７３「楕円を三次元にしてみると」

２つの楕円の交差を二次元から三次元にしてみるとどうなるだろうか？
ちょうど今、ラグビーのワールドカップが日本で開催されており、そんなタイミングにラグビーボールを交差させたとして、その共通部分の体積はどうなるだろうという問題を考えてみた。

楕円を三次元にしたものを楕円体といい、ラグビーボールは球の両端を引っ張って一辺を長くした形で、３辺のうち２辺が同じ長さで「回転楕円体」と呼ばれる。

まん丸な球を回転楕円体にしたことにより、ボールに複雑な動きが生じ偶然に支配される確率が高まる。数学の世界においても“円を楕円”，“球を楕円体”にすると難しさが増してくる。

端的な例が、円の方程式から円周の長さは簡単に計算できるが、楕円の方程式から楕円の周長は初等関数では計算することができず、複雑な楕円積分になってしまう。

問 題

「２つの直交する回転楕円体の共通部分の体積を求めよ」

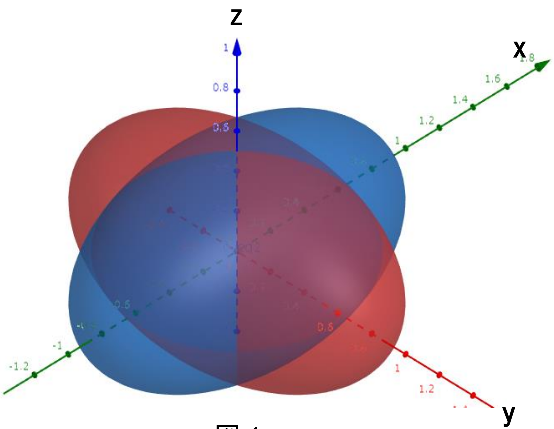


図１

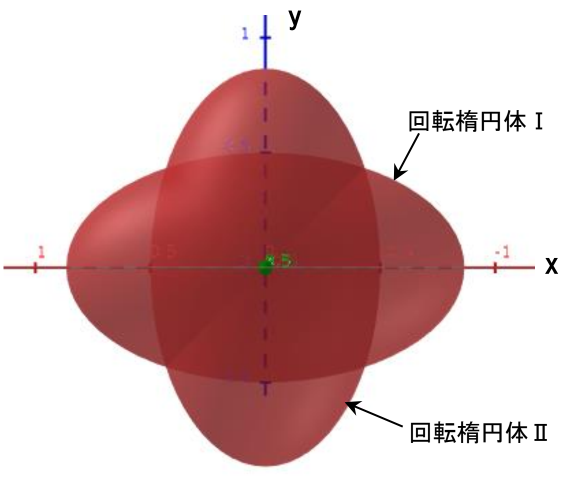


図２

２つの直交する回転楕円体の共通部分は、図１に示すような複雑な立体図形である。回転楕円体の長辺を a, 短辺を b とすると、図２は上からｘ－ｙ軸に投影された状態を見たものである。図１，２を見ただけでは共通部分が具体的にどのような形なのか把握することが難しい。

２つの回転楕円体をそれぞれⅠ、Ⅱとして方程式で表すと次のようになる。(a > b)

回転楕円体Ⅰ　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$…………①

回転楕円体Ⅱ　$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$…………②

① － ②を作ると、

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=0$$

$\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)x^2=\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)y^2$ より、$y=\pm x$

この式は図３に示す$x-y$平面で原点において４５°傾いて直交する線（ＡＣ，ＢＤ）を示しているが、$y-z$及び$x-z$平面をみると楕円である。図３の各平面をみれば、x軸y軸および直線ＡＣ，ＢＤで切断された部分はそれぞれ対称であることがわかる。これから求める立体の体積は、$z\geq 0$の範囲で図３に示すＯＰＢの体積を求め、それを１６倍すればよい。

図４－１に示すように、x 軸から y_1 だけ離れた面で立体ＯＰＢを切断すると、図４－２の斜線で示した断面となっている。
この曲線部分は円であり、②を変形して x, z の関数として次式で表わされる。

$$x^2+z^2=\left(b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}\right)^2$$

これは図４－３に示す、半径 $b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}$ の円であり、斜線部分の面積をS_1 とするとS_1 は次のように表される。

