７１「創作関数」

　$cos(sin\,x)$ と $sin(cos\,x)$ではどちらが大きいだろうか？という問題にヒントを得て、いろいろ変わった関数を考え、その特徴を探ってみようと思う。

　ちなみにこの問題については、$cos(sin\,x)-sin(cos\,x)$ の符号を調べればよいから、

$$cos(sin\,x)-sin(cos\,x)=cos(sin\,x)-cos\left(cos\,x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\,cos\left(\frac{sin\,x+cos\,x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{sin\,x-cos\,x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$ と変形して、

$cos\left(\dfrac{sin\,x+cos\,x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{sin\,x-cos\,x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$ の符号を調べる。

$sin\,x+cos\,x=\sqrt{2}\,sin(x+\frac{\pi}{4})\leqq\sqrt{2}$，　$sin\,x-cos\,x=\sqrt{2}\,sin(x-\frac{\pi}{4})\leqq\sqrt{2}$　だから、

cosの(　)内は、$\dfrac{sin\,x+cos\,x+\frac{\pi}{2}}{2}\leqq\dfrac{\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}}{2}=1.4925\ldots\leqq\dfrac{\pi}{2}$　よって、$cos\left(\dfrac{sin\,x+cos\,x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\geqq 0$

$\dfrac{sin\,x-cos\,x-\frac{\pi}{2}}{2}\leqq\dfrac{\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}}{2}=-0.078\ldots$，　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq -0.078\ldots\leqq 0$　よって、$cos\left(\dfrac{sin\,x-cos\,x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\geqq 0$

以上から、$cos(sin\,x)-sin(cos\,x)$ の符号は常に正となるため、$cos(sin\,x)>sin(cos\,x)$ となることがわかる。

　ここからは、いろいろ組み合わせて関数を創ってみようと思う。

１．$y=x^x$ ，$y=x^{-x}$，$y=x^x+x^{-x}$ ，$y=x^x-x^{-x}$ などの「x^x」を含む一群の関数について

（１）　$y=x^x$　--------------------------------①

　①の両辺の対数をとると、$\ln y=x\cdot\ln x$　--------------------------------②

　② を微分して、$\dfrac{1}{y}dy=\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx$,　$\dfrac{dy}{dx}=y\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1)$

$\dfrac{dy}{dx}=0$ とおくと、$x\neq 0$ で $x^x\neq 0$ だから $\ln x+1=0$，　$\ln x=-1$ より、$x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

よって、$x=\dfrac{1}{e}$ $(\fallingdotseq 0.3679)$のとき極大値あるいは極小値をとることがわかる。その値は、

① に $x=\dfrac{1}{e}$ を入れて、$y=x^x=(\dfrac{1}{e})^{\left(\frac{1}{e}\right)}$ $(\fallingdotseq 0.6922)$ となる。

極大値か極小値かを確かめるために、$\dfrac{dy}{dx}=x^x(ln\,x+1)$ に $\dfrac{1}{e}$ の前後の値を入れてその符号をみる。

例えば $x=\dfrac{1}{2e}$ を入れると、$\dfrac{dy}{dx}=(\dfrac{1}{2e})^{\frac{1}{2e}}\left\{ln(\dfrac{1}{2e})+1\right\}$，$(\dfrac{1}{2e})^{\frac{1}{2e}}>0$，$ln(\dfrac{1}{2e})+1=-ln\,2<0$

だから $\dfrac{1}{e}$ より小さい値では $\dfrac{dy}{dx}$ の符号は負、$\dfrac{1}{e}$ より大きい値、例えば $x=1$ を入れると $\dfrac{dy}{dx}=1>0$

となり $\dfrac{dy}{dx}$ の符号は正なので、$x=\dfrac{1}{e}$ の場合は極小値であることがわかる。

$x=0$ のとき、$x^x=e^{xlog\,x}$ と変形すると、$x\to 0$ のとき $xlog\,x\to 0$ なので x^x は限りなく 1 に近ずく。

ただし、$x=0$ の値は定義されないので不定である。

さらに $x<0$ の場合について、

まず負の整数の時、

$x=-1$ のとき $(-1)^{(-1)}=\dfrac{1}{(-1)^1}=-1$，$x=-2$ のとき $(-2)^{(-2)}=\dfrac{1}{(-2)^2}=\dfrac{1}{4}$，$x=-3$ のとき

$(-3)^{(-3)}=\dfrac{1}{(-3)^3}=\dfrac{1}{-27}$ となるから、x が負の偶数の時 $(-x)^{(-x)}=\dfrac{1}{x^x}$，$x$ が負の奇数の時

$(-x)^{(-x)}=-\dfrac{1}{x^x}$ となり、偶数と奇数で正負の値が逆転を繰り返す。

次に負の有理数の時、例えば、

$$x=-\frac{1}{2}\ のとき、\left(-\frac{1}{2}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{(2)^{\frac{1}{2}}}}=\frac{(2)^{\frac{1}{2}}}{(-1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{i}=-\sqrt{2}i$$

これは、$\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{(2)^{\frac{1}{2}}}}$ のとき $\dfrac{1}{\dfrac{(1)^{\frac{1}{2}}}{(-2)^{\frac{1}{2}}}}$ とすることも可能なので、$=\dfrac{(-2)^{\frac{1}{2}}}{(1)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{1}=\sqrt{2}i$

従って、$\pm\sqrt{2}i$ という値を取りうる。

$x=-\dfrac{1}{n}$ のとき、$\left(-\dfrac{1}{n}\right)^{\left(-\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\dfrac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{(n)^{\frac{1}{n}}}}=\dfrac{(n)^{\frac{1}{n}}}{(-1)^{\frac{1}{n}}}$，$-1=\cos\pi+i\sin\pi$ を用いて表すと

$\dfrac{(n)^{\frac{1}{n}}}{(-1)^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{(n)^{\frac{1}{n}}}{(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\cos\dfrac{1}{n}\pi+i\sin\dfrac{1}{n}\pi}$ となり、分子の $\sqrt[n]{n}$ は実数なので、分母によって決まり通常は複素数になる。

$x=-\dfrac{m}{n}$ （n，mは整数で n はmを割り切らない）のとき、$\left(-\dfrac{m}{n}\right)^{\left(-\frac{m}{n}\right)}=\dfrac{1}{\left(-\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{(-1)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}}$

$(-1)^{\frac{m}{n}}$ を $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ を用いて表すと、$(-1)^{\frac{m}{n}}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{m}{n}}=\cos(\dfrac{m}{n}\pi)+i\sin(\dfrac{m}{n}\pi)$

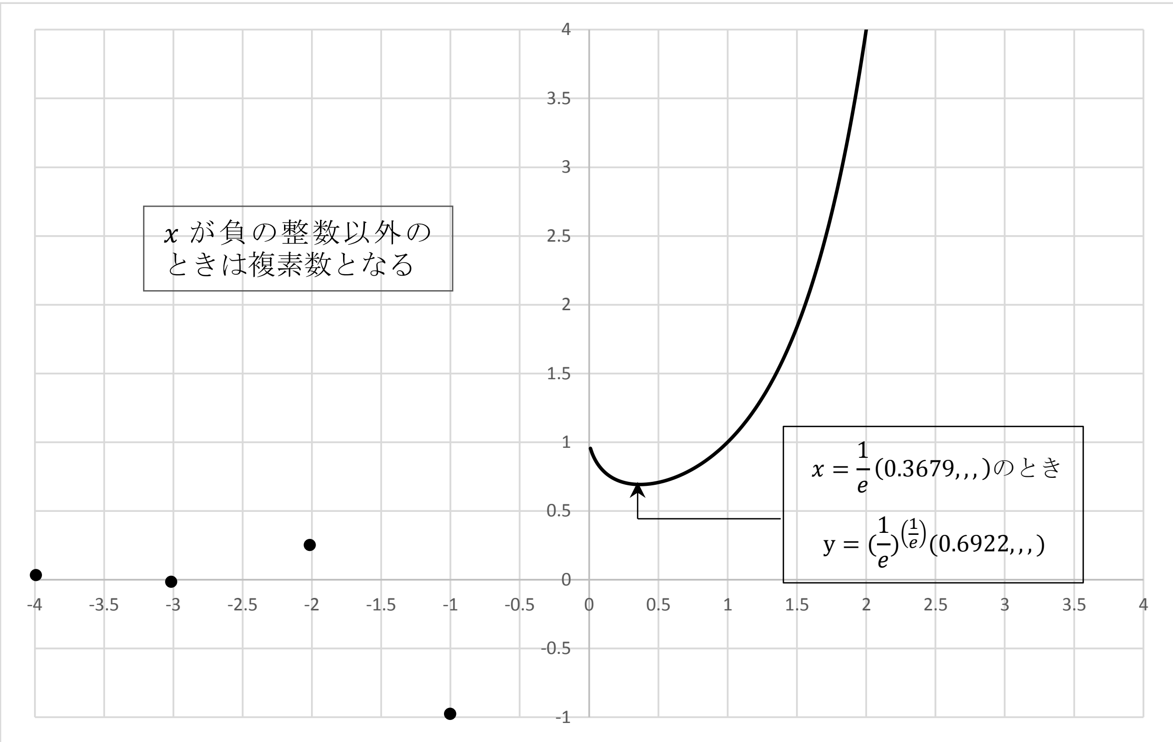
と表せるから、$\dfrac{1}{(-1)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\left[\cos(\frac{m}{n}\pi)+i\sin(\frac{m}{n}\pi)\right]\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}}{\cos(\frac{m}{n}\pi)+i\sin(\frac{m}{n}\pi)}$ となる。

分子の $\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}$ は実数、n は mを割り切らないので $sin\left(\dfrac{m}{n}\pi\right)$ が 0 となることはなく、全体としては分母によって決まり複素数となる。

例えば、$m=5,n=6$ のときは、

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^{\left(-\frac{5}{6}\right)}=\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{6}}}{cos(\frac{5}{6}\pi)+i\,sin(\frac{5}{6}\pi)}=\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{6}}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=-\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\ (\fallingdotseq -1.008-0.582i)$$

