７２「楕円を回転させると」

「２つの直交する楕円の共通部分の面積」を求める問題は初歩的な問題で、以下のように比較的簡単に解ける。

【解 答】

図１において、ＡＢＣＤの面積を求める問題である。

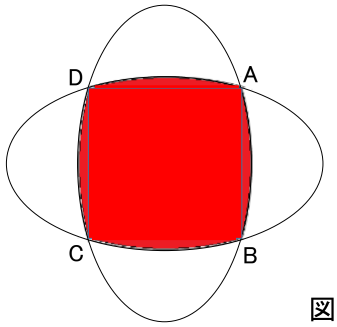

図１

図２で、楕円Ⅱとｘ軸との交点をＰ、点Ａからｘ軸に下した垂線をＡＥ，ｙ軸に下した垂線をＡＦとする。

求める面積Ｓは、Ｓ＝８×ＡＥＰ＋４×ＡＥＯＦである。

楕円Ⅰ，Ⅱの長辺をa，短辺をｂとしてそれぞれ方程式で表すと、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

楕円Ⅰ，Ⅱの交点はＡは、①②を解いて、

$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ であるから、

求める面積は次の式で表される。

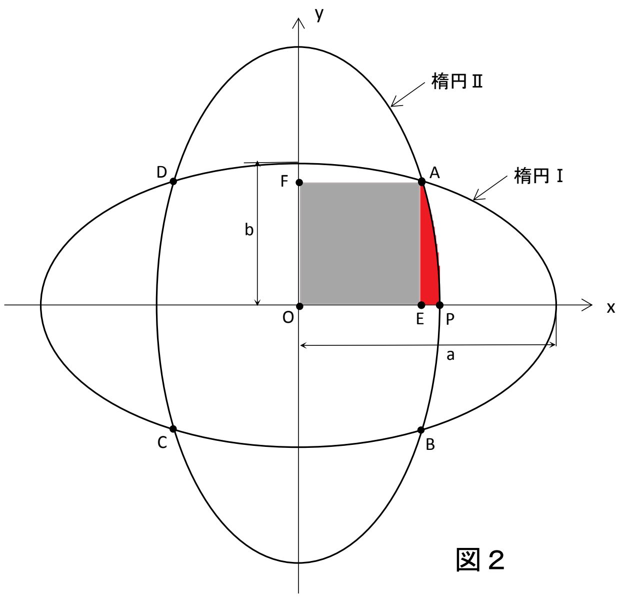

図２

$$S=4\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+8\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\,dx\cdots\cdots ③$$

③の第２項 $\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\,dx$ については、

$x=b\,sin\,t$ とおき置換積分を用いると、積分範囲は$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\to sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$b\to\frac{\pi}{2}$となるので、

$$\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\,dx=\int_{sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_{sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t+1)dt$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2}sin\,2t+t\right]_{sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\left[sin\,t\,cos\,t+t\right]_{sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{ab}{a^2+b^2}-tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

よって、

$$S=4\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+4ab\left[\frac{\pi}{2}-\frac{ab}{a^2+b^2}-tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right]=2ab\left[\pi-2\,tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right]\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ において、$\alpha=tan^{-1}u$，$\beta=tan^{-1}v$ とおくと、

$u = \tan\alpha$， $v = \tan\beta$ なので $\tan(\tan^{-1}u - \tan^{-1}v) = \dfrac{u-v}{1+uv}$ より $\tan^{-1}u - \tan^{-1}v = \tan^{-1}\dfrac{u-v}{1+uv}$

同様に $\tan^{-1}u + \tan^{-1}v = \tan^{-1}\dfrac{u+v}{1-uv}$ が導かれる。この等式を④に適用して、

$$\pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = 2\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right] = 2\left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right] = 2\tan^{-1}\frac{\infty - \left(\frac{a}{b}\right)}{1+\infty\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{1-0}{0+\left(\frac{a}{b}\right)} = 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

よって、$S = 2ab\left[\pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right] = \underline{\underline{4ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}}$ とシンプルな式で表すことができる。