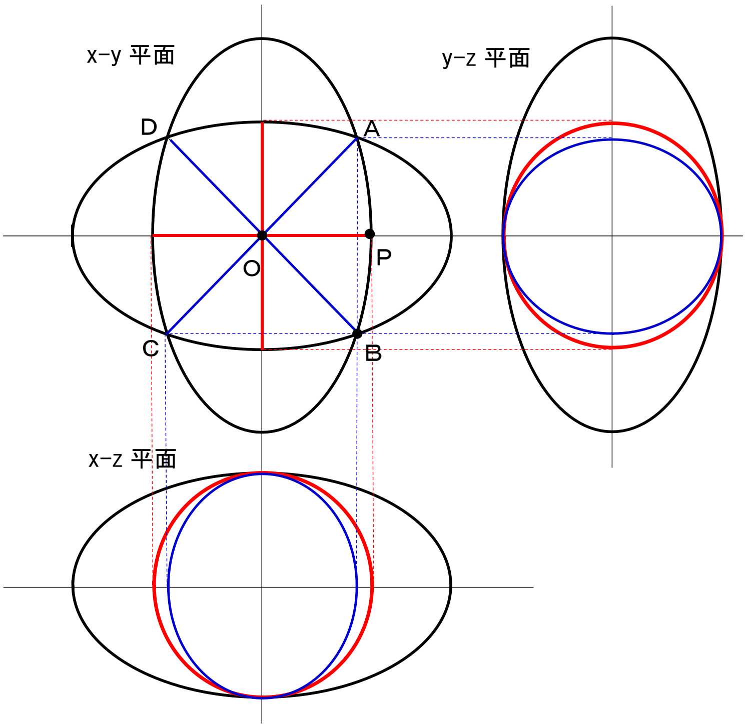


図３

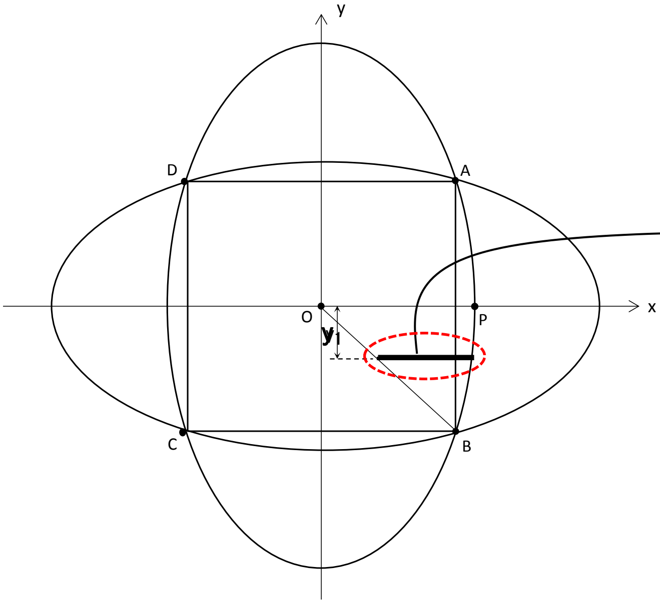


図４－１

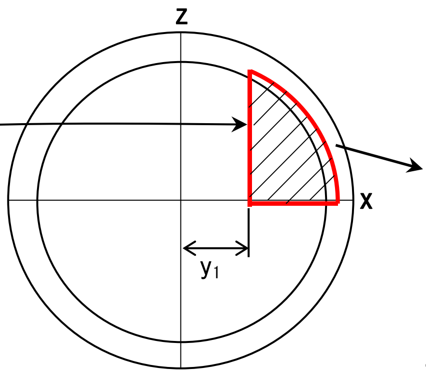


図４－２

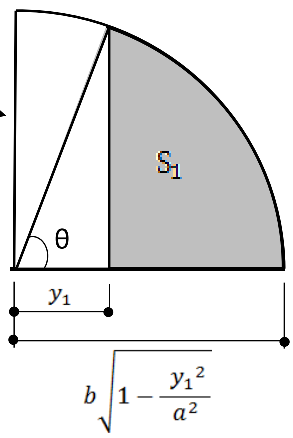


図４－３

$$S_1=\pi\left(b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}\right)^2\cdot\frac{\theta}{2\pi}-\frac{1}{2}y_1\cdot\left(b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}\right)\sin\theta$$

ここで、$\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{y_1}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right)$， $\left(b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}\right)\sin\theta=\sqrt{b^2-\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right){y_1}^2}$ だから、

$$S_1 = \pi\left(b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{x}{b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}}\right) - \frac{1}{2}\, y_1 \cdot \sqrt{b^2 - \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right){y_1}^2}$$

$$= \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{{y_1}^2}{a^2}\right) \cdot \cos^{-1}\left(\frac{y_1}{b\sqrt{1-\frac{{y_1}^2}{a^2}}}\right) - \frac{1}{2}\, y_1 \cdot \sqrt{b^2 - \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right){y_1}^2}$$