($\fallingdotseq -1.008\pm 0.582i$ という値を取り得る) のように複素数になる。



$y=x^x$のグラフ

（２） $y=x^{-x}$ --------------------------------③

$y=x^{-x}=\dfrac{1}{x^x}$ と変形すれば、この関数は$y=x^x$ の逆数であることがわかる。

$x\to 0$ のとき、yは限りなく 0 に近ずき、$x=1$ のとき、$y=1$ である。

③の両辺の対数をとると、$\ln y = -x \cdot \ln x$ --------------------------------④

④を微分して、$\dfrac{1}{y}dy = \left(-\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}\right)dx$, $\dfrac{dy}{dx} = -y\left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = -x^x(\ln x + 1)$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ とおくと、$x \neq 0$ で $x^x \neq 0$ だから $\ln x + 1 = 0$, $\ln x = -1$ より、$x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

③に $x = \dfrac{1}{e}$ を入れて、$\mathrm{y} = x^{-x} = (\dfrac{1}{e})^{(-\frac{1}{e})} = \dfrac{1}{(\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})}} = 1.4447$ (極大値)

次に、$x < 0$ の場合について、

まず負の整数の時、

$x = -1$ のとき $(-1)^1 = -1$, $x = -2$ のとき $(-2)^2 = 4$, $x = -3$ のとき $(-3)^3 = -27$ となるから、

x が負の偶数の時 $(-x)^x = x^x$, x が負の奇数の時

$(-x)^x = -x^x$ となり、偶数と奇数で正負の値が逆転を繰り返す。

負の有理数の時、例えば $x = -\dfrac{1}{2}$ のとき、$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{(2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ ($\pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$という値を取り得る)

$x = -\dfrac{1}{n}$ のとき、$\left(-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{(n)^{\frac{1}{n}}}$ $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ を用いて表すと、

$\dfrac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{(n)^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{n}}}{(n)^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\cos\frac{1}{n}\pi + i\sin\frac{1}{n}\pi}{\sqrt[n]{n}}$ となり、分母の $\sqrt[n]{n}$ は実数なので、分子によって決まり通常は複素数になる。

$x = -\dfrac{m}{n}$ (n, mは整数で n はmを割り切らない) のとき、$\left(-\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} = (-1)^{\frac{m}{n}}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}$

$(-1)^{\frac{m}{n}}$ を $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ を用いて表すと、$(-1)^{\frac{m}{n}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{m}{n}} = \cos(\dfrac{m}{n}\pi) + i\sin(\dfrac{m}{n}\pi)$

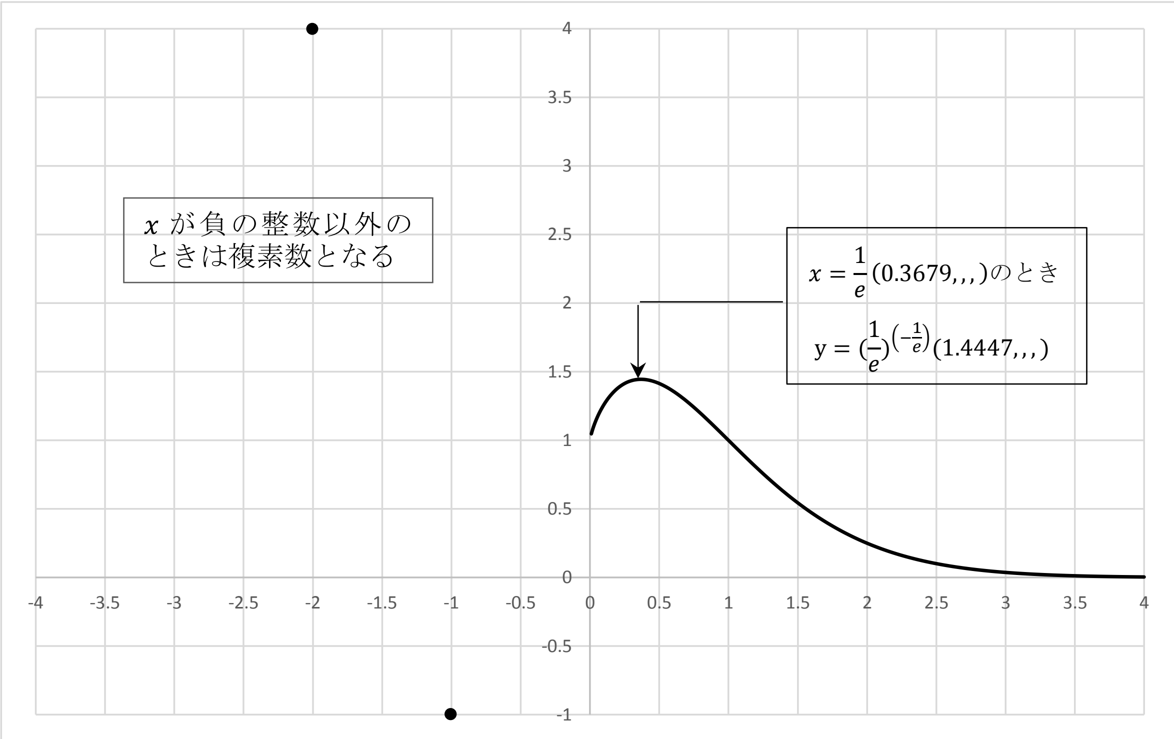
と表せるから、$(-1)^{\frac{m}{n}}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} = \left[\cos(\dfrac{m}{n}\pi) + i\sin(\dfrac{m}{n}\pi)\right]\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}$ となる。

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}$ は実数、n は mを割り切らないので $sin\left(\dfrac{m}{n}\pi\right)$ が 0 となることはなく、全体としては複素数となる。

例えば、$m = 5$, $n = 6$ のときは、

$\left(-\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}}\left[\cos(\dfrac{5}{6}\pi) + i\sin(\dfrac{5}{6}\pi)\right] = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$ $(\fallingdotseq -0.744 + 0.430i)$

$\left(\fallingdotseq -0.744 \pm 0.430i\right.$ という値を取り得る$\left.\right)$ のように複素数になる。



$y=x^{-x}$のグラフ

x^x と x^{-x} がわかったところで、次に x^x+x^{-x} と x^x-x^{-x}を考えてみた。
$y=x^x$ は $0<x\leqq\frac{1}{e}$ で減少、$x\geqq\frac{1}{e}$で増加する関数、$y=x^{-x}$ は逆に $0<x\leqq\frac{1}{e}$ で増加、$x\geqq\frac{1}{e}$ で減少する関数であった。$y=x^x+x^{-x}$ や $y=x^x-x^{-x}$ はどのようになるだろうか？

（３） $y=x^x+x^{-x}$ ---------------------------------⑤

$x^x=t$ とおくと、$y=t+\dfrac{1}{t}$， t で微分して、 $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$ ---------------------------------⑥

$x^x=t$の両辺の対数をとると、$x\cdot\ln x=\ln t$

この両辺を微分して、$\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{1}{t}dt$，これから $\dfrac{dt}{dx}=t(\ln x+1)$ ------------------------⑦

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$ だから、⑥⑦より $\dfrac{dy}{dx}=(1-\dfrac{1}{t^2})t(\ln x+1)$

$x^x=t$ を戻すと、$\dfrac{dy}{dx}=x^x(\ln x+1)(1-\dfrac{1}{x^{2x}})$ ------------------------⑧

$\dfrac{dy}{dx}=0$ とおいて、$x\neq0$ で $x^x\neq0$ だから、$\ln x+1=0$ または $1-\dfrac{1}{x^{2x}}=0$

$\ln x+1=0$ のとき $x=\dfrac{1}{e}$，$1-\dfrac{1}{x^{2x}}=0$ のとき、$x^{2x}=1$ から $x=1$ が得られる。

$x = \dfrac{1}{e}$，$x = 1$ で極値を持つことが分かった。この２点の前後でどのような状態かを見るために、⑧式に $x = \frac{1}{2e}$，$\frac{1}{2}$，2 を入れてみる。$x = \frac{1}{2e}$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = x^x(ln\,x + 1)\left(1 - \frac{1}{x^{2x}}\right) = \left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{1}{2e}} \cdot (-ln2) \cdot \left(1 - \frac{1}{(\frac{1}{2e})^{\frac{1}{e}}}\right)$$

第１項はプラス、第２項はマイナス、第３項は $(\frac{1}{2e})^{\frac{1}{e}} \leqq 1$ のためマイナスとなり、全体ではプラスとなるので、$0 < x \leqq \frac{1}{e}$ では増加する。$x = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = x^x(ln\,x + 1)\left(1 - \frac{1}{x^{2x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-ln2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{1}{(\frac{1}{2})^1}\right)$$

