-\delta}{2}}{cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}} \quad \text{---------------㉑} \qquad \frac{m_1 + n_1}{a} = \frac{cos\dfrac{\beta-\delta}{2}}{sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}} \quad \text{---------------㉒}$$

同様に⊿ＢＣＯに適用すると、

$$\frac{m_1 - n_2}{b} = \frac{sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{cos\dfrac{\beta+\delta}{2}} \quad \text{---------------㉓} \qquad \frac{m_1 + n_2}{b} = \frac{cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{sin\dfrac{\beta+\delta}{2}} \quad \text{---------------㉔}$$

が得られる。

$\dfrac{㉒ \times ㉓}{㉑ \times ㉔}$ を作ると、

$$\frac{\dfrac{m_1+n_1}{a}\cdot\dfrac{m_1-n_2}{b}}{\dfrac{m_1-n_1}{a}\cdot\dfrac{m_1+n_2}{b}} = \frac{\dfrac{cos\dfrac{\beta-\delta}{2}}{sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}\cdot\dfrac{sin\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{cos\dfrac{\beta+\delta}{2}}}{\dfrac{sin\dfrac{\beta-\delta}{2}}{cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}\cdot\dfrac{cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}{sin\dfrac{\beta+\delta}{2}}} \quad \text{---------------------------------㉕}$$

㉕式左辺は⑦により、

$$\frac{(m_1+n_1)(\,m_1-n_2)}{(\,m_1-n_1)(\,m_1+n_2)}=\frac{\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m+\frac{r_1r_4}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m-\frac{r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)}{\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m-\frac{r_1r_4}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_2+r_3r_4}m+\frac{r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}m\right)}$$

$$=\frac{(r_1-r_3)\,(r_2+r_4)}{(r_1+r_3)\,(r_2-r_4)}$$

㉕式右辺は、

$$sin\frac{\beta+\delta}{2}=sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\ \ ,\ \ cos\frac{\beta+\delta}{2}=cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

に注意して整理すると、

$$\frac{cos\frac{\beta-\delta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{sin\frac{\beta-\delta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}\cdot\frac{cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}{sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\delta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\,\beta+\gamma)}\cdot\frac{cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}{sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

さらに余弦定理を用いると、

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\left(c^2+d^2\right)-\left(a^2+b^2\right)}{2(ab+cd)},\qquad \cos(\alpha+\delta)=\frac{\left(b^2+c^2\right)-\left(a^2+d^2\right)}{2(bc+ad)}$$

$\cos(\,\beta+\gamma)=\dfrac{\left(a^2+d^2\right)-\left(b+c^2\right)}{2(bc+ad)}$ だから、

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\delta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\,\beta+\gamma)}=\frac{\frac{(c^2+d^2)-(a^2+b^2)}{2(ab+cd)}+\frac{(b^2+c^2)-(a^2+d^2)}{2(bc+ad)}}{\frac{(c^2+d^2)-(a^2+b^2)}{2(ab+cd)}+\frac{(a^2+d^2)-(b+c^2)}{2(bc+ad)}}$$

$c=\dfrac{r_3}{r_1}a$, $d=\dfrac{r_4}{r_2}b$ 及び、$ab+cd=ab+\dfrac{r_3}{r_1}\cdot\dfrac{r_4}{r_2}ab=\dfrac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_2}ab,$

$bc+ad=\dfrac{r_3}{r_1}ab+\dfrac{r_4}{r_2}ab=\dfrac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2}ab$ を入れて整理すると、

$$\frac{[(r_1+r_3)(r_2+r_4]a^2-[(r_1-r_3)(r_2-r_4]b^2-[(r_1+r_3)(r_2+r_4]c^2+[(r_1-r_3)(r_2-r_4]d^2}{[(r_1-r_3)(r_2-r_4]a^2-[(r_1+r_3)(r_2+r_4]b^2-[(r_1-r_3)(r_2-r_4]c^2+[(r_1+r_3)(r_2+r_4]d^2}$$

$$=\frac{[(r_1+r_3)(r_2+r_4)]\left(1-\frac{{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)a^2-[(r_1-r_3)(r_2-r_4)]\left(1-\frac{{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)^2b^2}{[(r_1-r_3)(r_2-r_4)]\left(1-\frac{{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)a^2-[(r_1+r_3)(r_2+r_4)]\left(1-\frac{{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)^2b^2}$$

$$=\frac{[(r_1+r_3)(r_2+r_4)]\left(\frac{{r_1}^2-{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)a^2-[(r_1-r_3)(r_2-r_4)]\left(\frac{{r_2}^2-{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)b^2}{[(r_1-r_3)(r_2-r_4)]\left(\frac{{r_1}^2-{r_3}^2}{{r_1}^2}\right)a^2-[(r_1+r_3)(r_2+r_4)]\left(\frac{{r_2}^2-{r_4}^2}{{r_2}^2}\right)b^2}$$

$$=\frac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2(r_1-r_3)(r_2+r_4)\,a^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2(r_1-r_3)(r_2+r_4)b^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2(r_1+r_3)(r_2-r_4)\,a^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2(r_1+r_3)(r_2-r_4)b^2}$$