ここからが本題である。

「２つの直交する楕円」でなく、一方を**「４５°傾いた楕円」**にした場合はどうなるか？

これはかなりの難問である。

今度は図３に示すような、ひし形を少し膨らませたような図形ＡＢＣＤの面積を求める問題となる。図を良く見ると面積を求めるべき図形は、ちょうど 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ の半分、22.5° $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 回転させた軸に対称になっていることがわかる。このことを利用して、ＡＤＯの面積を求めそれを４倍することで求める面積を計算することができる。図４は 22.5° 回転させた軸ＡＣを −22.5° 回転させ x 軸に一致させた図である。

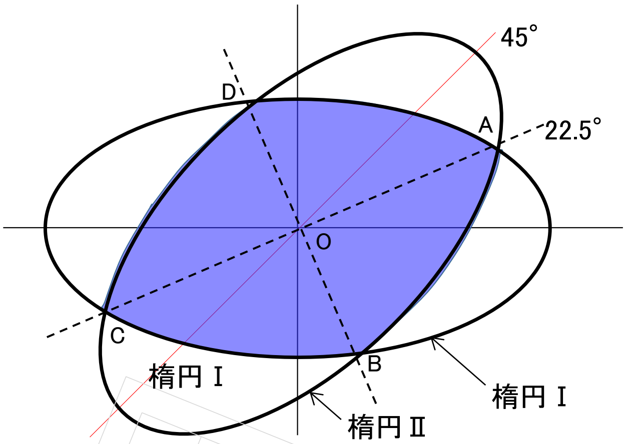

図３

新しい座標をＸ－Ｙ座標とすると、この座標において楕円Ｉは次のように表される。

座標を回転させたときの関係は次のように回転行列で表され、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \end{aligned}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで、θ は $\frac{\pi}{8}$ であり $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}{2}$ であるから、これを⑤に入れると

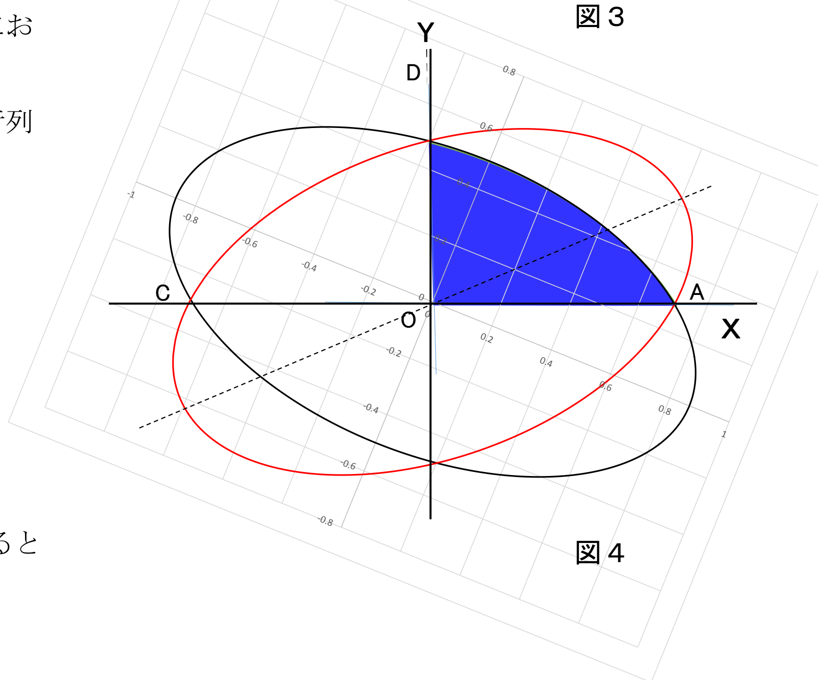

図４

$$x=\frac{\sqrt{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}}{2}X-\frac{\sqrt{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}}{2}Y \qquad y=\frac{\sqrt{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}}{2}X+\frac{\sqrt{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}}{2}Y$$

