７４「四角の中に円３つ」

自作問題

正方形の中に３つの円を入れる。その３つの円の面積の合計が最大となるのはどのような場合か？

この問題を考えると、すぐに図１のような場合であることに気付く。
これでは問題にならないので、最大の円と最小の円の半径の差は２倍以下という条件を付ける。

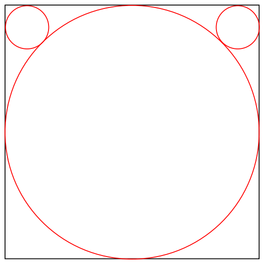

図１

まず、正方形の中に３つの円Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３を入れいろいろ変化させるとき、どのようなパターンがあるだろうか？
正方形の一辺を a, ３つの円の半径をそれぞれＣ１[r_1]，Ｃ２[r_2]，Ｃ３[r_3]とすると、条件は $r_1 \leqq 2r_3$ と表せる。（最大半径 r_1，最小半径 r_3）

基本形として３つの円の半径がすべて同じ場合を考え、それをもとにバリエーションを検討していく。

３つの円の半径がすべて同じ場合とはどんなときだろうか？

図２のようになるのだろうか？
図２は、Ｃ２とＣ３が正方形の対向する２辺にぴったり接し、残りの部分にＣ１を入れた状態である。このようにすると、Ｃ１はＣ２，Ｃ３より少し大きくなってしまう。

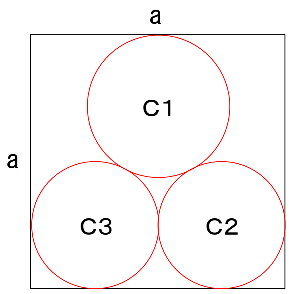

図２

実際に計算すると、$r_2 = r_3 = \frac{1}{4}a$, $r_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right)a$ となり、r_1 は r_2 の 1.125 倍になる。このとき３つの円の合計面積 S は、

$S = \pi {r_1}^2 + 2\pi {r_2}^2 = \dfrac{2^7 + 3^4}{2^{10}}\pi a^2$, $a = 10cm$ とすると $r_2 = r_3 = 2.50cm$, $r_1 = 2.81cm$ となり、

$S = 64.12cm^2$ となる。

３つの円の半径がすべて同じくなるのは、図３に示すような配置の場合である。
３つの円の中心を結んでできる三角形は正三角形で、その頂点を通る正方形を描き、Ｃ１とＣ２の中心を結ぶ線ＰＱと線ＡＢと平行な線とのなす角度を θ とすると、

$r_1 + (r_1 + r_1)\cos\theta + r_1 = a$ から、$2r_1(1 + \cos\theta) = a$ が成り立つ。

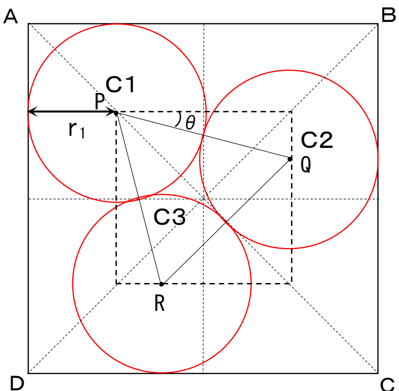

図３

$\theta = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{\pi}{12}$ (15°) だから $r_1 = \dfrac{a}{2(1 + \cos\frac{\pi}{12})}$ となる。

$a = 10cm$ とすると、$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ から、$r_1 = \dfrac{10}{2\left(1 + \dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}\right)} = 10\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{\sqrt{3}+2}\right)$

$r_1 = 2.543$， このとき３つの円の合計面積 S は、
$S = 3\pi {r_1}^2 = 60.96cm^2$ となり、図２の配置に比べて３つの円の合計面積は小さくなる。

　ここからが本格的な検討である。
図３の基本形から、Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３をいろいろ変形していくとどうなるのか？
Ｃ２とＣ３はＣ１に対して対称の関係にあるので、Ｃ１とＣ２を変形していくケースを考えれば、Ｃ１とＣ３を変形していくケースは同じと考えてよい。

パターン１

【１】Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで縮小していくケース

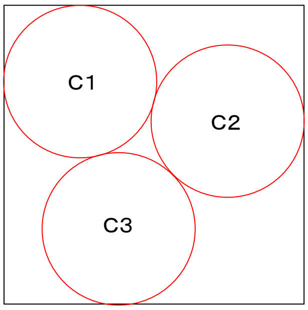

図４－１

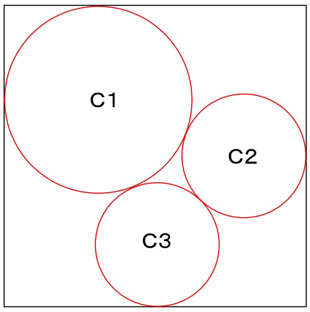

図４－２

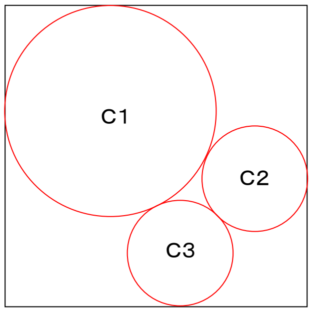

図４－３　$[r_1=2r_2=2r_3]$

【２】Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで拡大していくケース

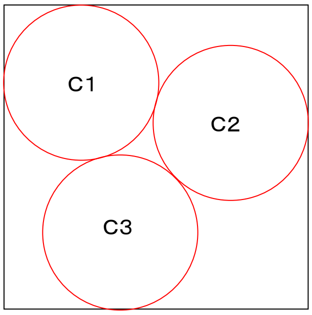

図５－１

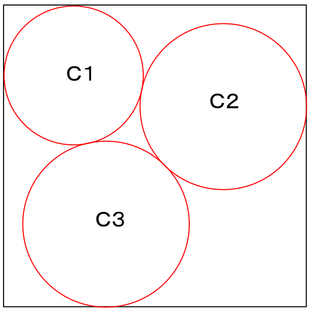

図５－２

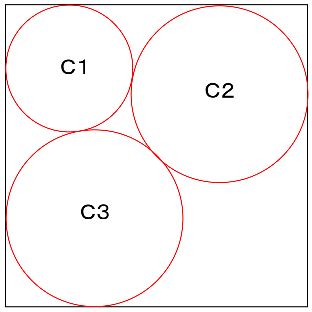

図５－３　$[r_2=2r_1$ にはならない$]$

【３】Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで縮小していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）