以上の計算から㉕は次のようになる。

$$\frac{(r_1-r_3)\,(r_2+r_4)}{(r_1+r_3)\,(r_2-r_4)}=\frac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2(r_1-r_3)(r_2+r_4)\,a^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2(r_1-r_3)(r_2+r_4)b^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2(r_1+r_3)(r_2-r_4)\,a^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2(r_1+r_3)(r_2-r_4)b^2}\cdot\frac{cos^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{sin^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$$

両辺の分子は $(r_1-r_3)\,(r_2+r_4)$、分母は $(r_1+r_3)\,(r_2-r_4)$でそれぞれ割ることができるので、

$$1=\frac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2\,a^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2b^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2\,a^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2b^2}\cdot\frac{cos^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{sin^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$$

$\dfrac{cos^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{sin^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}=\dfrac{1}{tan^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$ だから、

$$tan^2\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2\,a^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2b^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2\,a^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2b^2}=\frac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\qquad\text{------------㉖}$$

$sin(\alpha+\gamma)=\dfrac{2tan\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{1+tan^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$ だから、

$$sin(\alpha+\gamma)=\frac{2tan\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{1+tan^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{2\sqrt{\dfrac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}}{1+\dfrac{{r_2}^2(r_1+r_3)^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{{r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}\qquad\text{---------------㉗}$$

ここで、${r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2$ は、${r_2}^2(r_1+r_3)^2-{r_1}^2(r_2-r_4)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2$ が正のとき、必ず負になることに注意して、$\sqrt{\quad}$ 内は必ず正にならなければならないので、

㉗の分母・分子に $-\left[{r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$ を掛けて計算すると次式が得られる。

$$sin(\alpha+\gamma)\ =\frac{\sqrt{\left[{r_1}^2(r_2-r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-{r_2}^2(r_1+r_3)^2\right]\left[{r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right]}}{2r_1r_2\left[r_2r_3+r_1r_4\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right]}\qquad\text{-------㉘}$$

㉘の分子を計算すると、

$$\left[{r_1}^2(r_2-r_4)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2-{r_2}^2(r_1+r_3)^2\right]\left[{r_2}^2(r_1-r_3)^2-{r_1}^2(r_2+r_4)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

$$=2{r_1}^2{r_2}^2\left[({r_1}^2+{r_3}^2)({r_2}^2+{r_4}^2)+4r_1r_2r_3r_4\right]\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left[{r_2}^4({r_1}^2-{r_3}^2)^2-{r_1}^4({r_2}^2-{r_4}^2)^2\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]$$

となりこの第１項を、

$\underline{2r_1{}^2r_2{}^2\left[(r_1{}^2+r_3{}^2)(r_2{}^2+r_4{}^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}+\underline{\underline{2r_1{}^2r_2{}^2(4r_1r_2r_3r_4)\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$ と変形、第２項を

$\left[\underline{-r_2{}^4(r_1{}^2+r_3{}^2)^2}+\underline{\underline{4r_2{}^4r_1{}^2r_3{}^2}}\right]+\left[\underline{-r_1{}^4(r_2{}^2+r_4{}^2)^2\left(\frac{b}{a}\right)^4}+\underline{\underline{4r_1{}^4r_2{}^2r_4{}^2\left(\frac{b}{a}\right)^4}}\right]$ と変形し、

——　═══ をそれぞれ組み合わせることにより、㉘の分子は以下のようになる。

$$\sqrt{\left[2r_1r_2\left\{\left(r_2r_3+r_1r_4\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)\right\}\right]^2-\left[r_2{}^2(r_1{}^2+r_3{}^2)-r_1{}^2(r_2{}^2+r_4{}^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2}$$

これを㉘に入れて整理すると、

$$\sin(\alpha+\gamma)=\sqrt{1-\left[\frac{r_2{}^2(r_1{}^2+r_3{}^2)-r_1{}^2(r_2{}^2+r_4{}^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2r_1r_2\left[r_2r_3+r_1r_4\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}\right]^2}$$

となり、$\sin(\alpha+\gamma)$ が r_1～r_4と$\left(\frac{b}{a}\right)^2$ で表わされた。

　以上をまとめたものが私の導いた解である。

$$a=\frac{r_1\left[r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)+r_2r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_3+r_2r_4)}m$$ ---------------㋐

$$b=\frac{r_2\left[-r_2r_4(r_1+r_3)+r_1r_3(r_2+r_4)+r_1r_3\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_3+r_2r_4)}m$$ ---------------㋑

$$\frac{b}{a}=\frac{r_2\left[-r_2r_4(r_1+r_3)+r_1r_3(r_2+r_4)+r_1r_3\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{r_1\left[r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)+r_2r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}$$ ---------------㋒

$$\sin(\alpha+\gamma)=\sqrt{1-\left[\frac{r_2{}^2(r_1{}^2+r_3{}^2)-r_1{}^2(r_2{}^2+r_4{}^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2r_1r_2\left[r_2r_3+r_1r_4\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}\right]^2}$$ ---------------㋓

$$m=\frac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_3+r_2r_4}\left[(r_1+r_2+r_3+r_4)+\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]\frac{1}{\sin(\alpha+\gamma)}$$ ---------------㋔

$$R=\frac{m}{\sqrt{2\left[1+\left(\frac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_4+r_2r_3}\right)^2\right]-\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_4+r_2r_3}\right)^2\left[\left(1-\frac{r_3{}^2}{r_1{}^2}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(1-\frac{r_4{}^2}{r_2{}^2}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}}$$ ---------------㋕