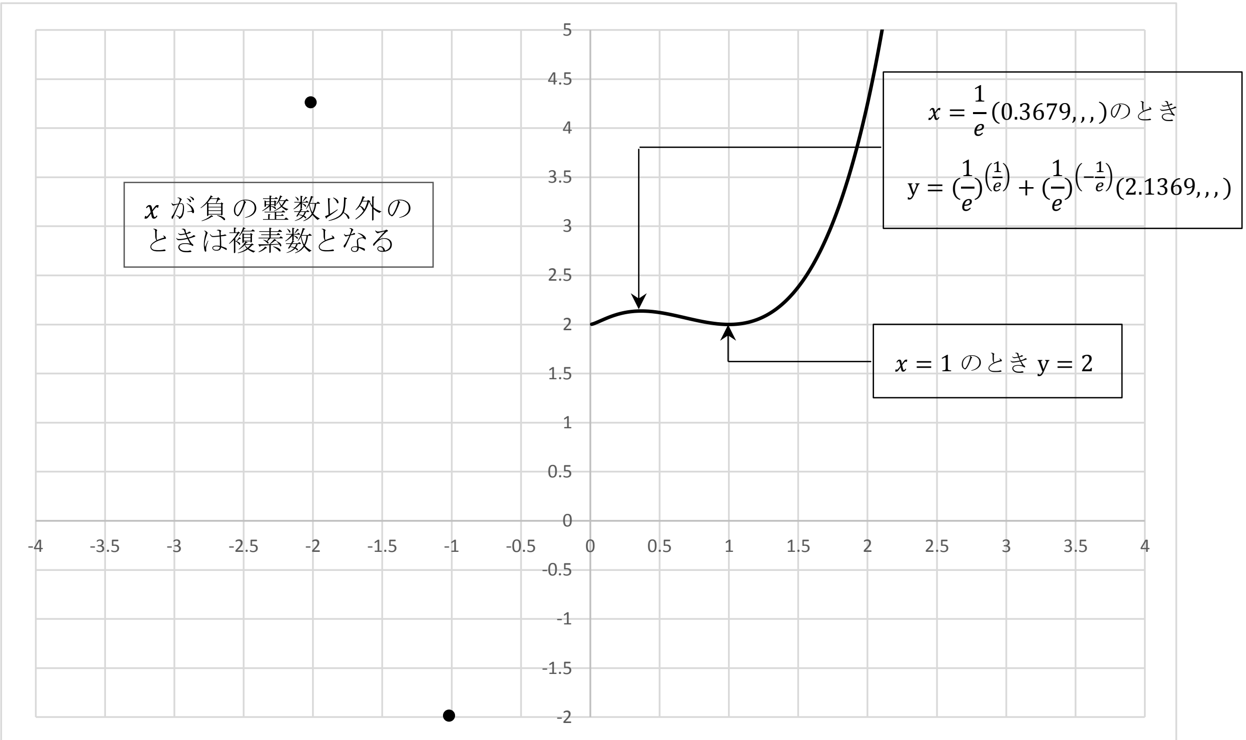
第１項はプラス、第２項はプラス、第３項はマイナスとなり、全体ではマイナスとなるので、$\frac{1}{e} < x \leqq 1$ では減少する。$x = 2$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = x^x(ln\,x + 1)\left(1 - \frac{1}{x^{2x}}\right) = 4 \cdot (ln2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)$$

第１項はプラス、第２項はプラス、第３項はプラスとなり、全体ではプラスとなるので、$x \geqq 1$ では増加する。従って、

$x = \dfrac{1}{e}$ のとき⑤に代入して $y = x^x + x^{-x} = (\dfrac{1}{e})^{(\frac{1}{e})} + (\dfrac{1}{e})^{(-\frac{1}{e})} = 2.1369,,,$（極大値）

$x = 1$ のとき⑤に代入して $y = x^x + x^{-x} = 1^1 + 1^{-1} = 2$ (極小値) となる。



$y = x^x + x^{-x}$のグラフ

$x<0$ の場合について、負の整数のときは（1），（2）でわかるように偶数と奇数で正負の値が逆転を繰り返し $y=x^x$ は $y=0$ に収束するが、$y=x^{-x}$ は$+,-$ の値で発散するため全体では発散する。
さらに x が負の有理数のときは複素数になる。

（4） $y=x^x-x^{-x}$ ---------------------------------⑨

$x^x=t$ とおくと、$\mathrm{y}=\mathrm{t}-\dfrac{1}{t}$， t で微分して、 $\dfrac{dy}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$ ---------------------------------⑩

$x^x=t$の両辺の対数をとると、$x\cdot ln\,x=ln\,t$

この両辺を微分して、$\left(ln\,x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{1}{t}dt$， これから $\dfrac{dt}{dx}=t(ln\,x+1)$ -------------------⑪

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$ だから、⑩⑪より $\dfrac{dy}{dx}=(1+\dfrac{1}{t^2})t(ln\,x+1)$

$x^x=t$ を戻すと、$\dfrac{dy}{dx}=\ x^x(ln\,x+1)(1+\dfrac{1}{x^{2x}})$ ----------------------------⑫

$\dfrac{dy}{dx}=0$ とおいて、$x\neq 0$ で $x^x\neq 0$ だから、$ln\,x+1=0$ または $1+\dfrac{1}{x^{2x}}=0$

$ln\,x+1=0$ のとき $x=\dfrac{1}{e}$，$1+\dfrac{1}{x^{2x}}=0$ のときはこれを満たす実数はない。

よって、$x=\dfrac{1}{e}$ のときのみ極値を持つことが分かった。$x=\dfrac{1}{e}$ の前後でどのような状態かを

みるために ⑫式に$x=\dfrac{1}{2e}$，1 を入れてみる。まず $x=\dfrac{1}{2e}$ のとき、

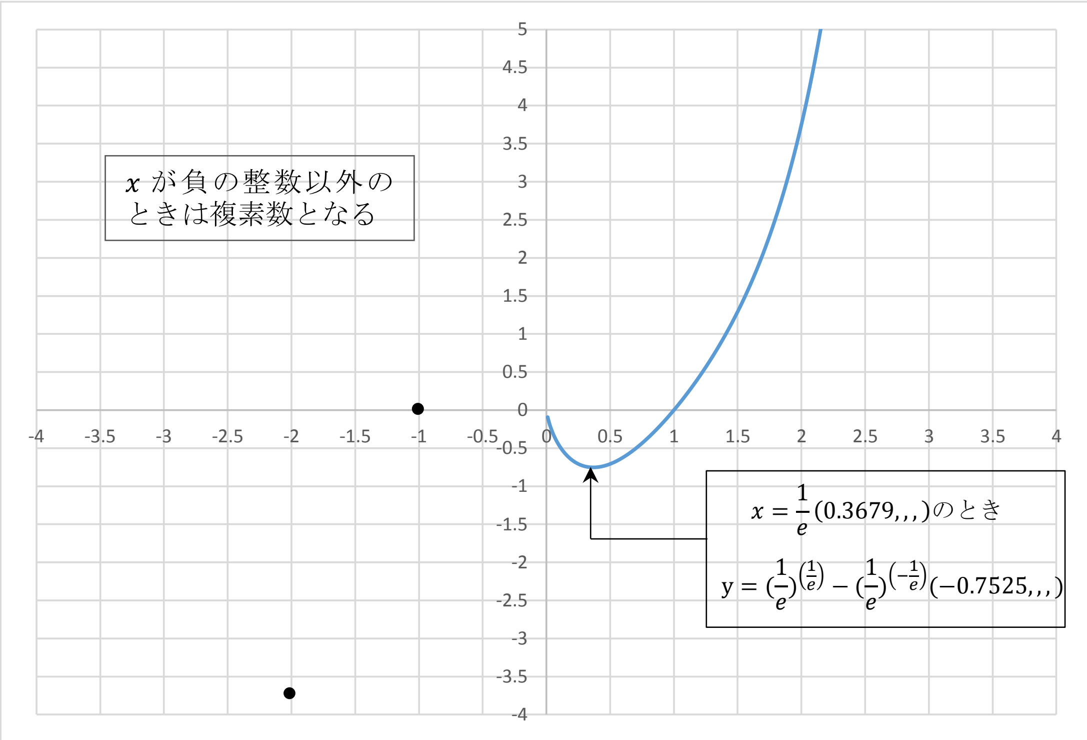
$$\frac{dy}{dx}=\ x^x(ln\,x+1)\left(1+\frac{1}{x^{2x}}\right)=\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{1}{2e}}\cdot(-ln2)\cdot\left(1+\frac{1}{(\frac{1}{2e})^{\frac{1}{e}}}\right)$$

第1項はプラス、第2項はマイナス、第3項はプラスとなり、全体ではマイナスとなるので、
$0<x\leqq\frac{1}{e}$ では減少する。次に $x=1$のとき、

$$\frac{dy}{dx}=\ x^x(ln\,x+1)\left(1+\frac{1}{x^{2x}}\right)=1\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)=4$$

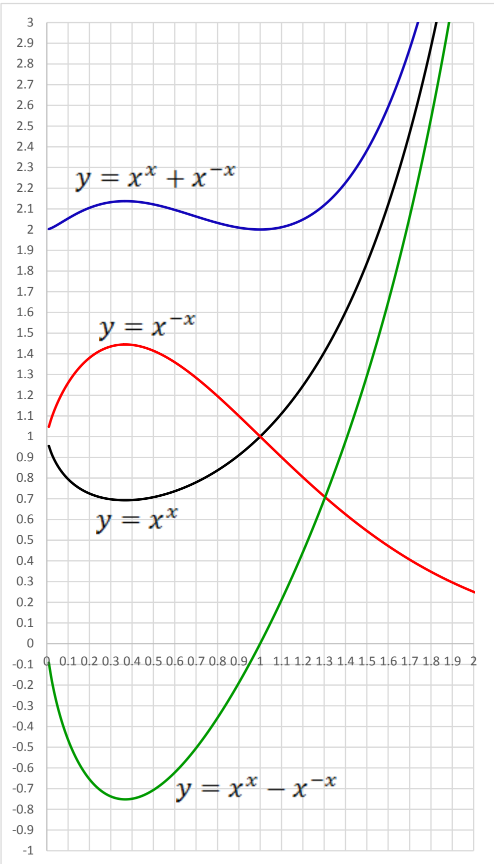
のようにプラスとなるので、$\frac{1}{e}<x$ では増加する。

$x=\dfrac{1}{e}$ のとき⑨に代入して $y=x^x-x^{-x}=(\dfrac{1}{e})^{\left(\frac{1}{e}\right)}-(\dfrac{1}{e})^{\left(-\frac{1}{e}\right)}=-0.7525$（極小値）



$y=x^x-x^{-x}$ のグラフ

（１）～（４）の表す曲線を、$x>0$ についてまとめてグラフにすると次のようになる。



２． $y = sin(sin\,x)$ ， $y = sin(cos\,x)$， $y = cos(sin\,x)$ ， $y = cos(cos\,x)$ など sin, cos の引数に「sin, cos」を含む一群の関数について

（１） $y = sin(sin\,x)$

$sin\,x$ の値は -1～1 なので、y は $sin(1)$ ～$sin(-1)$ の範囲になる。ここで 1 と－ 1 の単位は rad（ラジアン）である。180 度がπラジアンだから、１ラジアンは($\frac{180}{\pi}$)度である。

$sin\,x$ は周期関数なので、１周期について考えればよい。そこで $x = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π の x に対して $sin\,x$，$sin(sin\,x)$ の値をまとめると次の表になる。