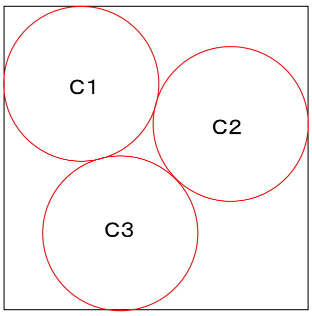

図６－１

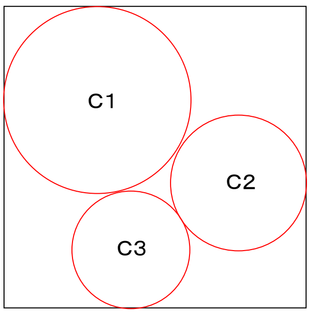

図６－２

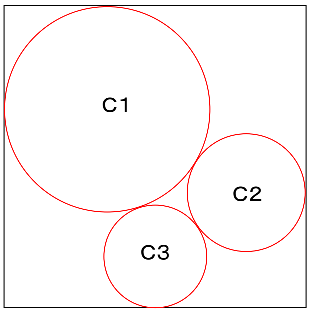

図６－３　$[r_1=2r_3]$

【４】Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで拡大していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）

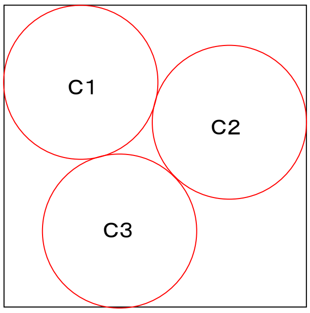

図７－１

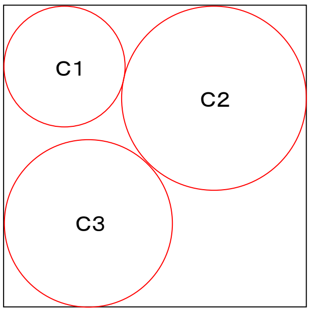

図７－２

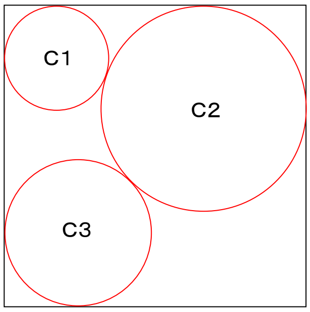

図７－３［$r_2=2r_1$］

パターン２

図３の基本形からでは現れない配置として、図２をもとに変化してくパターンがある。

【１】Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで縮小していくケース

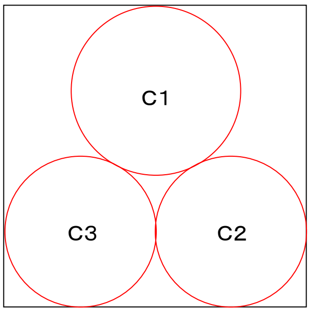

図８－１

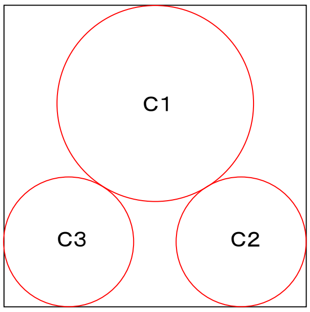

図８－２

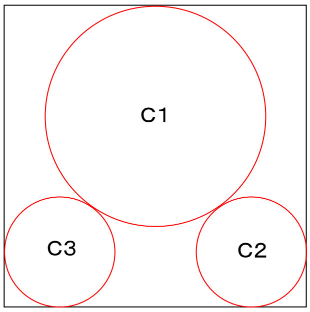

図８－３　［$r_1=2r_2=2r_3$］

【２】Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで拡大していくケース

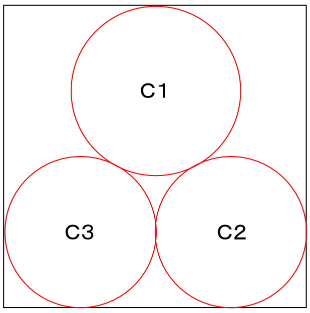

図９－１

このケースはＣ１が縮小してもＣ２，Ｃ３をこれ以上大きくすることはできず変化はなく、前述の図２に限られる。

【３】Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで縮小していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）

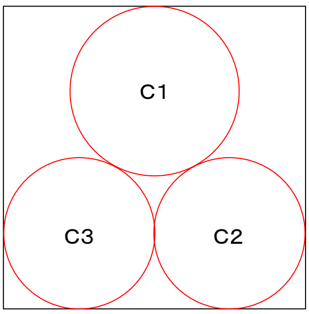

図１０－１

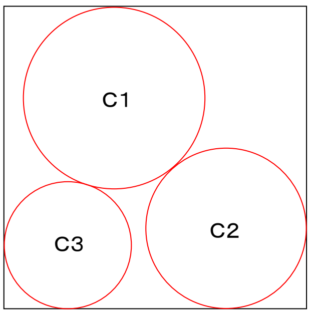

図１０－２

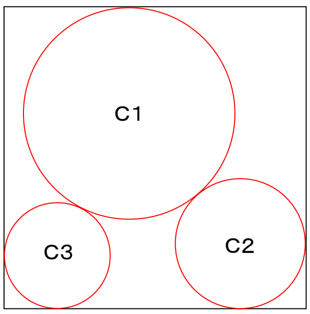

図１０－３［$r_2=2r_1$］

【４】Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで拡大していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）