㋒㋓㋔を㋕に入れればRを$r_1 \sim r_4$で示す式となる。非常に長い式になるが書いてみると次のようになる。

$$R = \frac{}{\sqrt{2\left[1+\left(\frac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_4+r_2r_3}\right)^2\right]-\left(\frac{r_1r_2}{r_1r_4+r_2r_3}\right)^2}} \quad \text{---------------}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{r_1r_2+r_3r_4}{r_1r_3+r_2r_4}\left[(r_1+r_2+r_3+r_4)+\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{\sqrt{1-\left[\dfrac{r_2{}^2(r_1{}^2+r_3{}^2)-r_1{}^2(r_2{}^2+r_4{}^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2r_1r_2\left[r_2r_3+r_1r_4\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}\right]^2}}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{r_3{}^2}{r_1{}^2}\right)^2\left(\frac{r_1\left[r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)+r_2r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{r_2\left[-r_2r_4(r_1+r_3)+r_1r_3(r_2+r_4)+r_1r_3\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}\right)^2+\left(1-\frac{r_4{}^2}{r_2{}^2}\right)^2\left(\frac{r_2\left[-r_2r_4(r_1+r_3)+r_1r_3(r_2+r_4)+r_1r_3\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{r_1\left[r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)+r_2r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}\right)^2\right]}}$$

『日本の幾何ー何題解けますか？』には解答のみが示されていて、計算過程の記載はない。
その解は次のとおり至ってシンプルなものだった。

【解 答】

$$r=\frac{a\{a(r_1+r_3)-4r_1r_3\}\{a(r_2+r_4)-4r_2r_4\}}{8\{a(r_1+r_3)-2r_1r_3\}\{a(r_2+r_4)-2r_2r_4\}}$$

ただし，　$a=r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}$ である.

　私が導いた解に比べると魔法のような解答だ！
分子に現れる $4r_1r_3$，$4r_2r_4$ 、分母に現れる $2r_1r_3$，$2r_2r_4$ 、それと全体に掛かる$\frac{a}{8}$ が絶妙な組み合わせのように感じられる。
ただ､$a=r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}$ を r の式に入れると結構複雑な式になる。

実際に入れてみると以下のとおりになる。

$$\boldsymbol{r}=\frac{\left\{r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right\}\left[\left\{r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right\}(r_1+r_3)-4r_1r_3\right]}{8\left[\left\{r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right\}(r_1+r_3)-2r_1r_3\right]}$$

$$\cdots\cdots\cdot\frac{\times\left[\left\{r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right\}(r_2+r_4)-4r_2r_4\right]}{\times\left[\left\{r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right\}(r_2+r_4)-2r_2r_4\right]}$$

　$a=r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}$ は、後述する１４ページの式（H）の２次方程式から出てくるもので、私の導いた解にも $r_1+r_2+r_3+r_4+\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}$ が現れる。

次に数値計算の例を示す。

数値計算でRを求める手順は次のとおりである。

㋐と㋑から㋒により $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ を求め、それを㋓に入れて $sin(\alpha+\gamma)$ を計算する。

次に、$sin(\alpha+\gamma)$ を㋔に入れ m を計算し、そのmと $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ を㋕に入れて計算すればRが得られる。

r_1，r_2，r_3，r_4 として、解りやすくするため整数値 $r_1=3$，$r_2=4$，$r_3=5$，$r_4=6$ とする。

$$\frac{a}{b}=\frac{4\left[-4\cdot6(3+5)+3\cdot5(4+6)+3\cdot5\sqrt{(3+4+5+6)^2-4(3\cdot5+4\cdot6)}\right]}{3\left[4\cdot6(3+5)-3\cdot5(4+6)+4\cdot6\sqrt{(3+4+5+6)^2-4(3\cdot5+4\cdot6)}\right]}=\frac{4}{3}\frac{-7+5\sqrt{42}}{7+8\sqrt{42}}$$

$$=\frac{1}{87}\left(76-4\sqrt{42}\right)\qquad[\![=0.57560]\!]$$

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}\frac{7+8\sqrt{42}}{-7+5\sqrt{42}}=\frac{3}{44}\left(19+\sqrt{42}\right)\qquad[\![=1.73732]\!]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left\{\frac{1}{87}\left(76-4\sqrt{42}\right)\right\}^2=\frac{16(403-38\sqrt{42})}{7569}\qquad[\![=0.33131]\!]$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left\{\frac{3}{44}\left(19+\sqrt{42}\right)\right\}^2=\frac{3(1209+114\sqrt{42})}{1936}\qquad[\![=3.01829]\!]$$

$$sin(\alpha+\gamma)=\sqrt{1-\left[\frac{4^2(3^2+5^2)-3^2(4^2+6^2)\cdot\dfrac{16\left(403-38\sqrt{42}\right)}{7569}}{2\cdot3\cdot4\left[4\cdot5+3\cdot6\cdot\dfrac{16\left(403-38\sqrt{42}\right)}{7569}\right]}\right]^2}=\frac{2}{169}\sqrt{\frac{2}{3}\left(8579-315\sqrt{42}\right)}$$

$$[\![=0.78128]\!]$$

$$m=\frac{3\cdot4+5\cdot6}{3\cdot5+4\cdot6}\left[(3+4+5+6)+\sqrt{(3+4+5+6)^2-4\left(3\cdot5+4\cdot6\right)}\right]\cdot\frac{169}{2\sqrt{\dfrac{2}{3}\left(8579-315\sqrt{42}\right)}}$$