となる。これを①に代入して整理し、XとYの関係を導くと、

$$Y=\frac{-(a^2-b^2)x\pm\sqrt{2}\,ab\sqrt{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]-4x^2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥とX軸との交点は、⑥においてY＝０として方程式を解くと、

$$X=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}$$ となる。以上から求める面積をＳとすると、

$$\frac{S}{4}=\int_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}\left[\frac{-(a^2-b^2)x+\sqrt{2}\,ab\sqrt{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]-4x^2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\right]dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}\left[\frac{-(a^2-b^2)x}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\right]dx$$

$$+\int_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}\left[\frac{\sqrt{2}\,ab\sqrt{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]-4x^2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\right]dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦の第一項は、

$$=\left[\frac{-(a^2-b^2)}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-(a^2-b^2)}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}=\frac{-\sqrt{2}\,a^2b^2(a^2-b^2)}{a^4+6a^2b^2+b^4}\cdots⑧$$

⑦の第二項は次の積分公式を用いて、

$$\int\sqrt{a-b\,x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a-b\,x^2}+\frac{a}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a-b\,x^2}}\right)\right]$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}\left[\frac{\sqrt{2}\,ab\sqrt{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]-4x^2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\right]dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,ab}{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2}\int_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}\sqrt{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]-4x^2}\,dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨の積分の部分のみを計算すると、

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}} \sqrt{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2\right]-4x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}\left(\sqrt{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]-4\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}\right)\right]$$

$$+\frac{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{2}\,tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2\left[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2\right]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}{\sqrt{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]-4\frac{2\sqrt{2}\,a^2b^2[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{a^4+6a^2b^2+b^4}}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2ab[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2](a^2-b^2)}{a^4+6a^2b^2+b^4}+\frac{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{2}tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)\right] \quad \cdots\cdots\cdots⑩$$

⑧⑨⑩をまとめると、

$$\frac{S}{4}=\frac{-\sqrt{2}\,a^2b^2\left(a^2-b^2\right)}{a^4+6a^2b^2+b^4}$$

$$+\frac{\sqrt{2}\,ab}{(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2ab(a^2-b^2)[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{a^4+6a^2b^2+b^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2]}{2}tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)\right]$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\,a^2b^2(a^2-b^2)}{a^4+6a^2b^2+b^4}+\frac{\sqrt{2}\,a^2b^2(a^2-b^2)}{a^4+6a^2b^2+b^4}+\frac{ab}{2}tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)=\frac{ab}{2}tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑪$$

⑪の第一項と第二項は打ち消され求める面積Ｓは、

$$S=2ab\ tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑫$$

となる。

もう一つの解き方として、座標軸を回転させない解法を示す。

図５において、点Ａから x 軸に下した垂線をＡＡ’、 点Ｄから x 軸に下した垂線をＤＤ’とすると、式①で表される楕円をＤ’からＡ’の区間で積分した面積Ｓ’から◿ＡＯＡ’（ｲ）と◿ＤＯＤ’（ﾛ）の面積を引いたものが求める面積である。Ａ’の x 座標は、

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $y=tan\frac{\pi}{8}x=\left(\sqrt{2}-1\right)x$

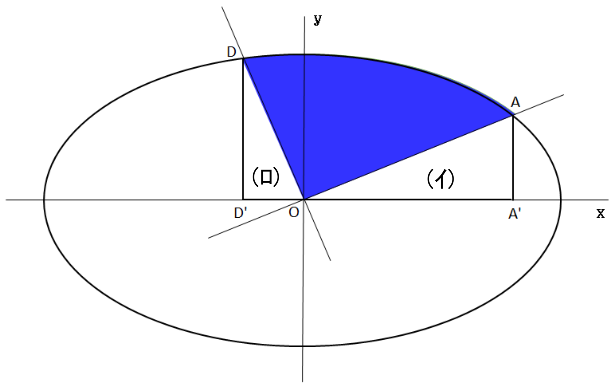

図５

の交点だから、これを解いて $x=\frac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}$

D′のｘ座標は、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $y=tan\dfrac{5\pi}{8}x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}x=-(\sqrt{2}+1)x$ の交点だから、