このケースでできるだけ面積を大きくしようとすると、結局パターン１【２】の３番目（図５－３）と同一となり、パターン１に含まれる。

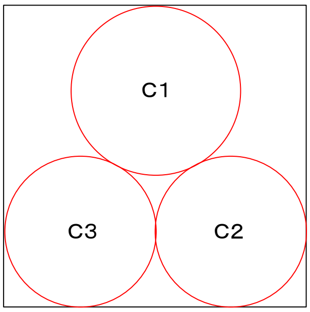

図１１－１

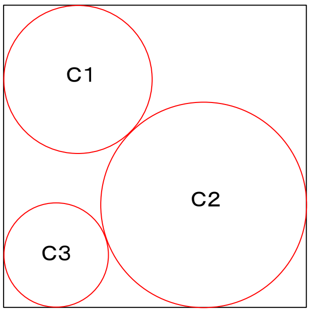

図１１－２

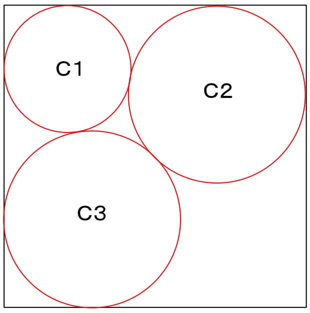

図１１－３

ここから、**パターン１，２**について詳しく検討していく。

パターン１

【１】<u>Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで縮小していくケース</u>

図４－１については、図３に基づきより前に述べたとおりである。

図４－２，４－３のケースについて検討する。

図１２に示す詳細において、

円Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3、（$r_2=r_3$）円の中心をＰ，Ｑ，Ｒとする。Ｐを通りＡＢに平行な直線をＰＰ’、∠ＱＰＰ’を θ とすると、次式が成り立つ。

$r_1+(r_1+r_2)\cos\theta+r_2=a$ より、

$(r_1+r_2)(1+\cos\theta)=a$ …………①

$r_1+(r_1+r_2)\sin\theta+\sqrt{2}r_2+r_2=a$ より、

$(r_1+r_2)(1+\sin\theta)+\sqrt{2}r_2=a$ …………②

①，②から r_1，r_2 を θ で表すと、

$$r_1=\left\{\frac{1}{1+\cos\theta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right\}a \quad \cdots\cdots③$$

$$r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)a \quad \cdots\cdots④$$

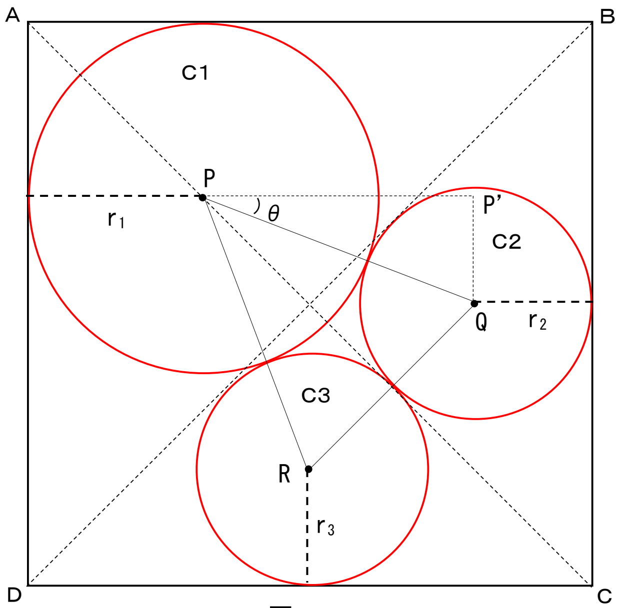

図１２

Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３の合計面積Ｓを θ で表すと、

$S=\pi({r_1}^2+2{r_2}^2)$ だから、

$$S=\pi\left[\left\{\frac{1}{1+\cos\theta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right\}^2+2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right\}^2\right]a^2 \quad \cdots\cdots⑤$$

前提条件 $r_1\leqq 2r_2$ より、③④から θ の範囲を求める。

$$\left\{\frac{1}{1+\cos\theta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right\}a=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)a$$ から、

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{3}$， $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$， $\theta-\frac{\pi}{4}=-0.3398(rad)$ より、$\theta=0.4456(rad)=25.53^\circ$

また θ の最小値は $r_1=r_2$ の時だから、図３より $\theta=15^\circ$ となる。

正方形の一辺の長さを $a=10cm$ として計算してみると、

３つの円の合計面積の最大値は、 $\theta=15^\circ$,$r_1=2.54\mathrm{cm}$,$r_2=2.54\mathrm{cm}$ のとき最大となり、その時の値は $S=60.96cm^2$ となる。(正方形面積の約 61%) 一方、題意には関係ないがこの場合最小値があり、$r_1=1.62r_2$ のとき $57.21cm^2$ である。$r_2\leqq r_1\leqq 2r_2$ の範囲で合計面積の変化をグラフに描くと図１３のとおりである。