$$=21\sqrt{\frac{2(2551+381\sqrt{42}\,)}{2431}}\qquad[\![=42.6777]\!]$$

$$R=\frac{21\sqrt{\dfrac{2(2551+381\sqrt{42}\,)}{2431}}}{\sqrt{2\left[1+\left(\dfrac{3\cdot4+5\cdot6}{3\cdot6+4\cdot5}\right)^2\right]-\left(\dfrac{3\cdot4}{3\cdot6+4\cdot5}\right)^2\left[\left(1-\dfrac{5^2}{3^2}\right)^2\cdot\dfrac{3(1209+114\sqrt{42})}{1936}+\left(1-\dfrac{6^2}{4^2}\right)^2\cdot\dfrac{16\left(403-38\sqrt{42}\right)}{7569}\right]}}$$

$$=\frac{7\left(8937+1087\sqrt{42}\right)}{4862}\qquad[\![=23.00925]\!]$$

以上より、

$r_1=3$，$r_2=4$，$r_3=5$，$r_4=6$ のとき、$\underline{\mathrm{R}=\dfrac{7\left(8937+1087\sqrt{42}\right)}{4862}=23.00925}$　が求められた。

次に模範解答の式に基づいて計算する。

$$a=r_1+r_2+r_3+r_4-\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}$$

$$=3+4+5+6-\sqrt{(3+4+5+6)^2-4\left(3\cdot5+4\cdot6\right)}=18-2\sqrt{42}\qquad [\![=5.03852]\!]$$

$$R=\frac{\left(18-2\sqrt{42}\right)\left[\left(18-2\sqrt{42}\right)(3+5)-4\cdot3\cdot5\right]\left[\left(18-2\sqrt{42}\right)(4+6)-4\cdot4\cdot6\right]}{8\left[\left(18-2\sqrt{42}\right)(3+5)-2\cdot3\cdot5\right]\left[\left(18-2\sqrt{42}\right)(4+6)-2\cdot4\cdot6\right]}$$

$$=\frac{\left(9-\sqrt{42}\right)\left(21-4\sqrt{42}\right)\left(21-5\sqrt{42}\right)}{2\left(57-8\sqrt{42}\right)\left(33-5\sqrt{42}\right)}=\frac{7\left(8937+1087\sqrt{42}\right)}{4862}$$

となり一致することが確認できた。

$r_1=3$，$r_2=4$，$r_3=5$，$r_4=6$ の場合の図を描いてみる。
作図のためには、a，b，c，d，m，n，$(\alpha+\gamma)$を計算する必要がある。

$sin(\alpha+\gamma)=0.78128$ より、$\alpha+\gamma=0.8967$ $(rad\,;\,51.4^\circ$ または $128.6^\circ)$

$n=\dfrac{r_1r_4+r_2r_3}{r_1r_2+r_3r_4}\,m$ より、$n=\dfrac{38}{42}\times42.6777=38.6131$

$$a=\frac{r_1\left[r_2r_4(r_1+r_3)-r_1r_3(r_2+r_4)+r_2r_4\sqrt{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2-4(r_1r_3+r_2r_4)}\right]}{(r_1r_2+r_3r_4)(r_1r_3+r_2r_4)}m$$

$$=\frac{3\left[4\cdot6(3+5)-3\cdot5(4+6)+4\cdot6\sqrt{(3+4+5+6)^2-4\left(3\cdot5+4\cdot6\right)}\right]}{(3\cdot4+5\cdot6)\left(3\cdot5+4\cdot6\right)}\cdot42.6777=27.5978$$

$\dfrac{b}{a}=0.57560$ より、$b=0.57560\times27.5978=15.8852$

$c=\dfrac{r_3}{r_1}a$ より $\mathrm{c}=\dfrac{5}{3}\times27.5978=45.9964$，$d=\dfrac{r_4}{r_2}b$ より $d=\dfrac{6}{4}\times15.8852=23.8279$

小数点以下２桁を四捨五入してまとめると表１のようになり、これをもとに描いたものが図３である。

r_1	3	c	46.0
r_2	4	d	23.8
r_3	5	m	42.7
r_4	6	n	38.6
a	27.6	$\alpha+\gamma$	51.4°(128.6°)
b	15.9	R	23.0