求める体積Ｖは、S_1 をy 方向に０から$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$まで積分することによって求められるので、$y_1$を再び 変数$y$として次式で与えられる。

$$\frac{V}{16} = \int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} \left[\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right) \cdot \cos^{-1}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right) - \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{b^2 - \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)y^2}\right] dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで、③を分解して出てくる３つの不定積分のうち以下の（１)，（２）については、

(1) $$\int\left[\frac{b^2}{2} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right)\right] dy = \frac{b^2}{2}\int\left[\cos^{-1}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right)\right] dy$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[y \cdot \cos^{-1}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right) + \frac{\sqrt{a^2(y^2-b^2)+b^2y^2}\ tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2(y^2-b^2)+b^2y^2}}{a^2}\right)}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\ \sqrt{\frac{a^2(y^2-b^2)+b^2y^2}{b^2(y^2-a^2)}}}\right]$$

(2) $$\int\left[\frac{1}{2} y \cdot \sqrt{b^2 - \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)y^2}\right] dy = \frac{1}{2}\int\left[y \cdot \sqrt{b^2 - \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)y^2}\right] dy = -\frac{[a^2b^2 - y^2(a^2+b^2)]^{\frac{3}{2}}}{3a(a^2+b^2)}$$

というように積分可能だが、次の（３）については初等関数で表すことができない。

(3) $$\int\left[\frac{y^2}{a^2} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right)\right] dy = \frac{1}{a^2}\int\left[y^2 \cdot \cos^{-1}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right)\right] dy$$