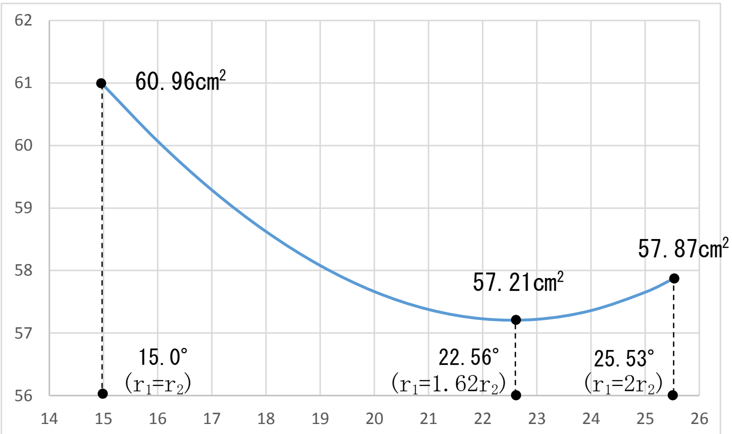

図１３

【２】<u>Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで拡大していくケース</u>

このケースは、Ｃ１が縮小しＣ２，Ｃ３が大きくなっても、Ｃ２，Ｃ３が対角線上に並んだ図５－３からそれ以上大きくなることはない。従って、図５－３に該当する場合の角度が θ の最小値となる。

図１４に示す詳細において、

円Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3、($r_2=r_3$) 円の中心をＰ，Ｑ，Ｒとする。Ｐを通りＡＢに平行な直線をＰＰ’、∠ＱＰＰ’を θ とすると、次式が成り立つ。

$r_2+\frac{2r_2}{\sqrt{2}}+r_2=a$ より、

$$2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)r_2=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

$r_1+(r_1+r_2)\cos\theta+r_2=a$ より、

$$(r_1+r_2)(1+\cos\theta)=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$\sin\theta=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

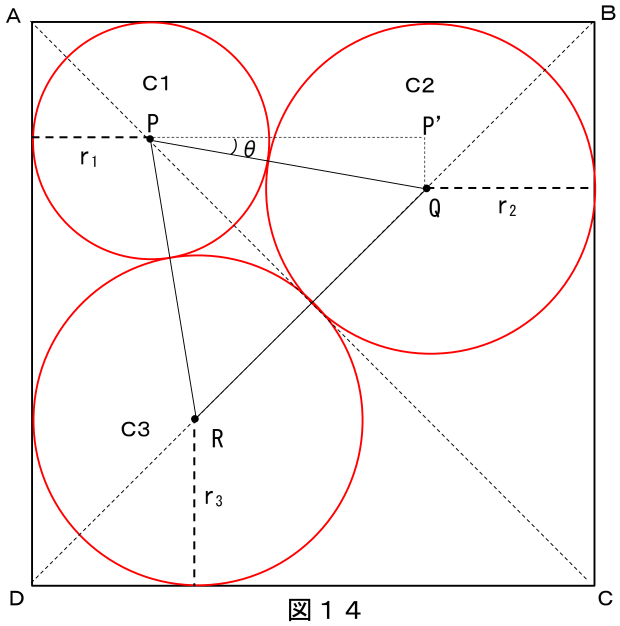

図１４

⑧より、$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}$ ……………⑨

⑨を⑦に入れると、 $(r_1 + r_2)\left(1 + \dfrac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}\right) = a$，⑥より、$r_2 = \dfrac{1}{2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}a$

これから r_1，r_2 を求めると、

$r_1 = \left(\sqrt{r_2} - 1\right)^2 a$，$r_2 = \dfrac{1}{2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}a$ が得られる。これを⑧に代入してθ を求めると、$\theta = 0.1644(rad)$

(9.420°)となる。従って θ の範囲は、9.420° $\leqq \theta \leqq 15.0°$ で検討すればよい。
合計面積Ｓについては、前項の⑤式がそのまま使え、

この範囲で合計面積のグラフを描くと図１５のとおりとなり、最大値は $\theta = 9.420°$
$r_2 = 1.391r_1$ のとき、つまり図５－３の場合であることがわかる。

正方形の一辺の長さを $a = 10cm$ として計算してみると、

３つの円の合計面積は、 $r_1 = 2.11\text{cm}$, $r_2 = 2.93\text{cm}$ のとき最大となり、その時の値は $S = 67.82cm^2$ となる。(正方形面積の約 68%)