表１

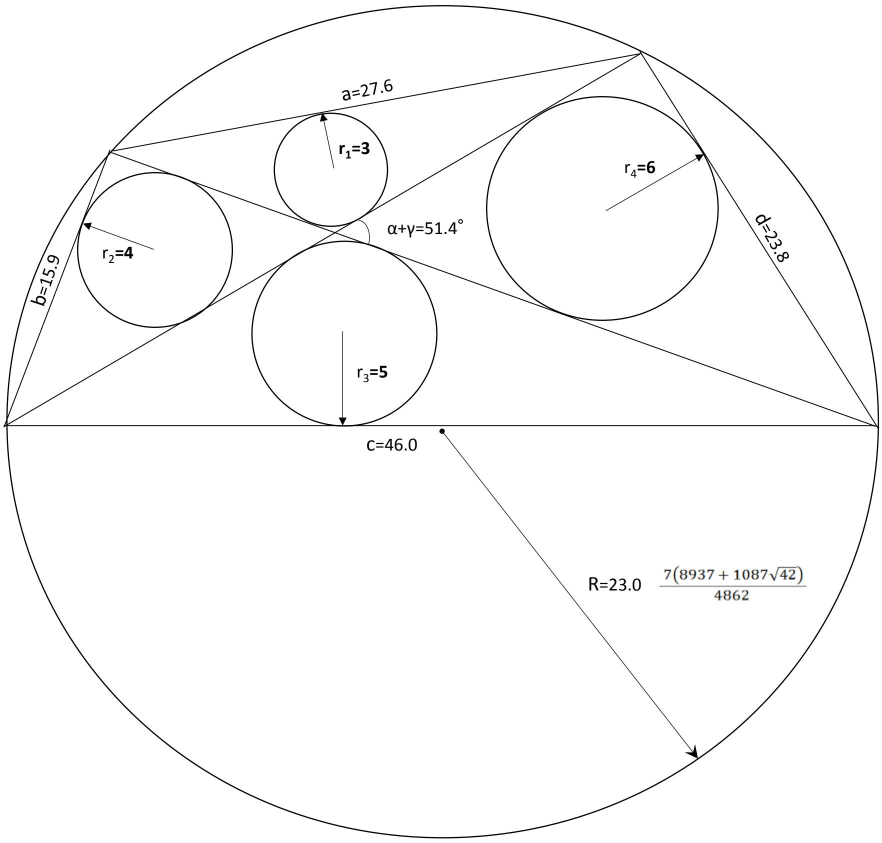


図３ $r_1=3$, $r_2=4$, $r_3=5$, $r_4=6$ の場合 $R=\dfrac{7\left(8937+1087\sqrt{42}\right)}{4862}$

岩田至康著　幾何学大辞典　補巻Ⅱ第５章「作図・最大最小・計算問題」にその解答があった。
解答は他の問題の解を引用しているので、理解しやすいようにを追加・補足しながら書いていく。
（検算の結果一部数値の修正を必要とする箇所があった）

図１ ⊿ＡＯＢにおいて、

$$\frac{r_1}{tan\frac{\beta}{2}}+\frac{r_1}{tan\frac{\delta}{2}}=a \text{ から、} r_1=\frac{a}{\frac{1}{tan\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{tan\frac{\delta}{2}}}=\frac{a}{\frac{sin\frac{\beta+\delta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}}=\frac{a\,sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}{sin\frac{\beta+\delta}{2}}=\frac{a\,sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}{cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

正弦定理 $\frac{a}{sin\,\alpha}=2R$ を用いて 、$a=2R\,sin\,\alpha=\ 2R\cdot 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$ だから、

$$r_1=\frac{a\,sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}{cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{4\mathrm{R}sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}$$ が得られる。

ここで、$\frac{4\mathrm{R}}{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\prod_{i=\alpha}^{\delta}sin\frac{i}{2}=k$ ------------------------------------(A)　とおけば、

$$k=\frac{4\mathrm{R}}{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cdot sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2}sin\frac{\delta}{2}$$ だから、

$$r_1=k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}}$$

同様に、

$$r_3=\frac{c\,sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}{cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\frac{4\mathrm{R}sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}$$ から、

$$r_3=k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{cos\frac{\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$r_1+r_3=k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}}+k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{cos\frac{\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}=k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{sin\,\alpha+sin\,\gamma}{2sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$=k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\,cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\gamma}{2}}=k\,sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\left(cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}+1\right)$$ ------------(B)

次に r_1r_3 を作ると、

$$r_1r_3=\left(k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}}\right)\left(k\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{cos\frac{\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}\right)=k^2sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}$$ ------------(C)

である。(B)、(C) からα，γを消去すれば、

$$r_1+r_3=k\,sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\left(\frac{r_1r_3}{k^2sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}+1\right)=\frac{r_1r_3}{k}+ksin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

よって、$sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{r_1+r_3}{k}-\frac{r_1r_3}{k^2}$ -----------------------------(D)

となる。全く同様に、

$$r_2=\frac{4R\,sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\beta+\delta}{2}}\,sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\gamma}{2}=k\,sin\frac{\beta+\delta}{2}\cdot\frac{cos\frac{\beta}{2}}{sin\frac{\delta}{2}}$$

$$r_4=\frac{4R\,sin\frac{\delta}{2}cos\frac{\delta}{2}}{cos\frac{\beta+\delta}{2}}\,sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\gamma}{2}=k\,sin\frac{\beta+\delta}{2}\cdot\frac{cos\frac{\delta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}}$$

$$r_2+r_4=k\,sin\frac{\beta+\delta}{2}\cdot\frac{sin\,\beta+sin\,\delta}{2sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\delta}{2}}=k\,sin^2\frac{\beta+\delta}{2}\left(cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\delta}{2}+1\right)$$ -----------------------------(E)

$$r_2r_4=k^2sin^2\frac{\beta+\delta}{2}cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\delta}{2}$$ -----------------------------(F)

である。(E)、(F) からβ，δを消去すれば

$$r_2+r_4=k\,sin^2\frac{\beta+\delta}{2}\left(\frac{r_2r_4}{k^2sin^2\frac{\beta+\delta}{2}}+1\right)=\frac{r_2r_4}{k}+ksin^2\frac{\beta+\delta}{2}$$