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\,x$	0	1	0	-1	0
$sin(sin\,x)$	0	$sin(1)$	0	$sin(-1)$	0

この表から、y は周期 2πで最大値 $sin\,1(= 0.841 \ldots)$，最小値 $sin(-1)\,(= -0.841 \ldots)$ の範囲の値をとることがわかる。

（２）$y = sin(cos\,x)$

$cos\,x$ の値は－1～1 なので、y は $sin(1)$ ～$sin(-1)$ の範囲になる。

$cos\,x$ は周期関数なので、１周期 $x = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π の x について $\cos x$，$sin(cos\,x)$の値をまとめると、

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cos\,x$	1	0	-1	0	1
$sin(cos\,x)$	$sin(1)$	0	$sin(-1)$	0	$sin(1)$

この表から、y は周期 2πで最大値 $sin\,1(= 0.841 \ldots)$，最小値 $sin(-1)\,(= -0.841 \ldots)$ の範囲の値をとる。（１）（２）の周期はπ/2 ずれている。

（３）$y = cos(sin\,x)$

同じように、$x = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π のそれぞれの値に対して $sin\,x$，$cos(sin\,x)$ の値をまとめると、

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\,x$	0	1	0	-1	0
$cos(sin\,x)$	1	$cos(1)$	1	$cos(1)$	0

cos は 偶関数なので、$x = \frac{3\pi}{2}$ のときの $sin\,x = -1$ に対し、$cos\,(-1) = cos\,(1)$ となり、周期はπ で、最大値 1，最小値 $cos(1)\,(= 0.540 \ldots)$ の範囲の値をとる。

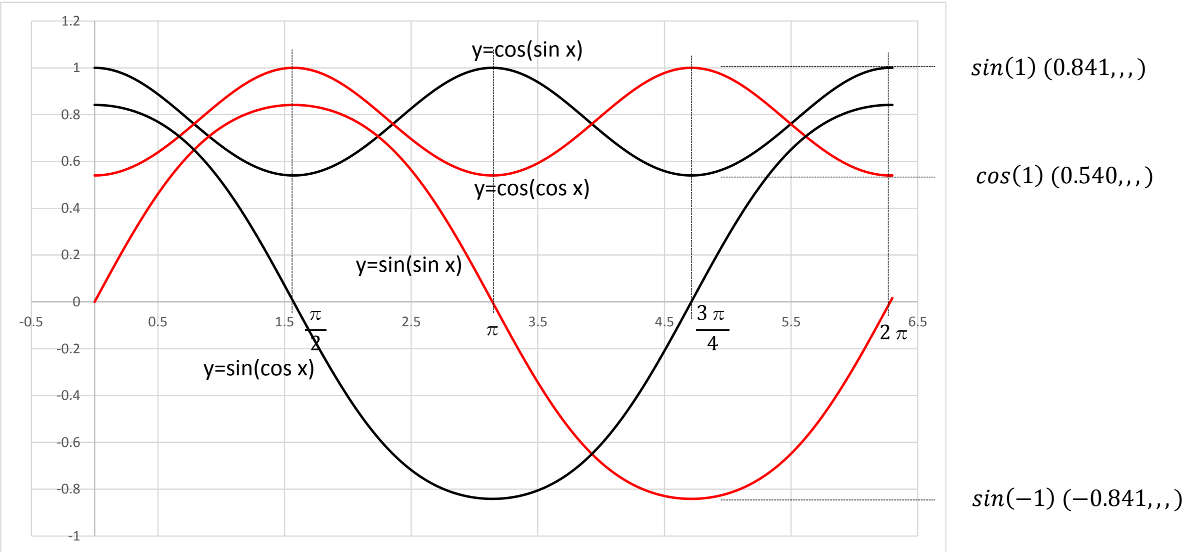
（４）$y = cos(cos\,x)$

$x = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π のそれぞれの値に対して $cos\,x$, $cos(cos\,x)$ の値をまとめると、

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cos\,x$	1	0	-1	0	1
$cos(cos\,x)$	$cos(1)$	1	$cos(1)$	1	$cos(1)$

$cos(sin\,x)$と同様に周期はπ で、最大値 1，最小値 $cos(1)\,(= 0.540\,...)$ の範囲の値をとり、周期は$cos(cos\,x)$ に対し$\pi/2$ ずれている。

$cos(sin\,x)$と$cos(cos\,x)$ は最大値が 1 なのに対し、 $sin(sin\,x)$と$sin(cos\,x)$ は最大値が 1 になることはない。（1）～（4）の曲線をグラフにすると次のようになる。



$y = sin(sin\,x)$ ，$y = sin(cos\,x)$，$y = cos(sin\,x)$ ，$y = cos(cos\,x)$ のグラフ

３．$y = e^{sin\,x}$，$y = e^{cos\,x}$ のような e のべき乗に「sin, cos」を含む関数について

（１）$y = e^{sin\,x}$ --⑬

⑬を微分して 0 とおくと、 $\dfrac{dy}{dx} = e^{sin\,x} \cdot \cos x = 0$, $e^{sin\,x} \neq 0$ だから、$cos\,x = 0$ すなわち

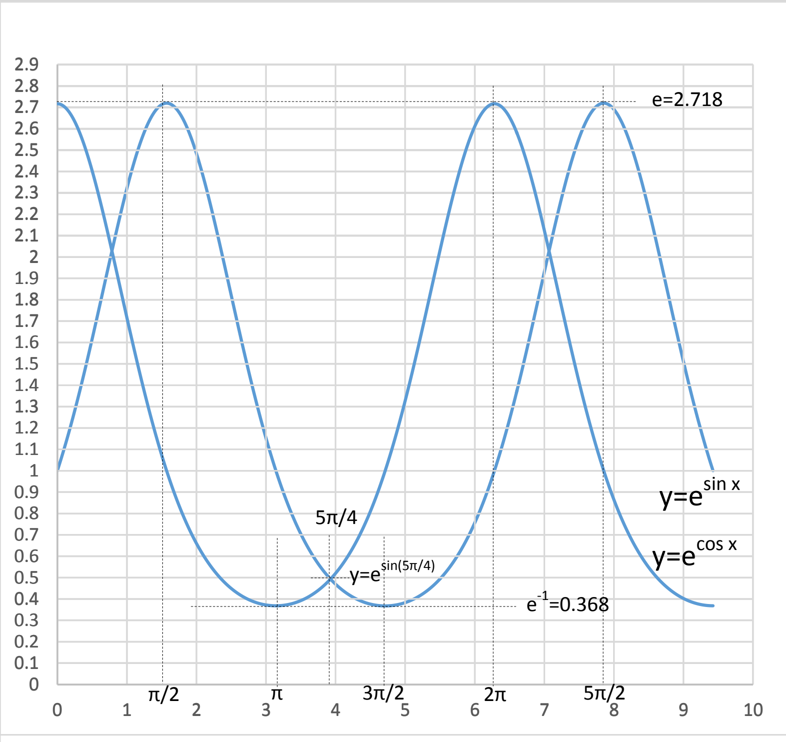
$x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$のとき極値を取りその値は、$y = e^{sin\frac{\pi}{2}} = e^1\,(2.718,,,)$，$y = e^{sin\frac{3\pi}{2}} = e^{-1}\,(0.3678,,,)$

（２）$y = e^{cos\,x}$ --⑭

⑭を微分して 0 とおくと、 $\dfrac{dy}{dx} = e^{cos\,x} \cdot (-\,sin\,x) = 0$, $e^{cos\,x} \neq 0$ だから、$sin\,x = 0$ のとき

すなわち $x = 0$, π のとき極値を取りその値は、$y = e^{cos\,0} = e^1$，$y = e^{cos\,\pi} = e^{-1}$

グラフを描くと次のようになる。



$y = e^{\sin x}$, $y = e^{\cos x}$ のグラフ

ここで気付くのは、$y = e^{sin\,x}$, $y = e^{cos\,x}$ の曲線は sin カーブに似ているようでそうではない。例えば、$y = e^{sin\,x}$ についていえば、$x = \frac{\pi}{2}$ における極大点の尖りぐあいと、$x = \frac{3\pi}{2}$ における極小点のそれが異なることである。極大点では尖っていて、極小点では丸みを持っている。もう少し具体的に調べるため、極大点及び極小点における曲率を調べてみる。

点 x における曲率 R は次の式で表される。

$$R = \frac{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''(x)|} \qquad \text{--⑮}$$

ここで、$y'(x)$, $y''(x)$ はそれぞれ１次導関数、２次導関数を表す。

$y' = e^{sin\,x} \cdot cos\,x$, $y'' = e^{sin\,x}(cos\,x^2 - sinx) = e^{sin\,x}(1 - sinx - \sin x^2)$ だから、

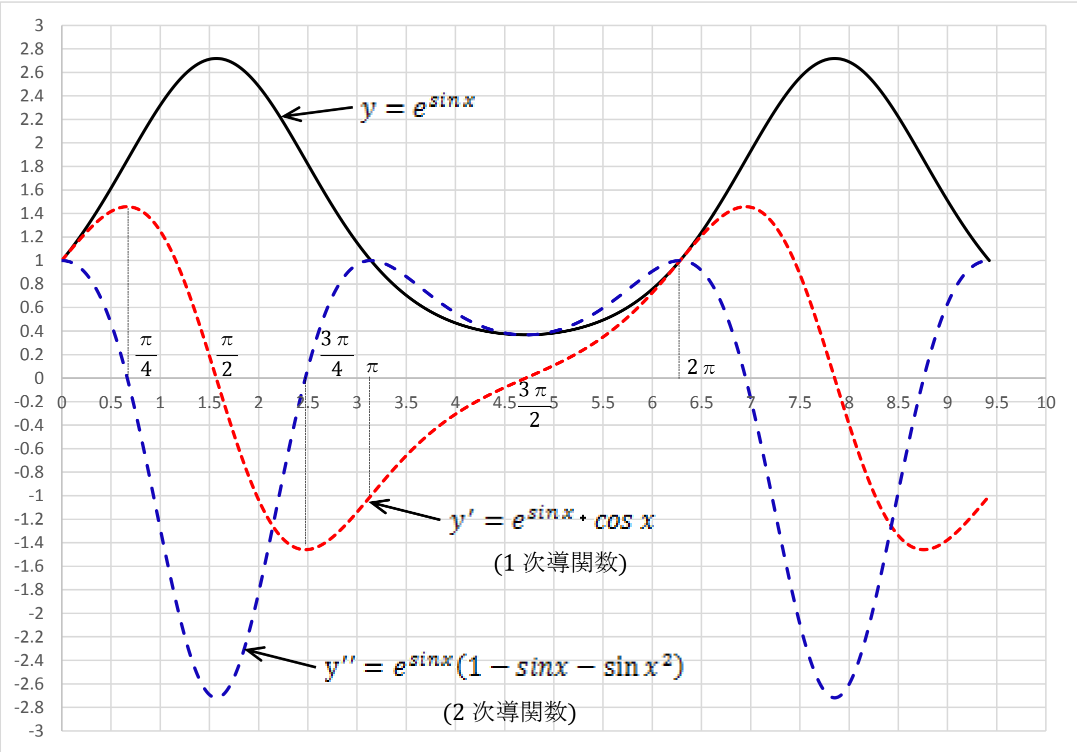
$$R = \frac{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''(x)|} = \frac{[1 + (e^{sin\,x} \cdot cos\,x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|e^{sin\,x}(1 - sinx - sin\,x^2)|}$$ で与えられる。