これを解いて $x=-\dfrac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}$ となる。

よって求める面積は、$S'=\displaystyle\int_{-\frac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}}^{\frac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$ ・・・・・・・・・⑬

$x=a\,sin\,t$ とおき置換積分を用いると、積分範囲は

$\dfrac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}\to sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}$ ，　$-\dfrac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}\to sin^{-1}\dfrac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}$ となり⑬は、

$$\int_{-\frac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}}^{\frac{ab}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_{sin^{-1}\frac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}}^{sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}} ab\cos^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_{sin^{-1}\frac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}}^{sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}}(\cos 2t+1)dt$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2}sin\,2t+t\right]_{sin^{-1}\frac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}}^{sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}}$$

ここで、$sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}$ となるような三角形は図６(A)であり、$sin^{-1}\dfrac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}$ となるような三角形は図６(B)である。

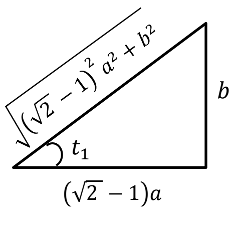

図６（A）

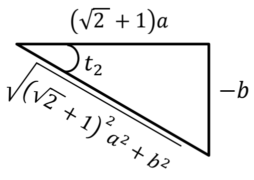

図６（B）

よって、

$sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}=tan^{-1}\dfrac{b}{(\sqrt{2}-1)a}$ ，　$sin^{-1}\dfrac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}=tan^{-1}\dfrac{-b}{(\sqrt{2}+1)a}$ することができ、

$$S=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2}sin\,2t+t\right]_{sin^{-1}\frac{-b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2a^2+b^2}}}^{sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2+b^2}}}=\frac{ab}{2}\left[sin\,t\,cos\,t+t\right]_{tan^{-1}\frac{-b}{(\sqrt{2}+1)a}}^{tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}}$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\left(\frac{b}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{(\sqrt{2}+1)a}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}}\cdot\frac{-b}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}}+tan^{-1}\frac{-b}{(\sqrt{2}+1)a}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2b^2}{2}\left[\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}\right]+\frac{ab}{2}\left[tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,a^2b^2\,(a^2+b^2)}{\left[(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2\right]\left[(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2\right]}+\frac{ab}{2}\left[tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

これがＡＡ'Ｄ'Ｄで囲まれた部分の面積である。

次に、⊿ＡＯＡ'と⊿ＤＯＤ'の面積を求める。

⊿ＡＯＡ'（イ）の面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)ab}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)a^2b^2}{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}$$

⊿ＤＯＤ'（ロ）の面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)ab}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)a^2b^2}{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}$$

従って、（イ）＋（ロ）の合計面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)a^2b^2}{(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)a^2b^2}{(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2}=\frac{\sqrt{2}\,a^2b^2\,(a^2+b^2)}{\left[(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2\right]\left[(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2\right]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

求める面積は⑭－⑮だから

$$\frac{S}{4}=\frac{\sqrt{2}\,a^2b^2\,(a^2+b^2)}{\left[(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2\right]\left[(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2\right]}+\frac{ab}{2}\left[tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}\right]$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,a^2b^2\,(a^2+b^2)}{\left[(\sqrt{2}-1)^2a^2+b^2\right]\left[(\sqrt{2}+1)^2a^2+b^2\right]}=\frac{ab}{2}\left[tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}\right]\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

積分で求めた面積⑭の第一項と⊿ＡＯＡ'+⊿ＤＯＤ'の合計面積⑮が一致して相殺され、

求める面積は次の通りとなる。

$$\underline{\underline{S=2ab\left[tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}\right]}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰$$

先ほど求めた⑫ $S=2ab\ tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)$ と今回求めた⑰は一致するだろうか？