よって、$sin^2\frac{\beta+\delta}{2}=\frac{r_2+r_4}{k}-\frac{r_2r_4}{k^2}$ -----------------------------(G)

(G)の左辺は$sin^2\frac{\beta+\delta}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$ なので、

(D)、(G) から

$$sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}=\left(\frac{r_1+r_3}{k}-\frac{r_1r_3}{k^2}\right)+\left(\frac{r_2+r_4}{k}-\frac{r_2r_4}{k^2}\right)=1$$

整理すると、$\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{k}-\frac{r_1r_3+r_2r_4}{k^2}=1$　となるから、

$$k^2-(\,r_1+r_2+r_3+r_4)k+(r_1r_3+r_2r_4)=0$$ -----------------------------(H)

を得る。

次に(B)，(C)から$\frac{\alpha+\gamma}{2}$ を消去するため$\frac{(B)}{(C)}$をつくると、

$$\frac{r_1+r_3}{r_1r_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{k\,sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\left(cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}+1\right)}{k^2sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}}=\frac{1+tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}}{k}$$

同じように (D)，(E)から $\frac{\beta+\delta}{2}$ を消去するため $\frac{(E)}{(D)}$ をつくると、

$$\frac{r_2+r_4}{r_2r_4}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{k\,sin^2\frac{\beta+\delta}{2}\left(cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\delta}{2}+1\right)}{k^2sin^2\frac{\beta+\delta}{2}cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\delta}{2}}=\frac{1+tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\delta}{2}}{k}$$

ここで、$\tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}=k_1$，$tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\delta}{2}=k_2$ とおくと、

$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1+k_1}{k}$，$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{1+k_2}{k}$ となるから、

$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=r_{13}$，$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=r_{24}$ -----------------------------(I)

とおけば次のようになる。

$k_1=r_{13}k-1$，$k_2=r_{24}k-1$ -----------------------------(J)

$$\frac{1}{k_1}-1=cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}-1=\frac{cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{1}{k_2}-1=cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\delta}{2}-1=\frac{cos\frac{\beta+\delta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}=\frac{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\delta}{2}}$$ となるから、

$$\left(\frac{1}{k_1}-1\right)\left(\frac{1}{k_2}-1\right)=\frac{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\;cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2}sin\frac{\delta}{2}}$$ である。ところが、

$$k=\frac{4\mathrm{R}}{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\cdot sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2}sin\frac{\delta}{2}$$ だったから、

$\left(\frac{1}{k_1}-1\right)\left(\frac{1}{k_2}-1\right)=\frac{4R}{k}$ -----------------------------(K)

となる。そこで（K）に（J）を代入して k_1，k_2 を消去すれば、

$$\frac{(r_{13}k-2)(r_{24}k-2)}{(r_{13}k-1)(r_{24}k-1)}=\frac{4R}{k}$$

展開して k について整理すると、

$r_{13}r_{24}k^3-2(r_{13}+r_{24}+2R\,r_{13}r_{24})k^2+4\{1+R(r_{13}+r_{24})\}k-4R=0$ -----------------------------(L)

となる。あとは（H）と（L）とから k を消去すればよいから、

まず（H）において $s_1=r_1+r_2+r_3+r_4$ とおいて、

$k^2=s_1k-(r_1r_3+r_2r_4)$ -----------------------------(H’)

として、（L）の k^3 の項に代入して次数を下げると、

$$[\,(s_1-4R)\,r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})]k^2+[4+4R(r_{13}+r_{24})-\,r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)]k-4R=0 \quad \text{-------------(L')}$$

となる、(L’)にもう一度(H’)を代入して k^2 の項を消すと、

$$[4+2(2R-\,s_1)(r_{13}+r_{24})+\,r_{13}r_{24}(\,s_1{}^2-4R\,s_1-r_1r_3-r_2r_4)]k$$
$$=(\,r_1r_3+r_2r_4)[\,(s_1-4R)\,r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})]+4R \quad \text{-------------(M)}$$

となる。次に(H)と(L’)から定数項を消去すると、

$$[(\,r_1r_3+r_2r_4)\{(s_1-4R)\,r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})\}+4R]k$$
$$=4Rs_1+(\,r_1r_3+r_2r_4)[\,r_{13}r_{24}(r_{13}+r_{24})-4R(r_{13}+r_{24})-4] \quad \text{-------------(N)}$$

となるから(M),(N)とから k を消去すると、

$$[(\,r_1r_3+r_2r_4)\{(s_1-4R)\,r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})\}+4R]^2=$$
$$\{4+2(2R-\,s_1)(r_{13}+r_{24})+\,r_{13}r_{24}(\,s_1{}^2-4R\,s_1-r_1r_3-r_2r_4)\}$$
$$\times\{(\,r_1r_3+r_2r_4)^2\,r_{13}r_{24}(r_{13}+r_{24})-4R(r_{13}+r_{24})(\,r_1r_3+r_2r_4)+4(R\,s_1-r_1r_3-r_2r_4)\}$$

となる。

ここで R について整理すると、

$$\text{左辺}=[\,4\{1-r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\}R+(\,r_1r_3+r_2r_4)\{\,s_1r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})\}]^2$$
$$\text{右辺}=[\,4R\{(r_{13}+r_{24})-\,s_1r_{13}r_{24}\}+r_{13}r_{24}(s_1{}^2-r_1r_3-r_2r_4)-2\,s_1(r_{13}+r_{24})+4]$$
$$\times[4R\{\,s_1-(r_{13}+r_{24})(\,r_1r_3+r_2r_4)\}+(\,r_1r_3+r_2r_4)\{r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)-4\}]$$