$x = \frac{\pi}{2}$ における曲率 $R_{\frac{\pi}{2}}$ は、 $$R_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left[1 + (e^{sin\frac{\pi}{2}} \cdot cos\frac{\pi}{2})^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|e^{sin\frac{\pi}{2}}\left(1 - sin\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}^2\right)\right|} = \frac{[1 + (e \cdot 0)^2]^{\frac{3}{2}}}{|e(1 - 1 - 1^2)|} = \frac{1}{e}$$

$x = \frac{3\pi}{2}$ における曲率$R_{\frac{3\pi}{2}}$は、$$R_{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\left[1 + (e^{sin\frac{3\pi}{2}} \cdot cos\frac{3\pi}{2})^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|e^{sin\frac{3\pi}{2}}\left(1 - sin\frac{3\pi}{2} - sin\frac{3\pi}{2}^2\right)\right|} = \frac{[1 + (e^{-1} \cdot 0)^2]^{\frac{3}{2}}}{|e^{-1}\{1 - (-1) - (-1)^2\}|} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

すなわち、極大点における曲率は $\frac{1}{e}$ 、極小点における曲率は e となり大きな差があることがわ

かる。$y = e^{sin\,x}$, $y' = e^{sin\,x}\cdot cos\,x$, $y'' = e^{sin\,x}(1 - sinx - sin\,x^2)$ のグラフを描いてみると次の通りとなる。



1 次導関数 y' は元の関数 $y = e^{sin\,x}$ の変化率を表し、さらに２次導関数 y" は y' の変化率を示している。

y' は、$x = 0 \sim \frac{\pi}{4}$ で増加率が増し、$\frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{2}$ で増加率は徐々に減り $\frac{\pi}{2}$ で増加率０、そして $\frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{4}$ で増加率がマイナス（つまり減少）になり、$\frac{3\pi}{4}$ で減少率０、$\frac{3\pi}{4} \sim \pi$ で減少率が徐々に鈍化し、さらに $\pi \sim \frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{5} \sim \frac{3\pi}{2}$ と減少率がどんどん鈍化し、$\frac{3\pi}{2}$ で増加率がプラスに転じ、$\frac{3\pi}{2} \sim 2\pi$ で再び増加率が徐々に増えていき、これを繰り返す。

y'' を見ると、$\frac{\pi}{4} \sim \frac{3\pi}{4}$ の間で y' の変化率が急激にマイナスとなっているのに対し、$\frac{3\pi}{4} \sim \frac{9\pi}{4}$ の間における y' の変化率は穏やかでマイナスになることはない。$y'' = 0$ となる点が変曲点で、

$e^{sin\,x}(cos\,x^2 - sinx) = 0$ を解けば、$e^{sin\,x} \neq 0$ だから、$cos\,x^2 - sinx = 0$ より $sinx = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

これから $x = sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0.6662,,(rad),$, $x = \pi - sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2.4754,,,(rad)$となり、

1 次導関数が最大値になるのは $x = sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, 最小値となるのは$x = \pi - sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ である。

$sin\,x < 0$ となる $x = \pi \sim 2\pi$ の間で変化が緩やかになるのは、$y = e^{sin\,x}$ の値が $\frac{1}{e^{sin\,x}}$ ($\frac{1}{e}$べき乗）となるためであり、$y = e^{sin\,x}$ の増加率、減少率は $y = e^{sin\,x}$ の指数 $sin\,x$ の値がプラスかマイナスかにより大きく左右されることが分かる。

４． $y=\sin x^{\sin x}$ ， $y=\sin x^{\cos x}$ ， $y=\cos x^{\sin x}$ ， $y=\cos x^{\cos x}$ のように $\sin,\cos$ のべき乗に「$\sin,\cos$」を含む一群の関数について

$\sin x^{\sin x}$ は $\sin^{\sin x}x$ と書くべきかも知れないが、ここでは $\sin x^{\sin x}$ と書くことにする。

（１）$y=\sin x^{\sin x}$ --⑯

前の $y=x^x$ の検討から、$x<0$ のときは x が負の整数以外は複素数となるので、$y=\sin x^{\sin x}$ の定義域は、$\sin x>1$ となる、$0<x<\pi$ $[2n\pi<x<(2n+1)\pi]$ 及び、$\sin x=-1$ となる $x=\frac{3\pi}{2}$ $\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]$ であるが、$\sin x$ は周期関数なので $0<x<\pi$ 及び $x=\frac{3\pi}{2}$ で考えれば充分である。⑯の両辺の対数を取ると、$\ln y=\sin x\cdot\ln(\sin x)$ --⑰

⑰を微分して、$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\left[\cos x\cdot\ln(\sin x)+\sin x\left\{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right\}\right]=\left[\cos x\cdot\ln(\sin x)+\cos x\right]$

$=\cos x\,[\ln(\sin x)+1]$ よって、

$\frac{dy}{dx}=y\cdot\cos x\,[\ln(\sin x)+1]=\sin x^{\sin x}\cdot\cos x\cdot[\ln(\sin x)+1]$ ， $\frac{dy}{dx}=0$ とおくと、

$\sin x^{\sin x}=0$ ， または $\cos x=0$ ， または $\ln(\sin x)+1=0$

① $\sin x^{\sin x}=0$ の場合、$x=0,\ \pi$ のとき $\sin x=0$ となるが、0^0 となり不定形なので $\sin x^{\sin x}\neq 0$ と考える。

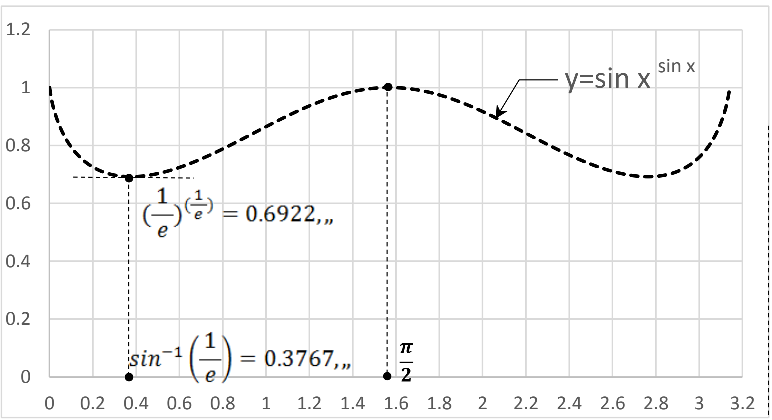
② $\cos x=0$ の場合、$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$ これを⑯に代入すると、$y=\sin(\frac{\pi}{2})^{\sin(\frac{\pi}{2})}=1^1=1$ （極大値）

$y=\sin(\frac{3\pi}{2})^{\sin(\frac{3\pi}{2})}=(-1)^{(-1)}=\frac{1}{(-1)^1}=-1$

③ $\ln(\sin x)+1=0$ の場合、 $\ln(\sin x)=-1$ から、 $\sin x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ これを満たす x は

$x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$ から $x=0.3767,,,(rad)$ $(\fallingdotseq 21.6^\circ)$

$\sin x=\frac{1}{e}$ を⑯に代入すると、$y=(\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})}=0.6922,,,$ （極小値）



$y=\sin x^{\sin x}$ のグラフ

（２）$y = \sin x^{\cos x}$ --⑱

$\sin x < 0$ のときは $\sin x$ が負の整数、つまり-1 以外は複素数となるので、

$y = \sin x^{\cos x}$ の定義域は、$\sin x \geqq 0$ となる、$0 \leqq x \leqq \pi$ $[2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi]$ と、$\sin x = -1$

となる $x = \frac{3\pi}{2}$ $\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]$ であるが、$\sin x$ は周期関数なので $0 \leqq x \leqq \pi$ 及び $x = \frac{3\pi}{2}$ で考えれば

よい。

⑱の両辺の対数を取ると、$\ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x)$ --⑲

⑲を微分して、$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \left\{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right\}\right]$

$= \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$ よって、

$\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x} \cdot \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$ $\frac{dy}{dx} = 0$ とおくと、

$\sin x^{\cos x} = 0$ ，または $-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = 0$

① $\sin x^{\cos x} = 0$ の場合 $x = 0, \pi$ 、これを⑱に代入すると、$y = \sin(0)^{\cos(0)} = 0^1 = 0$

これは極値ではない。

② $-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = 0$ の場合、$\sin x \cdot \ln(\sin x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ より、

$\ln(\sin x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$, $\sin x = e^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$

$\sin x = e^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} = e^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)} = e^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot e^{-1}$ から、$e \cdot \sin x = e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

$\frac{1}{\sin x} = t$ とおくと、$e \cdot \frac{1}{t} = e^{t^2}$ 両辺の対数を取って、$1 - \ln t = t^2$ これを解いて $t = 1$