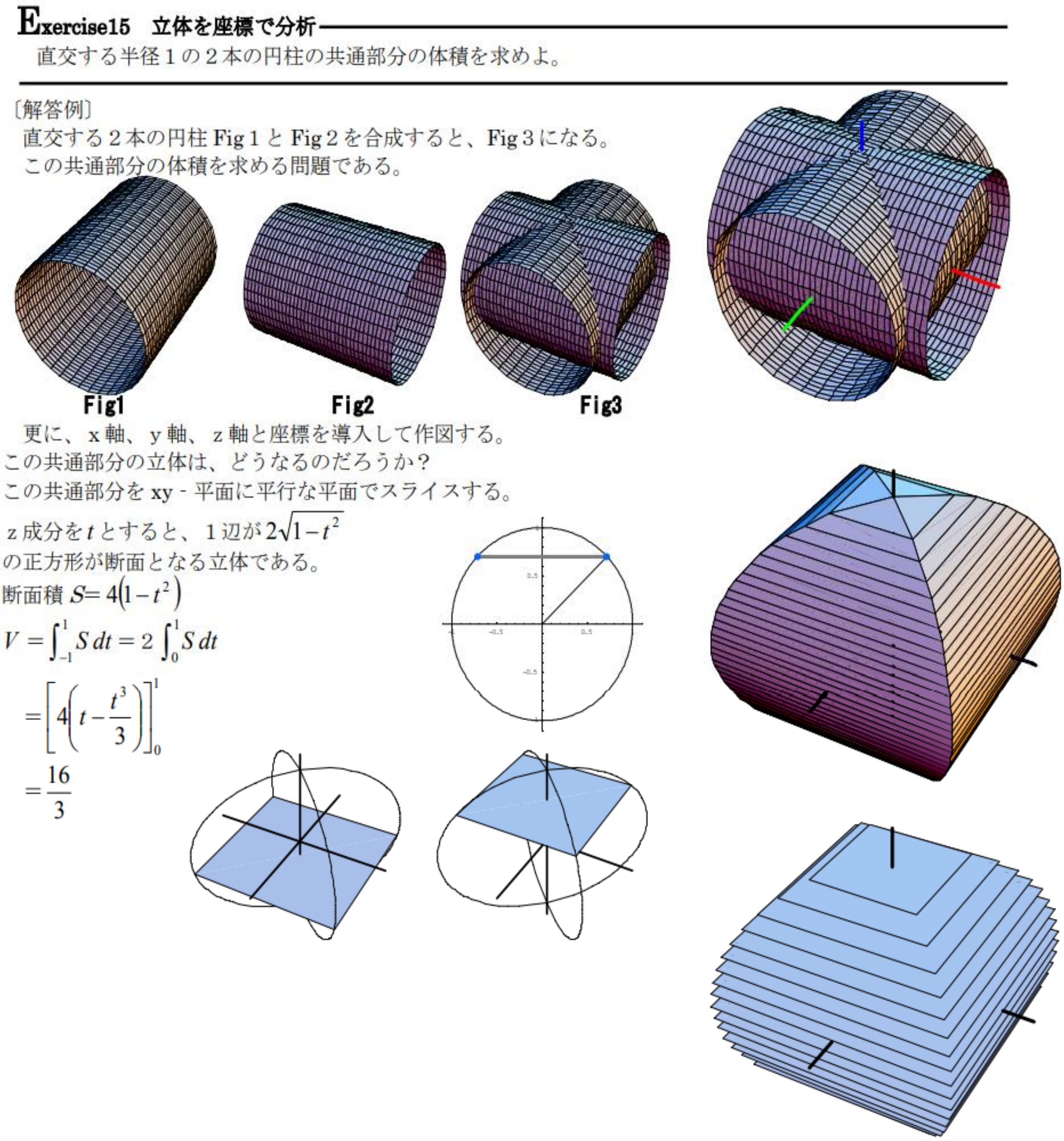
ここで行き詰ってしまった。

この方法による計算はこれ以上は難しので、数値計算で答えを求めることとした。③式において、$(a,\ b) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$及び$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$として、この２種類の$a,\ b$ について

$y = 0 \sim \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} (= 0.43301,,,)$ を入れて計算する。

$y = 0$ から 0.0001 間隔で数値を入れて計算した結果はそれぞれ「0.03779」,「0.03864」であり、
それを 16 倍すると V = 「0.60476」,「0.61822」という値になった。

似た問題として**「交差する２つの円柱の共通部分の体積」**を求めるという問題があった。これは大学入試問題に出題されたこともあり、それほど難しい問題ではない。
ネット上で見つけた解答例を示すと以下のとおりである。



Exercise15　立体を座標で分析

直交する半径１の２本の円柱の共通部分の体積を求めよ。

〔解答例〕

直交する２本の円柱 Fig 1 と Fig 2 を合成すると、Fig 3 になる。
この共通部分の体積を求める問題である。

Fig1　Fig2　Fig3

更に、ｘ軸、ｙ軸、ｚ軸と座標を導入して作図する。
この共通部分の立体は、どうなるのだろうか？
この共通部分を xy - 平面に平行な平面でスライスする。

ｚ成分を t とすると、１辺が $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形が断面となる立体である。

断面積 $S = 4(1-t^2)$

$$V = \int_{-1}^{1} S\,dt = 2\int_{0}^{1} S\,dt$$

$$= \left[4\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{16}{3}$$

ここでは円柱の半径を１としているので解が $\frac{16}{3}$ になっているが、半径を a とすれば $\frac{16}{3}a^3$ となる。

この問題を参考に、図３のｘ－ｙ平面に示された、交差する２つの回転楕円体をｘ－ｙ平面に平行な面 $z = z_1$ の位置で切ると図５のようになる。

切断面は直交した２つの楕円の中央部分となり、それを式で表すと次の④⑤のようになる。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{{z_1}^2}{b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{{z_1}^2}{b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

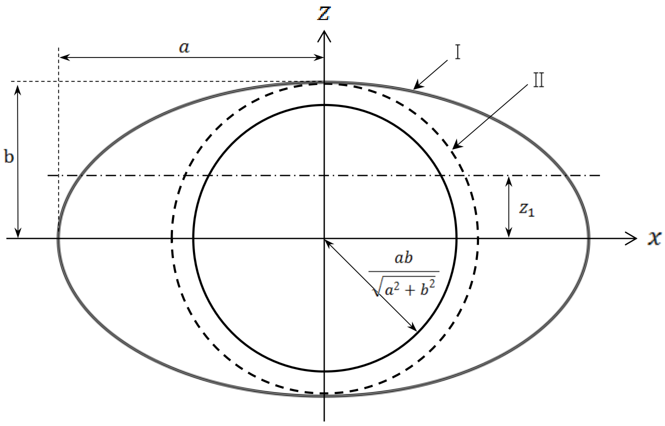


図５

式④，⑤で表わされた楕円の交点は、これを解いて

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1-\frac{{z_1}^2}{b^2}} \ ,\ y = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1-\frac{{z_1}^2}{b^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤の式で示される楕円の交差する共通部分の面積をS_2とすると、S_2は前章「７４」で計算した方法により次式で求められる。

$$S_2 = 4\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right) + 8\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1-\frac{{z_1}^2}{b^2}}}^{\sqrt{b^2-{z_1}^2}} a\sqrt{\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)-\frac{x^2}{b^2}}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦ の第２項を計算する。次の積分公式