前出の等式 $tan^{-1}u+tan^{-1}v=tan^{-1}\dfrac{u+v}{1-uv}$ を⑰に適用して、

$$tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+tan^{-1}\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}=tan^{-1}\left[\frac{\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}+\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}}{1-\frac{b}{(\sqrt{2}-1)a}\cdot\frac{b}{(\sqrt{2}+1)a}}\right]=tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)=tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)$$

となり一致することが確認された。

ここまで来たら一般論で解を求めたくなるのではないだろうか？

楕円Ⅱの回転角度を θ として、

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $y=tan\,\theta\,x$ 及び、直線 $y=-\dfrac{1}{tan\,\theta}x$ の交点の座標を求めると、それぞれ

$\left(\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}},\ \pm\dfrac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}\right)\left(\mp\dfrac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}},\ \pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}\right)$ となる。

ここで注意しなければならないことは、45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 回転して交差している場合、その半分の 22.5° $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 回転した軸に対して対称となっているので、最終的には $\theta\rightarrow\frac{\theta}{2}$ としなければならないということである。

θ 回転した場合の共通部分の面積は同様に、

$\displaystyle\int_{-\frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\theta}}}^{\frac{ab}{\sqrt{a^2\,tan^2\theta+b^2}}} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$ ･･････････⑱　から２つの三角形の面積を引けばよい。

置換積分による積分範囲は図６に示す考え方を適用して、

$$\frac{S}{4}=\frac{ab}{2}[sin\,t\,cos\,t+t]_{tan^{-1}\left(\frac{-b\tan\theta}{a}\right)}^{tan^{-1}\left(\frac{b}{a\tan\theta}\right)}$$
$$-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}\cdot\frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}\right)\right]$$

$$\frac{S}{4}=\frac{ab}{2}\left[\left[\frac{b}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}\cdot\frac{a\tan\theta}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}+tan^{-1}\left(\frac{b}{a\tan\theta}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{-b\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}+tan^{-1}\left(\frac{-b\tan\theta}{a}\right)\right]\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}\cdot\frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2\,tan^2\,\theta+b^2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2\,tan^2\,\theta}}\right)\right]$$

$$=\frac{ab}{2}\left[tan^{-1}\left(\frac{b}{a\tan\theta}\right)+tan^{-1}\left(\frac{b\tan\theta}{a}\right)\right]$$

積分の第一項の値と２つの三角形の合計面積は、角度に関係なく一致し相殺される。

$tan^{-1}u+tan^{-1}v=tan^{-1}\dfrac{u+v}{1-uv}$ を用いると、

$$\frac{ab}{2}\left[tan^{-1}\left(\frac{b}{a\tan\theta}\right)+tan^{-1}\left(\frac{b\tan\theta}{a}\right)\right]=\frac{ab}{2}tan^{-1}\left[\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin 2\theta}\right]$$

ここで$\theta \to \frac{\theta}{2}$に置き換えると、求める面積は次の通りとなる。

$$S=2ab\,tan^{-1}\left[\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin\theta}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑲$$

⑲はθをパラメーターとする関数となっている。$\sin\theta$の値の範囲は$-1\le\sin\theta\le 1$であるが、面積の場合マイナスは対象外となり、$0\le\sin\theta\le 1$としてよい。

$tan^{-1}\alpha$の値は α が増加すれば大きくなるので、Sは$\sin\theta$の値が最大となる $\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき最小値