$\frac{1}{\sin x} = t = 1$ だから、$x = \frac{\pi}{2}$ これを⑱に代入して、$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1^0 = 1$

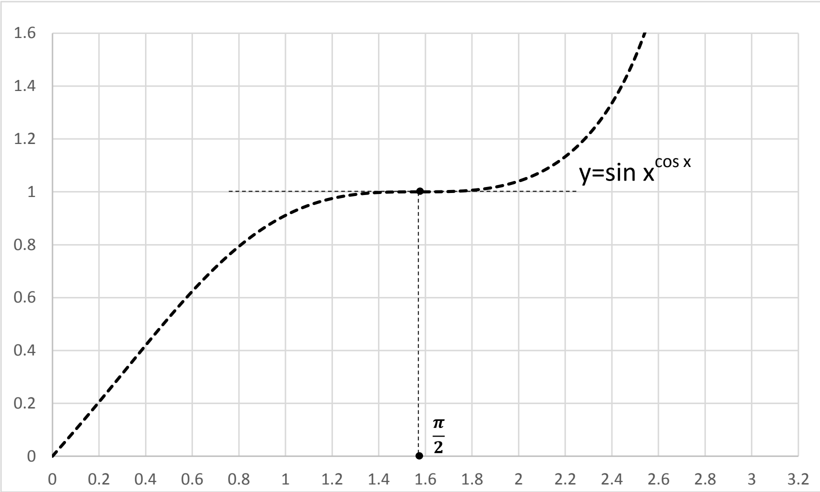
$y = \sin x^{\cos x}$ の２次導関数を求めると、

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x^{\cos x} \cdot \left[\left\{-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}^2 - \cos x \cdot \left\{2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \ln(\sin x)\right\}\right]$ と非常に複雑

な式になるが、この式に$x = \frac{\pi}{2}$ を入れて計算すると $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ となり、$x = \frac{\pi}{2}$ は変曲点であること

がわかる。

また、⑱式に $x = \pi$ を入れると $y = \sin \pi^{\cos \pi} = 0^{-1} = \frac{1}{0^1} = \infty$ となり $x = \pi$ で発散する。



$y = sin\,x^{cos\,x}$ のグラフ

（3）$y = cos\,x^{sin\,x}$ --⑳

$y = sin\,x^{cos\,x}$ の定義域が $0 \leqq x \leqq \pi$ なので、$y = cos\,x^{sin\,x}$ を $y = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ と変形すれば、その定義域は $\frac{\pi}{2}$ ズレて$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ となることがわかる。

また、⑳式に$x = \frac{\pi}{2}$ を入れて計算すると、$y = cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0^1 = 0$

$x = -\frac{\pi}{2}$ を入れて計算すると、$y = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0^{-1} = \frac{1}{0^1} = \infty$ となるので、

$y = cos\,x^{sin\,x}$ は $y = sin\,x^{cos\,x}$ と対称である。

$cos\,x^{sin\,x} = sin\,x^{cos\,x}$ を解くと $x = \frac{\pi}{4}$，よって２つの曲線は $x = \frac{\pi}{4}$ で交わり、で線対象であることが分かる。

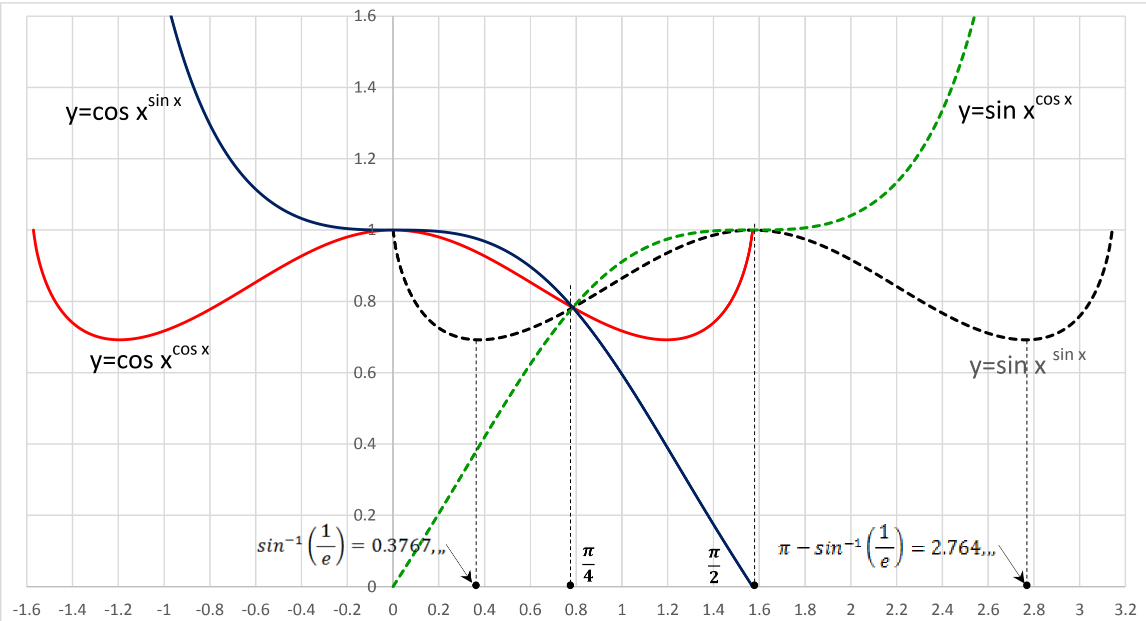
（4）$y = cos\,x^{cos\,x}$ --㉑

$y = sin\,x^{sin\,x}$ の定義域が $0 \leqq x \leqq \pi$ なので、$y = cos\,x^{cos\,x}$ を $y = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ と変形すれば、その定義域は $\frac{\pi}{2}$ ずれて$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ であり、$y = sin\,x^{sin\,x}$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ移動した関数であることがわかる。

三角関数のべき乗に三角関数を持つ関数を考えてみたが、これら一連の関数においては、負数の領域において被乗数，べき乗数の両方が負の整数以外では複素数になることから、$y = sin\,x^{sin\,x}$ と $y = sin\,x^{cos\,x}$ では $0 < x < \pi$ のとき、$y = cos\,x^{cos\,x}$ と $y = cos\,x^{sin\,x}$ では $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき実数の値をとる関数である。

$y = sin\,x^{sin\,x}$ と $y = cos\,x^{cos\,x}$ については、$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\,x$，$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\,x$ という関係にあるので、それぞれ $\frac{\pi}{2}$ の平行移動、かつ縦軸に対して対称となっている。

また、$y = sin\,x^{cos\,x}$ と $y = cos\,x^{sin\,x}$ については、（２），（３）で分かるように鏡対称となっており、４種類すべての曲線が$sin\,x = cos\,x$ となる $x = \frac{\pi}{4}$ において１点で交わっている。
（１）～（４）の表す曲線をまとめてグラフにすると次のようになる。

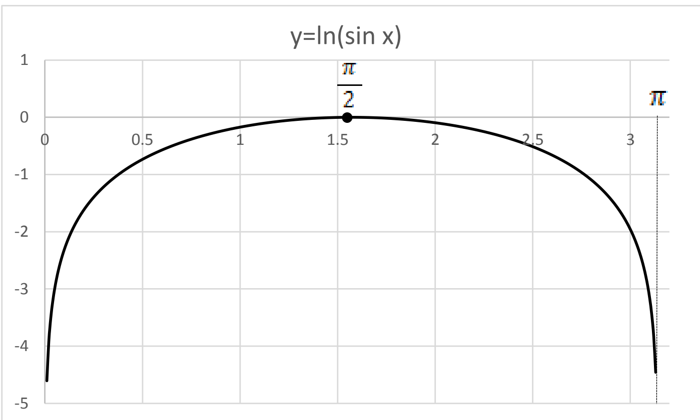


$y = sin\,x^{sin\,x}$， $y = sin\,x^{cos\,x}$， $y = cos\,x^{sin\,x}$， $y = cos\,x^{cos\,x}$ のグラフ

５． 最後に三角関数と対数関数を組み合わせるとどうなるのか？
（１）$y = ln(sin\,x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sin\,x}$・$cos\,x = 0$ より、$x = \frac{\pi}{2}$ のとき極値$(y = 0)$を持つ。 ln 関数はマイナスの引数では複素数となり、$0 < sin\,x \leqq 1$ のときだけ実数値となる。そして $sin\,x \leqq 1$ であることから、その値は正の数となることはなく、すべてマイナスの値で最大値が０である。

$sin\,x$ が周期関数なので、$y = ln(sin\,x)$ も周期関数となり、$x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ で最大値を持つ。



$y = ln(sin\,x)$ のグラフ（$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲のみ示す）

（１）$y = sin(ln\,x)$

$\dfrac{dy}{dx} = cos(ln\,x)$・$\dfrac{1}{x} = 0$ より、$ln\,x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $x = e^{\frac{\pi}{2}}(= 4.8104,,,,)$ のとき極値$(y = 1)$

$x = e^{-\frac{\pi}{2}}(= 0.2078,,,,)$ のとき極値$(y = -1)$ を持つ。

$sin\,x$ が周期関数なので、$y = sin(ln\,x)$ も周期関数となり、$x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ で極値を持つが、

指数関数の特性からその周期は非常に大きく、かつ e^{π} 倍で周期が拡大する。

例えば y 軸と交差する $sin(ln\,x) = 0$ となる x をみると、

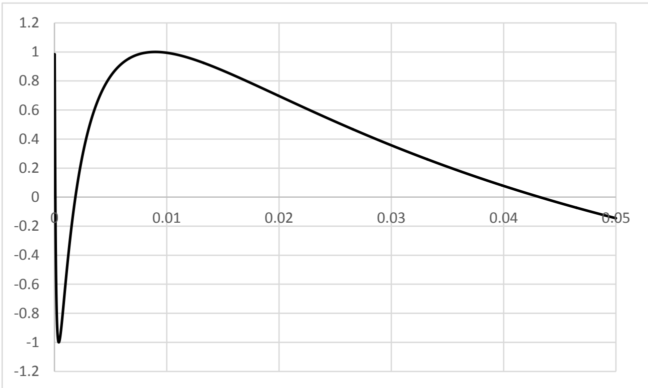
$ln\,x = n\pi$ から $x = e^{n\pi}$ となり、$n = -3$， -2， -1，0，1，2，3 とするだけでも、