$$\int\sqrt{p-\frac{x^2}{q^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{p-\frac{x^2}{q^2}} + pq\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{pq^2-x^2}}\right)\right]$$ を用いると、

$$8\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1-\frac{{z_1}^2}{b^2}}}^{\sqrt{b^2-{z_1}^2}} a\sqrt{\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)-\frac{x^2}{b^2}}\,dx$$

$$= 4a\left[x\sqrt{\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)-\frac{x^2}{b^2}} + \left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)b\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{(b^2-\ {z_1}^2)-x^2}}\right)\right]_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1-\frac{{z_1}^2}{b^2}}}^{\sqrt{b^2-{z_1}^2}}$$

$$= -4\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right) + 4ab\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

この結果を⑦に入れると、

$$S_2 = 4\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right) - 4\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right) + 4ab\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= 4ab\left(1-\frac{{z_1}^2}{b^2}\right)tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

複雑な定積分であるが、第１項と第２項が打ち消しあって単純な式になった。

この結果は、前章「２つの楕円が直交するときの共通部分の面積」

$4ab\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ に非常に似た形の式になっている。

求めるべき共通部分の体積Vは⑧において、z_1 を新たに変数「z」として、図５に示すように S_2 を $-b$ から b まで積分すればよい。

$$V=\int_{-b}^{b}4ab\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)dx=8ab\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\int_{0}^{b}\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)dz$$

$$=8ab\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\left[z-\frac{z^3}{3b^2}\right]_0^b=8ab\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\left[b-\frac{b^3}{3b^2}\right]=\underline{\underline{\frac{16}{3}ab^2\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}}\quad\cdots\cdots\cdot ⑨$$

これが求める体積である。

楕円の問題なのに解にπが含まれていないのは、$tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ がπに関連付けられており、ここからπが出て来る。

回転楕円体の特別の場合が球であり、球の場合は共通部分が完全に一致するはずなので、⑨において $a=b$ とすれば球の体積の式になるはずである。

計算してみると、

$\frac{16}{3}ab^2\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{16}{3}a^3\cdot tan^{-1}(1)$，　$tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$ だから

$\frac{16}{3}a^3\cdot tan^{-1}(1)=\frac{16}{3}a^3\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}\pi a^3$ となり、球の体積の式に一致することが確認された。

また、回転楕円体①，②において長辺 a を無限に大きくすれば、２つの直交する半径 b の円柱とみなすことができ、４ページの問題と同じ結果になるはずである。

$\lim_{a\to\infty}a\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=b$ だから、$\frac{16}{3}ab^2\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{16}{3}b^3$ となり４ページの結果と一致する。

円に関する問題なのに、解には何故かπが出てこない。その理由は４ページの図でわかるように、交差部分の断面が常に正方形のため、いくら積み重ねてもπには無関係なのである。

数値計算として⑨式に、$(a,\ b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を入れると、

$$\frac{16}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{16}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}=0.60460$$

$(a,\ b)=\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ を入れると、$\frac{16}{3}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)=\frac{16}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 0.4636=0.61820$

となり、先に計算した数値計算結果「0.60476」及び「0.61822」とほとんど一致する。

$(a,\ b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ のとき,共通部分の体積は回転楕円体の体積 $\frac{4\pi ab^2}{3}=0.9069$ に対し $\frac{2}{3}$ (66.7%)

$(a,\ b) = \left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき、共通部分の体積は回転楕円体の体積に対し 68.2%である。

楕円や回転楕円体の交差の問題に、なぜアークタンジェント（tan^{-1}）などの逆三角関数が出てくるのだろうか？

それは $\displaystyle\int \sqrt{a - bx^2}dx$ という形の積分が関係している。

この積分を $x = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} sin\, t$ とおいて置換積分を行うと、$dx = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} cos\, t\ dt$ となり $cos^2 t$ の積分になる。

半角の公式より $cos^2 t = \dfrac{cos\, 2t + 1}{2}$ として、これを積分することにより $sin\, t \cdot cos\, t + t$ となり、

ここに出てきた“t”を元の変数 x に戻すときに逆三角関数が出てくるのである。

逆三角関数からは、例えば $tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$ や $tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ のように π が出てくる。

２次元で考えたように、３次元でも回転楕円体を角度 θ だけ傾け、その共通部分の体積を計算しようと試みたが、こちらの方は２次元のときとは比べ物にならないくらい計算が複雑になり断念した。

（２０１９．１１．０１）