となり、その値は $S=2ab\,tan^{-1}\left[\dfrac{2ab}{(a^2-b^2)}\right]$である。

ここで、具体的な数値を入れて計算してみよう。
図７のように $a=1, b=\frac{1}{2}$ として計算すると、

（１）　直交する場合

$S=4ab\,tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ に入れて計算

$$S=4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0.9273$$

これは楕円の面積$\pi ab=1.5708$に対して約 62%である。

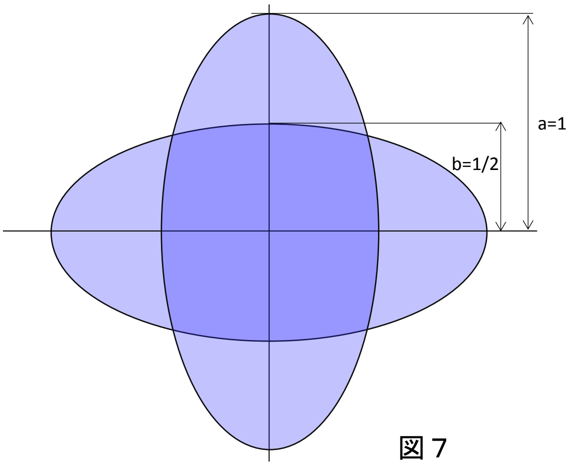

図７

（２）　４５°回転した場合

$S=2ab\ tan^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)$に入れて計算すると、$S=2\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}}{1^2-(\frac{1}{2})^2}\right)=1.0832$

これは楕円の面積に対して約 69%である。

（３）　θ回転した場合

$S=2ab\,tan^{-1}\left[\dfrac{2ab}{(a^2-b^2)\sin\theta}\right]$に入れて計算すると、

$$S=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left[\frac{2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}}{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\theta}\right]$$

$$=tan^{-1}\left[\frac{1}{\frac{3}{4}\sin\theta}\right]=tan^{-1}\left[\frac{4}{3\sin\theta}\right]$$

これをグラフにすると図８のようになる。

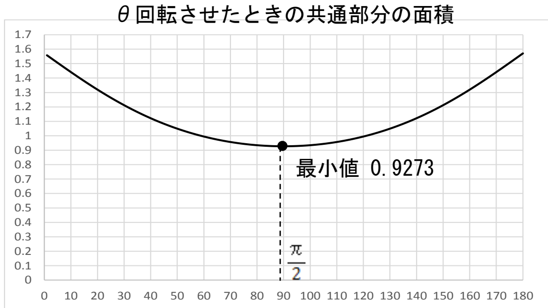

図８

このグラフを見ると、$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最小値となることが確認できる。

$\theta=0$ のとき $sin\,\theta=0$ だから、$S=2abtan^{-1}(\infty)$，$tan^{-1}(\infty)=\dfrac{\pi}{2}$ から、$S=2ab\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi\,ab$ となり
２つの楕円が一致している状態なので、当然共通部分の面積は楕円の面積に一致する。

「４５°傾いた楕円」にした場合の計算において、45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ の半分、22.5° $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 回転させた軸に対称になっていることに気付き、回転行列を使い座標軸を 22.5° 回転させて計算を行った。すると、

$$\int\sqrt{a-b\,x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a-b\,x^2}+\frac{a}{\sqrt{b}}\,tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a-b\,x^2}}\right)\right]$$

という積分が出てきて複雑な計算となった。
しかし、もう一方の座標軸を回転させない方法で計算すると、

積分は $b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\,dx$ となり、置換積分を利用して比較的簡単に解答を導くことができた。

回転角度を θ として一般化した場合は、相当複雑な計算になると思っていたが、この方法でやると意外とすんなりできた。

$S=4ab\,tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ において $a=b$ とすると、$S=4a\cdot a\cdot tan^{-1}(1)=4a\cdot a\cdot\dfrac{\pi}{4}=\pi a^2$
のように、当然ながら円の面積に一致する。また、

⑫ $S=2ab\ tan^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{2}\,ab}{a^2-b^2}\right)$ において$a=b$ とすると、$S=2\cdot a\cdot a\cdot tan^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{2}\cdot a^2}{a^2-a^2}\right)=2\cdot a\cdot a\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi a^2$
円は回転に関係なく共通部分は常に一致しているので同様の結果となる。

⑲ $S=2ab\,tan^{-1}\left[\dfrac{2ab}{(a^2-b^2)\,sin\,\theta}\right]$ についても、tan^{-1}の [ ]内の分母に (a^2-b^2)があり常に 0 となるため、θ に関係なく$tan^{-1}[\infty]=\dfrac{\pi}{2}$ となり $S=\pi a^2$ となるのである。

（２０１９．１０．１２）