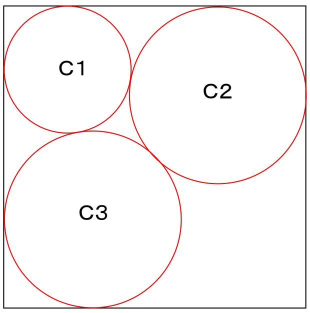

図５－３（$r_2 = 1.391r_1$）が最大値となる

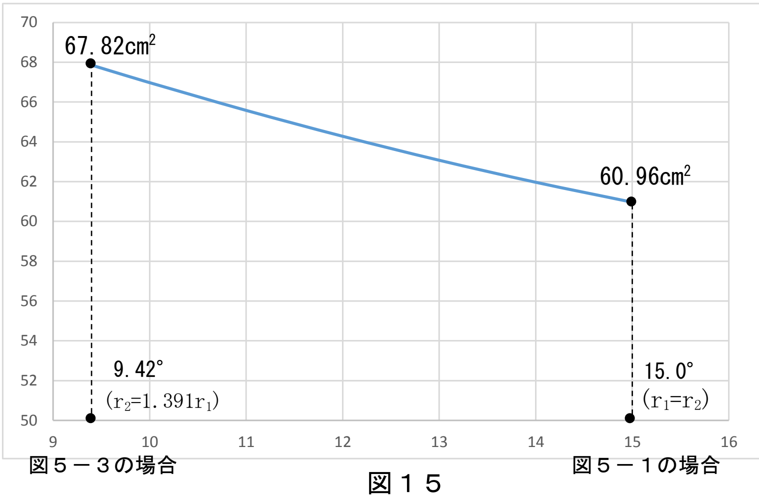

図１５

パターン１のケース【１】,【２】をまとめてグラフにすると図１６のようになる。

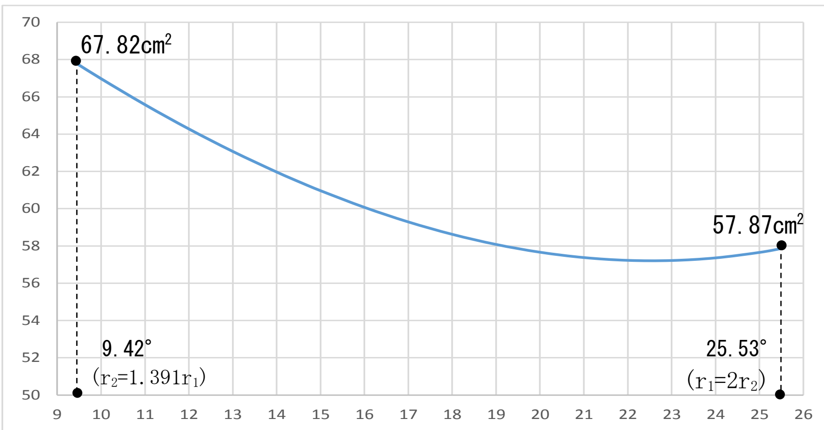

図１６

【３】<u>Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで縮小していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）</u>

このケースはＣ１の拡大に伴い。Ｃ２とＣ３が接した状態のまま異なる大きさで縮小し、図１７のようになる場合である。

このケースは、未知数に対し方程式の数が不足し解くことが困難である。図中点線で示すように、Ｃ２から離した時の方がＣ３が大きくなることが明らかである。従って、最大面積の検討にあたっては次の（４）のケースに含めて考えればよい。

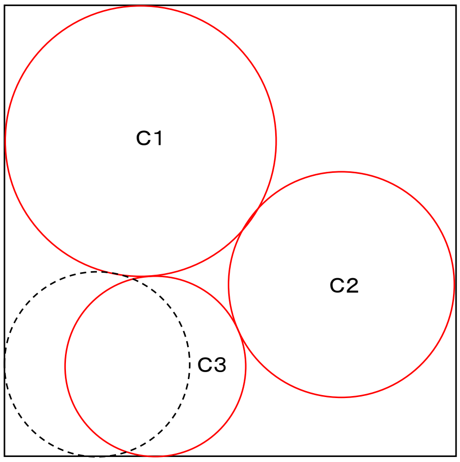

図１７

ただし、図１７に示すように、パターン１【２】のケース（５－３図）においてＣ２，Ｃ３がそれぞれ正方形の２辺に接したまま小さくなり、それに伴いＣ１が大きくなりＣ２，Ｃ３が接してない場合を考えておく必要がある。

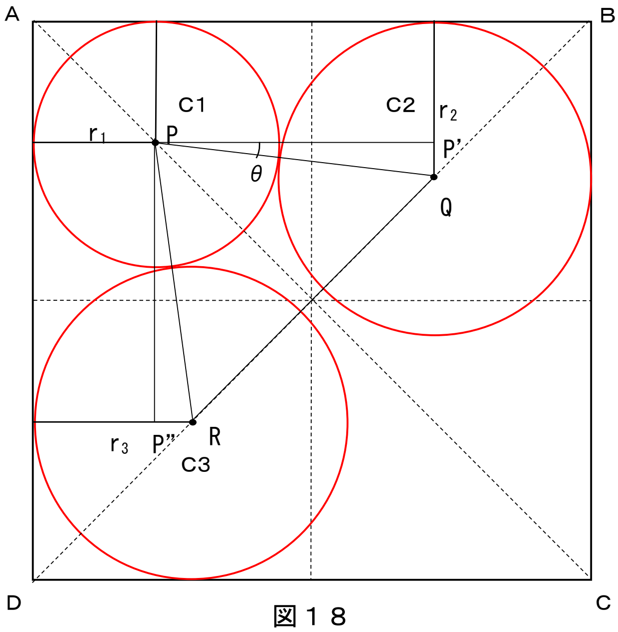

図１８

∠ＱＰＰ’をθとすると、∠ＲＰＰ”もθである。図１８において次式が成り立つ。

$$(r_1+r_2)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{2}\left(\frac{a}{2}-r_2\right)$$ より、

$$(r_1+r_2)\sin\theta-(r_1+r_2)\cos\theta=a-2r_2 \quad \cdots\cdots⑩$$

$$\sin\theta=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑪$$

⑩ ，⑪をr_1，r_2について解いて、

$$r_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}a,\quad r_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}a$$

r_2の最大値は、前項で述べたＣ２とＣ３が接する時で、このケースは前項で検討済みである。

θの範囲は、パターン１のケース【２】から最大が0.1644rad（9.420°）である。さらに$r_1>r_2$の場合はθがマイナスとなるので、$\theta\to-\theta$とすると

⑩は、$(r_1+r_2)\sin\left[\frac{\pi}{4}-(-\theta)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{a}{2}-r_2\right)$から $(r_1+r_2)\sin\theta+(r_1+r_2)\cos\theta=a-2r_2 \cdots\cdots$⑩’

⑪は、$\sin(-\theta)=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$ から $\sin\theta=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$⑪’ となるのでこれを解いて、

$$r_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}a,\quad r_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}a$$ を得る。

$r_1=2r_2$から、$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}a=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}a$，従って$\sin\theta=\frac{1}{3}$から$\theta=0.3398(rad)$となり

θの符号を元に戻すと、$\theta=-0.3398(rad)$ $(-19.47°)$、よってθの範囲は$-19.47° \leqq \theta \leqq 9.42°$ となる。

正方形の一辺の長さを $a=10cm$ として計算してみると、

３つの円の合計面積の最大値は、 $r_1=2.11\mathrm{cm}, r_2=2.93\mathrm{cm}$ のとき、最大となり、その時の値は $\mathrm{S}=67.82cm^2$ となる。（正方形面積の約 68%）　合計面積の変化の様子をグラフにすると、図１９のようになる。