$x = e^{-3\pi} = 8.069,,,\times 10^{-5}$，$x = e^{-2\pi} = 0.00187,,,$ ，$x = e^{-\pi} = 0.0432,,,$ ，$x = e^{0} = 1$

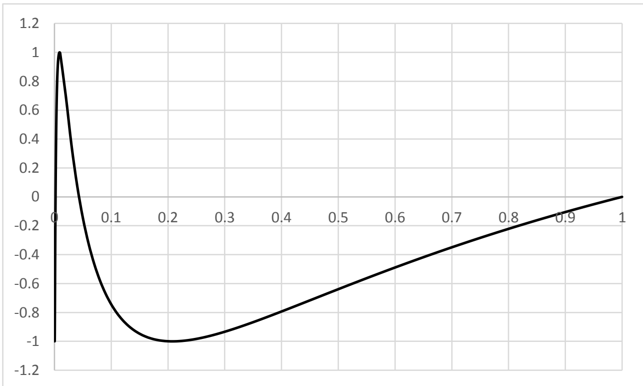
$x = e^{\pi} = 23.14,,,$ ，$x = e^{2\pi} = 535.49,,,$ ，$x = e^{3\pi} = 12391.6,,,$

というように、文字通り指数関数で増加する壮大な関数である。

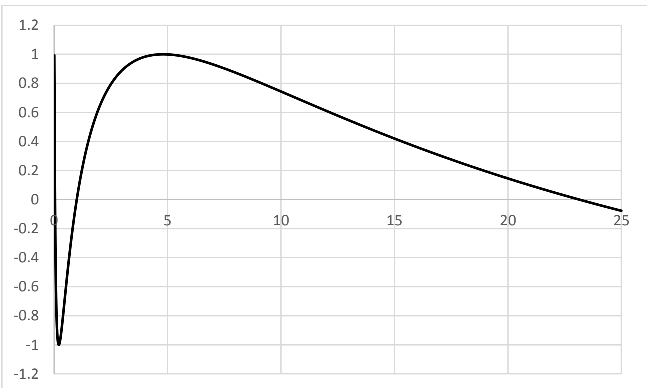
$y = ln(sin\,x)$ のグラフ
$x = 0 \sim 0.05$



$y = ln(sin\,x)$ のグラフ
$x = 0 \sim 1$

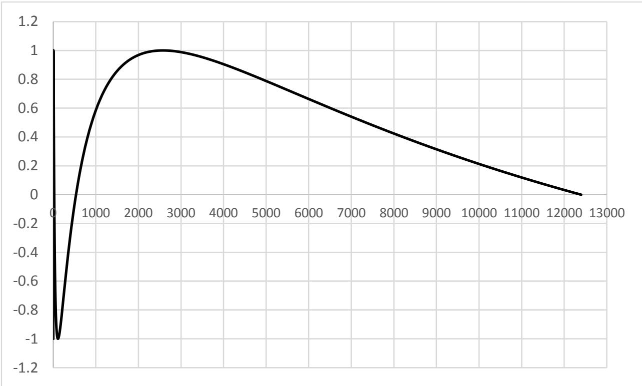


$y = ln(sin\,x)$ のグラフ
$x = 0 \sim 25$



$y = ln(\sin x)$ のグラフ

$x = 0 \sim 13000$



ここにあげた以外にも、$\sin h(\sin x)$（双曲線関数と三角関数の組み合わせ）や $x^{\sin x}$ といった関数など、いろいろ考えられるが概ねその特徴が理解できたのでここまでとしたい。

追 記

$y = x^x$ で x が負数の時は整数以外すべて複素数となり、偶数と奇数で正負の値が逆転する離散した点しか存在しないことが気になっていた。

そこで、複素数の領域に踏み込んでどうなっているのか考えてみた。

x が負の数のとき、$-x = (-1)\cdot x = (cos\,\pi + i\,sin\,\pi)\cdot x$、$\big($ただし $x > 0$ ［以下同じ］$\big)$ と表せるので、

$$y = (-x^{-x}) = \left[(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)\cdot x\right]^{-x} = \frac{1}{\left[(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)\cdot x\right]^{x}} = \frac{1}{x^x(cos\,\pi x + i\,sin\,\pi\,x)} \qquad \text{---------①}$$

となる。この式で虚数項が 0 になるのは、$sin(\pi x)$ が 0 となる $x = 1,2,3,,,,$ の場合である。

① の分母，分子に $(cos\,\pi x - i\,sin\,\pi\,x)$ を掛ければ、$y = \dfrac{1}{x^x}(cos\,\pi x - i\,sin\,\pi\,x)$ -------------------②

と変形できる。

① 式により、－5～0 の x について 0.1 間隔で y の値を計算してみると次の表になる。

x	$y = x^x$		
0	−		
−0.1	1.1973092164164+0.389029346894876i	−2.6	−0.0257662762882875+0.0793004443467717i
−0.2	1.11622474376532+0.810984747157389i	−2.7	−0.0402287485008341+0.0553701221197302i
−0.3	0.843494604411497+1.16097072352697i	−2.8	−0.0452809111097639+0.0328985076280738i
−0.4	0.445818788708466+1.37208914657146i	−2.9	−0.0433762628171153+0.0140938021382559i
−0.5	8.66310780426105E−17+1.41421356237309i	−3	−0.037037037037037+1.36127606100958E−17i
−0.6	−0.419847540942648+1.2921578648827i	−3.1	−0.0285092028861842−0.00926320154162122i
−0.7	−0.754484039890876+1.03845819178985i	−3.2	−0.01956490367081−0.0142147345731717i
−0.8	−0.967131781117888+0.702662369212031i	−3.3	−0.0114320123170071−0.0157348150677323i
−0.9	−1.0456541539073+0.339753630052236i	−3.4	−0.00481896804140973−0.0148312586072204i
−1	−1+1.22514845490862E−16i	−3.5	−5.34587261364842E−18−0.0124669967072851i
−1.1	−0.856395490689254−0.278259762689983i	−3.6	0.00307109578058009−0.00945186092497974i
−1.2	−0.65004010132255−0.472281778519745i	−3.7	0.00464378715855999−0.00639162468755817i
−1.3	−0.417919203255156−0.575216435578113i	−3.8	0.00506733921358772−0.00368163744250071i
−1.4	−0.192931488128467−0.593782064815702i	−3.9	0.00471036279608557−0.00153048964885092i
−1.5	−1.00032952456178E−16−0.544331053951818i	−4	0.00390625−1.91429446079472E−18i
−1.6	0.145676799613095−0.448347087917601i	−4.1	0.00292275567874408+0.000949660887300521i
−1.7	0.238481952640598−0.328242247973181i	−4.2	0.00195123970604999+0.00141765862877799i
−1.8	0.280845283916396−0.204046042555001i	−4.3	0.00110995232771006+0.00152771831644502i
−1.9	0.280914711461701−0.0912747227154906i	−4.4	0.000455817072521399+0.00140286070006253i
−2	0.25−6.1257422745431E−17i	−4.5	6.33789322671135E−19+0.00114959188121575i
−2.1	0.200237680834813+0.0650611664312291i	−4.6	−0.000276246216349974+0.000850198432267281i
−2.2	0.142766971434876+0.103726276341964i	−4.7	−0.000407716937103716+0.000561174220899437i
−2.3	0.0865455341030219+0.11911970843692i	−4.8	−0.000434509929208394+0.000315689942410499i
−2.4	0.0377985712281177+0.116332040397524i	−4.9	−0.000394680376122329+0.000128239427919068i
−2.5	3.09940767147787E−17+0.101192885125388i	−5	−0.00032+1.96023752785379E−19i

表 1

複素数の計算は、Excel のエンジニアリング関数を使えば計算できる。

表 1 の数値で末尾に i とあるのは虚数単位、同様に “E-16” “E-17” などとあるのは$\times 10^{-16}$，$\times 10^{-17}$ のことで、非常に小さい値なので 0 と考えてよい。

表１の値を計算するために使った式は下記の式である。

x^x = IMDIV(1,IMPRODUCT(COMPLEX(COS((x)*PI( )),SIN((x)*PI())),(−x)^(− x)))

それぞれ次のような関数である。

（A）(COMPLEX(COS((x)*PI( )),SIN((x)*PI()) --------- $= cos(\pi x) + i\, sin(\pi x)$

$cos(\pi x)$ と $sin(\pi x)$ から comlex 関数により複素数を形成する。$complex(a,b) = a + bi$

（B）IMPRODUCT(【$cos(\pi x) + i\, sin(\pi x)$】,(−x)^(− x)) ---- $= x^x \cdot [cos(\pi x) + i\, sin(\pi x)]$

x の(−)符号を(+) に変え、(A)でできた複素数に $improduct$ 関数により x^x を掛ける。

（C）IMDIV$(1, x^x \cdot [cos(\pi x) + i\, sin(\pi x)])$ ---------------- $= \frac{1}{x^x \cdot [cos(\pi x) + i\, sin(\pi x)]}$

(B)の逆数を作れば、それが求める y である。

$imdiv$関数 は複素数の割り算を行う関数。

$imdiv(a + bi, c + di) = (a + bi)/(c + di)$

表１を見ると当然のことながら、$x =-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ ではすべて実数であり、偶数でプラス，奇数でマイナスの値。$x =-0.5,\ -1.5,\ -2.5,\ -3.5,\ -4.5$ のときはすべて純虚数で、プラスとマイナスの値が交互になっている。それを表２にまとめた。それら以外の場合はすべて複素数である。

−1	−1	−0.5	1.4142 i
−2	0.25	−1.5	−0.5443 i
−3	−0.037	−2.5	0.1012 i
−4	0.0039	−3.5	−0.0124 i
−5	−0.00032	−4.5	0.0012 i