となるから一辺に集めてRについて整理すると、

$$\underline{\underline{16[r_{13}r_{24}\,s_1{}^2-\{1+r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\}(r_{13}+r_{24})\,s_1+r_{13}{}^2r_{24}{}^2(\,r_1r_3+r_2r_4)^2+\{(r_{13}+r_{24})^2-2r_{13}r_{24}\}(\,r_1r_3+r_2r_4)+1]R^2}}$$
$$\underline{+4\big[[-r_{13}r_{24}\,s_1{}^3+\{2+r_{13}r_{24}(r_{13}+r_{24})(\,r_1r_3+r_2r_4)\,s_1{}^2\}]-4[r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\{1+r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\}}$$
$$\underline{+2(r_{13}+r_{24})^2(\,r_1r_3+r_2r_4)+4]\,s_1+8\{2+r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\}\big]R}$$
$$+[4r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\,s_1{}^2-2(r_{13}+r_{24})(\,r_1r_3+r_2r_4)\{4+r_{13}r_{24}(\,r_1r_3+r_2r_4)\}\,s_1]$$
$$+[4(\,r_1r_3+r_2r_4)^2\{(r_{13}+r_{24})^2-2r_{13}r_{24}\}+(\,r_1r_3+r_2r_4)\{16+r_{13}{}^2r_{24}{}^2(\,r_1r_3+r_2r_4)^2\}]=0 \quad \text{-------(O)}$$

$\underline{\underline{\qquad\quad}}$が R^2 の係数,$\underline{\qquad\quad}$が R の係数,アンダーラインなしが定数項の２次方程式が導かれた。

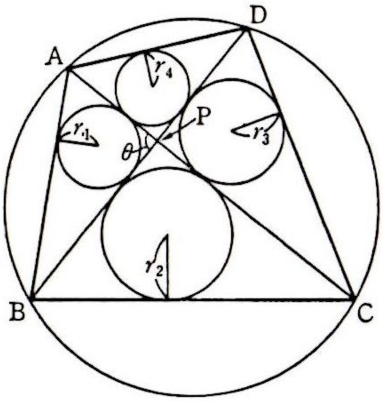
幾何学大辞典にはここまでしか示されていない。この２次方程式を解けば解が得られるはずだが、この方程式を解くのは計算が非常に複雑で難しく、これ以降の計算は断念した。

検算を行ったところ、途中の計算に一部誤りがあり修正した。また、式(O)については、Rの２次方程式の係数の書き方を改め、各項で s_1 の次数の高い順に並べた。

岩田至康著「幾何学大辞典」をそのまま引用して掲載する。

この問題は江戸時代に算額として掲げられたものである。便利な記号法の発達していなかった時代に、どのようにしてこのような問題を解いたのだろうか？

323 円O(R)に内接する四角形ABCDの対角線の交点をPとし，△PAB, △PCD, △PDA の内接円の半径を r_1, r_2, r_3, r_4 とするとき，Rを $r_i(i=1,2,3,4)$ で表わせ.



解　137(2), (3) によれば

$$r_1+r_3=k\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cot\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_3}{2}+1\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r_1r_3=k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cot\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_3}{2} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

であるから，α_1, α_3 を消去すれば

$$r_1+r_3=k\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{r_1r_3}{k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}+1\right)$$

$$=\frac{r_1r_3}{k}+k\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{r_1+r_3}{k}-\frac{r_1r_3}{k^2}$$

となる．全く同様にして

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{r_2+r_4}{k}-\frac{r_2r_4}{k^2}$$

となるから

$$1=\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{k}-\frac{r_1r_3+r_2r_4}{k^2}$$

$$\therefore\quad k^2-(r_1+r_2+r_3+r_4)k+(r_1r_3+r_2r_4)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる．次に(1)と(2)とから θ を消去すれば 137 の(4), (5)より

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1+k_1}{k},\quad \frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{1+k_2}{k}$$

となるから

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=r_{13},\quad \frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=r_{24} \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

とおけば

$$k_1=r_{13}k-1,\quad k_2=r_{24}k-1 \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

となる．さて

$$\frac{1}{k_1}-1=\cot\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_3}{2}-1$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2}}$$

同様にして

$$\frac{1}{k_2}-1=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_4}{2}}$$

であるから

$$\left(\frac{1}{k_1}-1\right)\left(\frac{1}{k_2}-1\right)=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\Pi\sin\frac{\alpha_i}{2}}$$

となる．ところが 123(i)によれば

$$k=\frac{4R}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\Pi\sin\frac{\alpha_i}{2}$$

であったから

$$\left(\frac{1}{k_1}-1\right)\left(\frac{1}{k_2}-1\right)=\frac{4R}{k} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

となる．そこで(6)に(5)を代入して k_1, k_2 を消去すれば

$$\frac{(r_{13}k-2)(r_{24}k-2)}{(r_{13}k-1)(r_{24}k-1)}=\frac{4R}{k}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & r_{13}r_{24}k^3-2(r_{13}+r_{24}+2Rr_{13}r_{24})k^2\\ & +4\{1+R(r_{13}+r_{24})\}k-4R=0\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)\end{aligned}$$