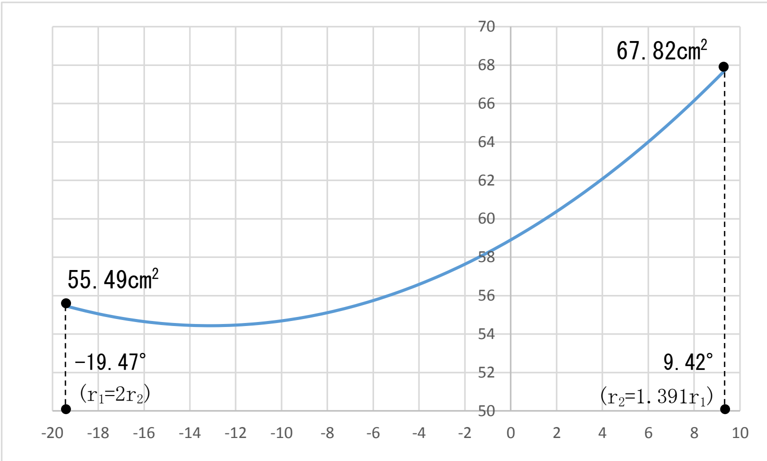

図１９

【４】<u>Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで拡大していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）</u>

図７－２について、図２０に示す詳細において、円Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3、∠ＱＰＰ’を θ_1, ∠ＲＱＱ’を θ_2 とすると、次式が成り立つ。

$r_1+(r_1+r_2)\cos\theta_1+r_2=a$ より

$$(r_1+r_2)(1+\cos\theta_1)=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑫$$

$r_2+(r_2+r_3)\cos\theta_2+r_3=a$ より

$$(r_2+r_3)(1+\cos\theta_2)=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑬$$

$$\sin\theta_1=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

$$(r_1+r_2)\cos\theta_1=(r_2+r_3)\sin\theta_2+(r_3-r_1) \quad\cdots\cdots⑮$$

Ｃ１，Ｃ２の配置から θ_2 は $\frac{\pi}{4}$ なので、$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

より、$(r_2+r_3)(1+\frac{1}{\sqrt{2}})=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$⑬’

$$(r_1+r_2)\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(r_2+r_3)+(r_3-r_1)\cdots\cdots⑮’$$

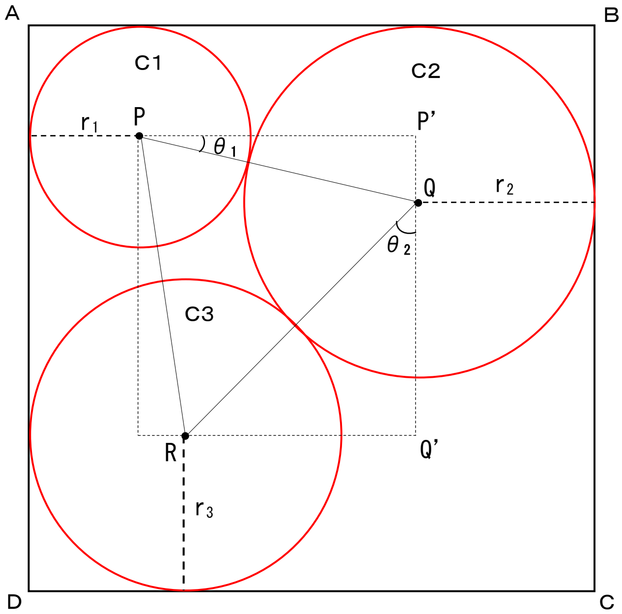

図２０

これまでのケースでは、Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３は１ヶ所または２ヶ所で正方形に接し、かつ３つの円がそれぞれ接していたため、３つの円の合計面積Ｓを１変数で表すことができた。

しかしこのケースの場合、Ｃ１とＣ３が接していないため、方程式の数が未知数の数に満たない。従って、合計面積を１変数で表すことが困難なため数値計算で検討を進めることにする。

半径が最も大きいＣ２について、$r_2=3(\mathrm{cm})$, $a=10cm$ として計算を行い、徐々に r_2 の数値を変化

させてみる。

まず⑬’ $(r_2+r_3)(1+\frac{1}{\sqrt{2}})=10$ から、$r_3=\dfrac{10}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}-r_2=2.8578$ としてr_3が求められる。

次に⑭ $sin\,\theta_1=\dfrac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$ から、$r_1=\dfrac{1-sin\,\theta_1}{1+sin\,\theta_1}r_2$　これを⑫に代入して、

$\left(\dfrac{1-sin\,\theta_1}{1+sin\,\theta_1}+1\right)(1+cos\,\theta_1)r_2=a$ これから、$\dfrac{1+cos\,\theta_1}{1+sin\,\theta_1}=\dfrac{a}{2r_2}$，$\dfrac{a}{2r_2}sin\,\theta_1-cos\,\theta_1=1-\dfrac{a}{2r_2}$ より

$sin(\theta_1-\delta)=\dfrac{1-\frac{a}{2r_2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2r_2}\right)^2+1}}$　$\left(tan\,\delta=\dfrac{2r_2}{a}\right)$　　この式に数値を入れると、

$sin(\theta_1-\delta)=\dfrac{1-\frac{a}{2r_2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2r_2}\right)^2+1}}=\dfrac{1-\frac{10}{2\cdot3}}{\sqrt{\left(\frac{10}{2\cdot3}\right)^2+1}}=-0.3430$ から、$\theta_1-\delta=-0.35011(\mathrm{rad})$ となる。

$tan\,\delta=\dfrac{2r_2}{a}=\dfrac{2\cdot3}{10}=0.6(\mathrm{rad})$, $\delta=0.5404(rad)$ から $\theta_1=-0.35011+0.5404=0.19031(rad)$を得る。

θ_1 がわかれば、$r_1=\dfrac{1-sin\,\theta_1}{1+sin\,\theta_1}r_2=\dfrac{1-0.1892}{1+0.1892}\cdot3=2.0455$ というように r_1 が求められる。