表２

（図１）横軸 x に対する実数部分のグラフ

② 式より実部は $\frac{1}{x^x} cos\, \pi x$ と表されるので、x が（ー）で増大するとともに周期的に±に振れながら減衰する。

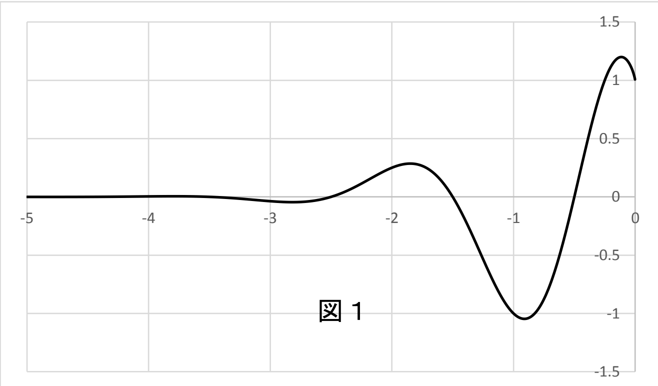


図１

（図２）横軸 x に対する虚数部分のグラフ

② 式より虚部は $-\frac{1}{x^x} sin\, \pi x$ と表されるので、x が（ー）で増大するとともに周期的に±に振れながら減衰する。

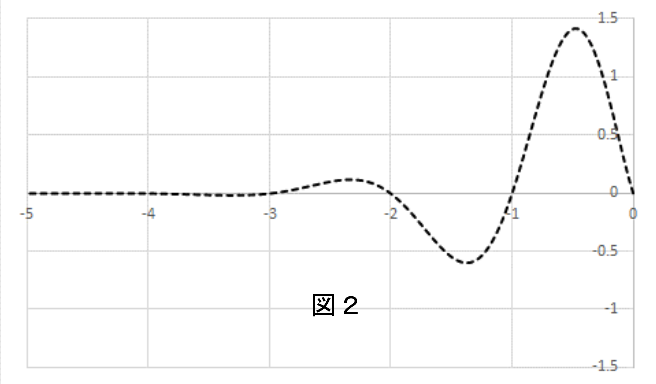


図２

それぞれを重ねてみると次のようになる。

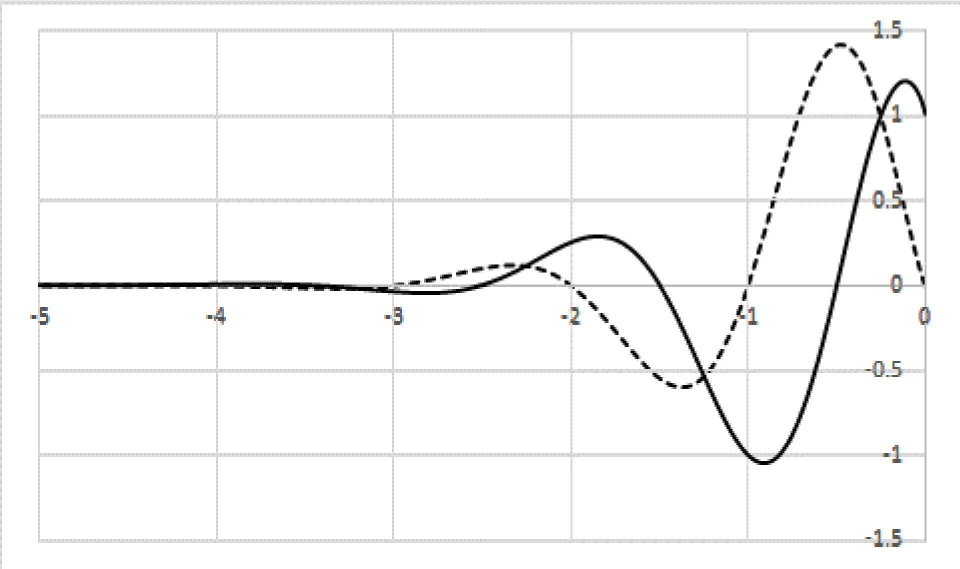


図３

x がマイナスで大きくなると、$\frac{1}{x^x}$ の値が急激に小さくなるため y は０に収束する。

ガウス平面（x 軸を実数，y 軸を虚数）にプロットしてみると螺旋が現れた。

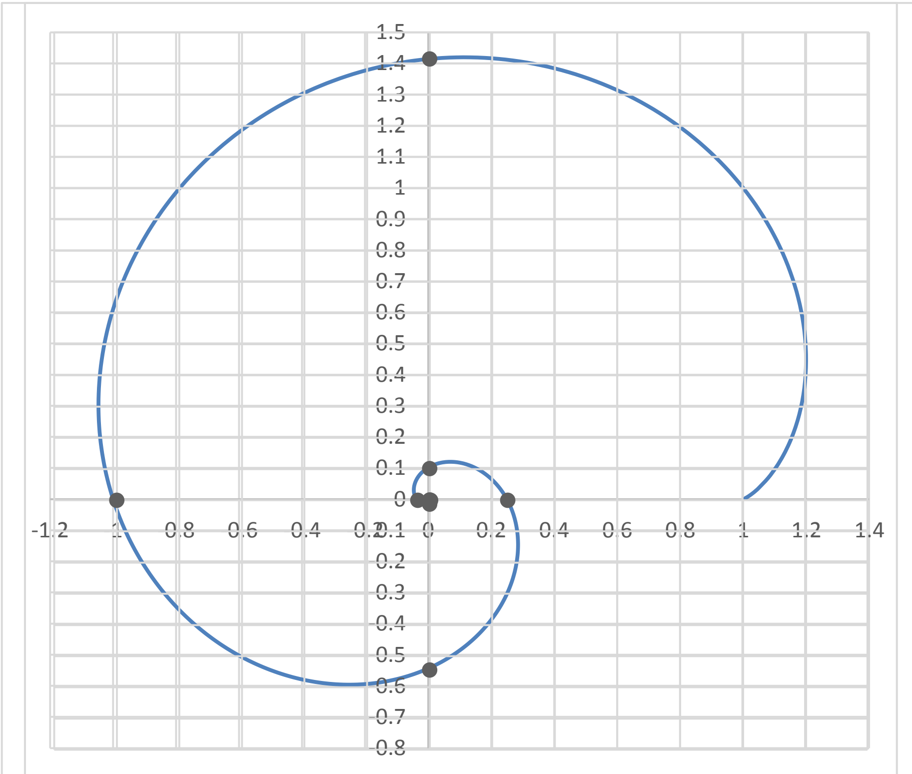


図４

表２でも分かるとおり、$x = -1$，-2，-3，-4，-5 の点はすべて x 軸上に並び、$x =-0.5$，-1.5，-2.5，-3.5，-4.5 の点はすべて y 軸上に並んでいる。

②式 $\dfrac{1}{x^x}(\cos\pi x - i\sin\pi x)$ を実部と虚部に分解すると、

実部 $= \dfrac{1}{x^x}\cos\pi x$， 虚部 $= -\dfrac{1}{x^x}\sin\pi x$ となり、x の代わりに新しい媒介変数を t として

ガウス平面で描くために新たに実部を x 、虚部を y と置き換えると、

$x = \dfrac{1}{t^t}\cos\pi t$ ， $y = -\dfrac{1}{t^t}\sin\pi t$ となり、それぞれの両辺を二乗して加えると、

$$x^2+y^2 = \frac{1}{t^{2t}}\cos^2\pi t + \frac{1}{t^{2t}}\sin^2\pi t = \frac{1}{t^{2t}}(\cos^2\pi t + \sin^2\pi t) = \frac{1}{t^{2t}}$$

$$x^2+y^2 = \left(\frac{1}{t^t}\right)^2 \qquad \text{------------------------------------③}$$

図４の曲線の方程式を得るには t を消去すればいいが難しい。
③を見ると、この式は $\frac{1}{t^t}$ を半径とする円の方程式であることが分かる。ただし $\frac{1}{t^t}$ は定数ではなく変数なので、半径が $\frac{1}{t^t}$ に従い変化する。その状況が図４に示されているように、（１， ０）の点からスタートし、徐々に反時計回りで半径が小さくなり最終的には０になるため、螺旋状の曲線になっているのである。

この螺旋は媒介変数を用いて、$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$， $y = a(\sin\theta + \theta\cos\theta)$ と表されるインボリュート曲線（図５）や、極座標を用いて $y = a\theta$ あるいは媒介変数を用いて $x = \theta\cos\theta$ ， $y = \theta\sin\theta$ と表される螺旋（図６）とも異なる曲線である。

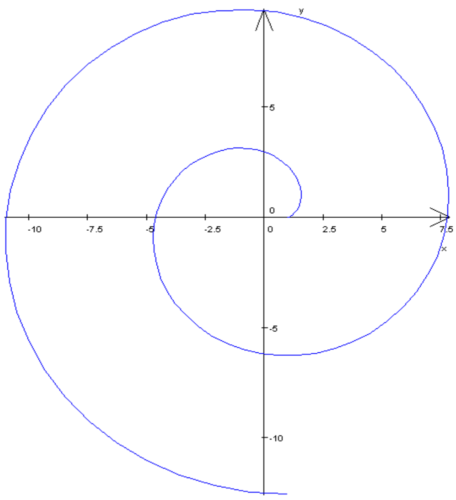


図５

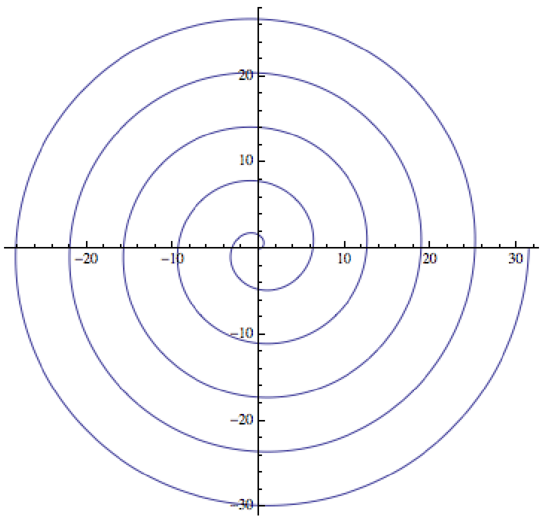


図６

（２０１９．０２．１１）