となる．よって後は(3)と(7)とから k を消去すればよいから，まず(3)から

$$k^2=s_1k-(r_1r_3+r_2r_4) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$$

を求めて(7)の k^3 の項に代入して次数を低めると

4が正

$$\begin{aligned}&\{(s_1-2R)r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})\}k^2\\ &\quad+\{4+4R(r_{13}+r_{24})\\ &\quad-r_{13}r_{24}(r_1r_3+r_2r_4)\}k-4R=0\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)'\end{aligned}$$

となる．もう一度(3)$'$を代入して k^2 の項を消すと

4が正

$$\begin{aligned}&\{4+2(2R-s_1)(r_{13}+r_{24})\\ &\quad+r_{13}r_{24}(s_1^2-2Rs_1-r_1r_3-r_2r_4)\}k\\ &=(r_1r_3+r_2r_4)\{(s_1-2R)r_{13}r_{24}\\ &\quad-2(r_{13}+r_{24})\}+4R \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

4が正

となる．次に(3) と (7)$'$とから定数項を消去すると

4が正

$$\begin{aligned}&[(r_1r_3+r_2r_4)\{(s_1-2R)r_{13}r_{24}\\ &\qquad-2(r_{13}+r_{24})\}+4R]k\\ &=4Rs_1+(r_1r_3+r_2r_4)\{r_{13}r_{24}(r_1r_3+r_2r_4)\\ &\qquad-4R(r_{13}+r_{24})-4\} \quad \cdots\cdots\cdots(9)\end{aligned}$$

となるから(8)と(9)とから k を消去すると

4が正

$$\begin{aligned}&[(r_1r_3+r_2r_4)\{(s_1-2R)r_{13}r_{24}\\ &\qquad-2(r_{13}+r_{24})+4R]^2\end{aligned}$$

4が正

$$\begin{aligned}&=\{4+2(2R-s_1)(r_{13}+r_{24})+r_{13}r_{24}\\ &\quad\cdot(s_1^2-2Rs_1-r_1r_3-r_2r_4)\}\\ &\quad\cdot\{(r_1r_3+r_2r_4)^2r_{13}r_{24}-4R(r_{13}+r_{24})\\ &\quad\cdot(r_1r_3+r_2r_4)+4(Rs_1-r_1r_3-r_2r_4)\}\end{aligned}$$

となる．ここでRについて整理すると

$$\begin{aligned}左辺=&[2R\{2-(r_1r_3+r_{24})r_{13}r_{24}\}\\ &+(r_1r_3+r_2r_4)\\ &\cdot\{s_1r_{13}r_{24}-2(r_{13}+r_{24})\}]^2\end{aligned}$$

$4R\{1-r_{13}r_{24}(r_1r_3+r_2r_4)\}$

$$右辺=2R\{2(r_{13}+r_{24})-s_1r_{13}r_{24}\}$$

$4R\{(r_{13}+r_{24})-s_1r_{13}r_{24}\}$

$$\begin{aligned}&+r_{13}r_{24}(s_1^2-r_1r_3-r_2r_4)\\ &-2s_1(r_{13}+r_{24})+4]\\ &\cdot[4R\{s_1-(r_{13}+r_{24})(r_1r_3+r_2r_4)\}\\ &+(r_1r_3+r_2r_4)\\ &\cdot\{r_{13}r_{24}(r_1r_3+r_2r_4)-4\}]\end{aligned}$$

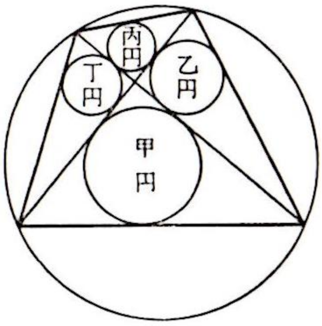
表現を修正

となるから，１辺に集めると

$$\begin{aligned}&4[2\{2-2s_1(r_{13}+r_{24})+s_1^2r_{13}r_{24}\}\\ &\quad+2(r_1r_3+r_2r_4)\{2(r_{13}+r_{24})^2\\ &\quad+r_{13}r_{24}[s_1(r_{13}+r_{24})-2]\}\\ &\quad+r_{13}^2r_{24}^2(r_1r_3+r_2r_4)^2]R^2\\ &\quad-4[s_1\{4-2s_1(r_{13}+r_{24})+s_1^2r_{13}r_{24}\}\\ &\quad-(r_1r_3+r_2r_4)(r_{13}+r_{24})\\ &\quad\cdot\{6-2s_1(r_{13}+r_{24})+s^2_1r_{13}r_{24}\}\\ &\quad+r_{13}r_{24}(r_{13}+r_{24})(r_1r_3+r_2r_4)^2]R\\ &\quad+(r_1r_3+r_2r_4)[(r_1r_3+r_2r_4)^2r_{13}^2r_{24}^2\\ &\quad+2(r_1r_3+r_2r_4)\{2(r_{13}^2+r_{24}^2)\\ &\quad-s_1r_{13}r_{24}(r_{13}+r_{24})\}\\ &\quad+4\{r_{13}r_{24}s_1^2-2(r_{13}+r_{24})s_1+4\}]=0\end{aligned}$$

となってRについての２次方程式が得られる．

注　本題は「賽祠神算」巻５に掲げられた次の問題で，「算法雑俎」にも採用されている．



（２０１８．０９．３０）