これまでの計算結果を整理すると右の表のとおりである。
同様の計算で、r_2 を変化させたときの r_1，r_3を求めればよい。
この場合の r_2 の範囲は $r_3\leqq r_2\leqq 2\,r_1$ であり、

r_1	2.0455
r_2	3
r_3	2.8578

$r_3=r_2$ の場合は ⑬’ より $2r_2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})=10$ から、$r_3=r_2=\dfrac{5}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=2.9289$，これが$r_2$の取り得る

最小値で図５ － ３に一致する。$r_2=2r_1$ の場合は ⑭より、

$\dfrac{2r_1-r_1}{2r_1+r_1}=\dfrac{1}{3}$ ，$\theta_1=0.3398$ から、$r_1=\dfrac{10}{3(1+0.9428)}=1.7157$　$r_2=3.4315(rad)$ となる。

r_2 を最小値 2.9289 から，3.0，3.1，3.2‥‥と3.0 からは 0.1 ごとに最大値の 3.4315 まで変化させた時の、r_1，r_2，r_3 と３つの円の合計面積Ｓを計算すると表１のようになる。

表１

r_1	r_2	r_3	S
2.1050	2.9289	2.9289	67.82
2.0455	3.0	2.8579	67.08
1.9645	3.1	2.7579	66.21
1.8863	3.2	2.6579	65.54
1.8109	3.3	2.5579	65.07
1.7381	3.4	2.4579	64.79
1.7157	3.4315	2.4264	64.74

表１をもとにグラフを描くと図２１のようになり、図５－３の配置より大きくなることはない。

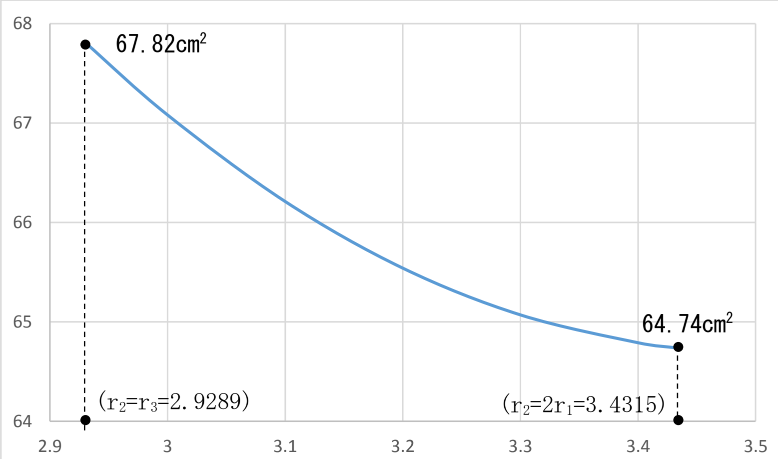

図２１

パターン２

【１】<u>Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで縮小していくケース</u>

図８－２について、図２２に示す詳細において円Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3、($r_2=r_3$)、中心をＰ，Ｑ，Ｒとし、∠ＱＰＰ’を θ とすると、次式が成り立つ。

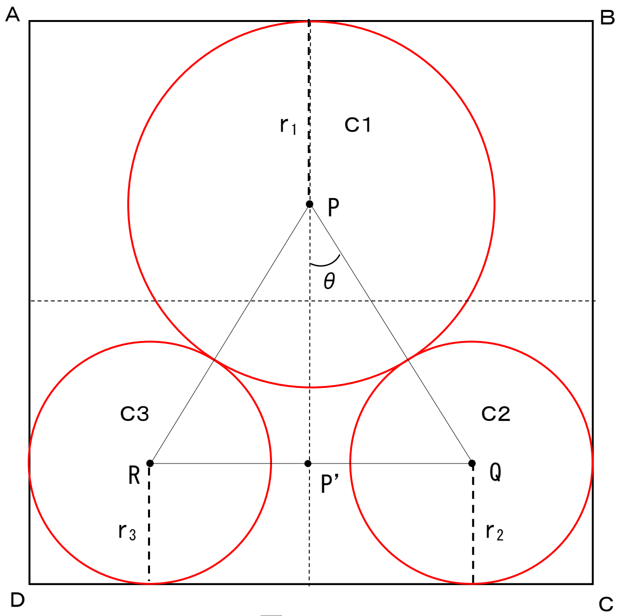

図２２

$r_1+(r_1+r_2)\cos\theta+r_2=a$ より、

$(r_1+r_2)(1+\cos\theta)=a$ …………⑯

$r_2+(r_1+r_2)\sin\theta=\dfrac{a}{2}$ …………⑰

⑯，⑰から r_1，r_2 を θ で表すと、

$r_1=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)a$ …………⑱

$r_2=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)a$ …………⑲

Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３の合計面積Ｓは、

$S=\pi({r_1}^2+2{r_2}^2)$ だから、

$S=\pi\left[\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\right]a^2$ …………⑳

前提条件 $r_1\leqq 2r_2$ より、⑱⑲から θ の範囲を求める。

$\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)a=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)a$ から、

$2\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$， $\sqrt{5}\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{1}{3}\left(\tan\alpha=\dfrac{1}{2}\right)$ より、$\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

$\theta - \alpha = 0.1496(rad)$、$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ だから $\alpha = 0.4636(rad)$ よって、$\theta = 0.6133(rad) = 35.14^{\circ}$

θ の下限値は、Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３が図８－１のようになる場合で、

$r_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right)a$, $r_2 = r_3 = \frac{1}{4}a$ だから ⑯に代入して、$\cos\theta = \frac{15}{17}$ より $\theta = 0.4900(rad) = 28.07^{\circ}$

以上より θ の範囲は、$28.07^{\circ} \leqq \theta \leqq 35.14^{\circ}$ で検討すればよい。

正方形の一辺の長さを $a = 10cm$ として計算してみると、３つの円の合計面積の最大値は、
$r_1 = 2.81$cm , $r_2 = 2.50$cm (図２の場合) のとき最大となり、その値は $S = 64.12cm^2$ となる。
（正方形面積の約 64%）同様にこの場合にも最小値があり、$r_1 = 1.55r_2$ のとき $62.34cm^2$ である。
この範囲で⑳のグラフを描くと図２３のとおりとなり、最大値は $\theta = 28.07^{\circ}$ のとき、つまり

$r_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right)a$, $r_2 = r_3 = \frac{1}{4}a$ のとき、図８ － １の場合であることがわかる。

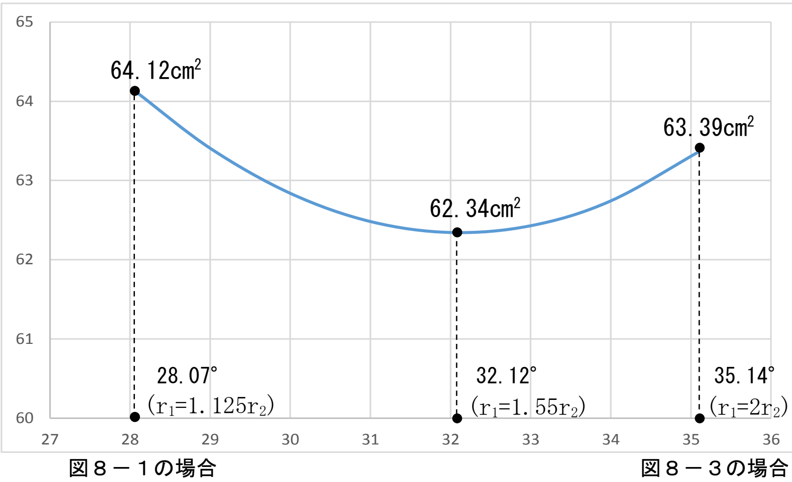

図２３

【２】Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで拡大していくケース

このケースはＣ１が縮小してもＣ２，Ｃ３をこれ以上大きくすることはできず変化はなく、図２に該当する。

【３】Ｃ１が徐々に拡大し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで縮小していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）

このケースは、Ｃ１～Ｃ３の組み合わせが異なるだけで、パターン１の（４）に同じである。

【４】Ｃ１が徐々に縮小し、Ｃ２，Ｃ３が異なる大きさで拡大していくケース（Ｃ２＞Ｃ３）

このケースでできるだけ面積を大きくしようとすると、結局パターン１【２】の３番目、と同一になり、パターン１に含まれる。

これまでの検討をまとめると次の４つの変化のパターンに整理されることがわかった。

【図２４】 図３の基本形からＣ１を拡大していき、３つの円が接した状態でＣ２，Ｃ３を同じ大きさで縮小する

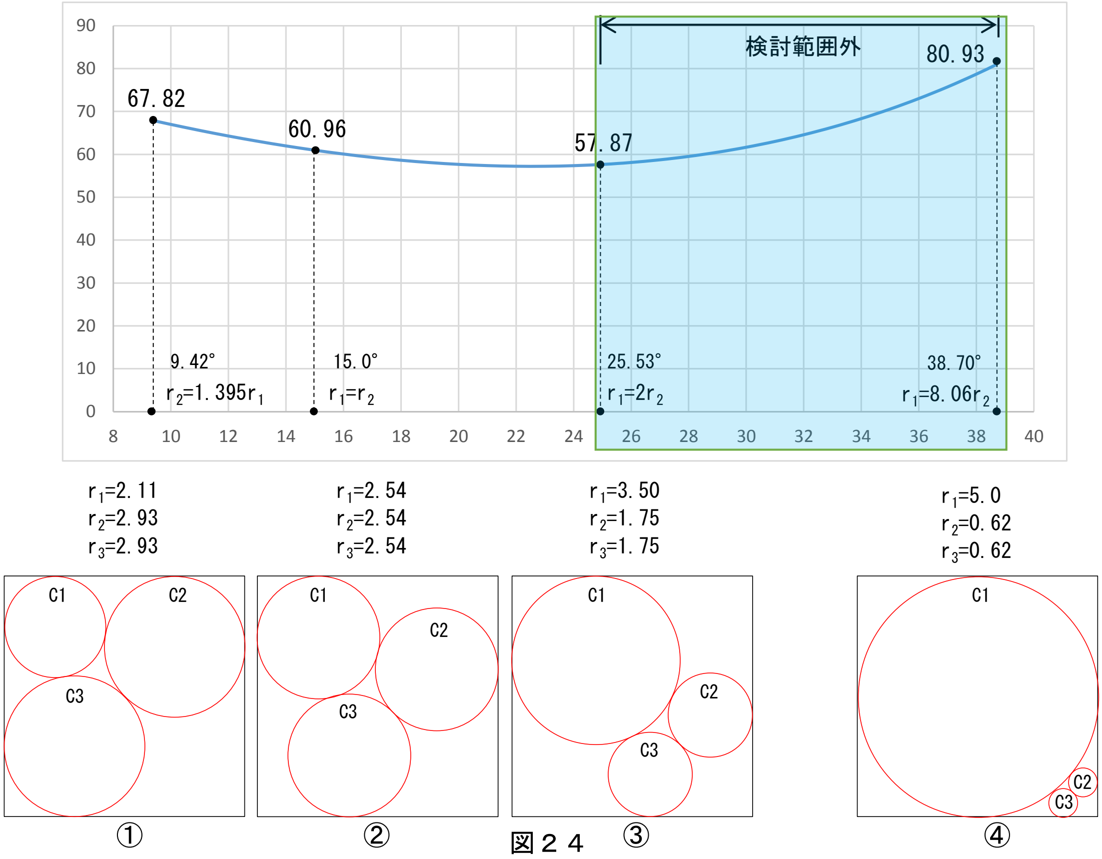

図２４

【図２５】図２４の①からＣ１を拡大していき、Ｃ２，Ｃ３を対角線上で同じ大きさで縮小する

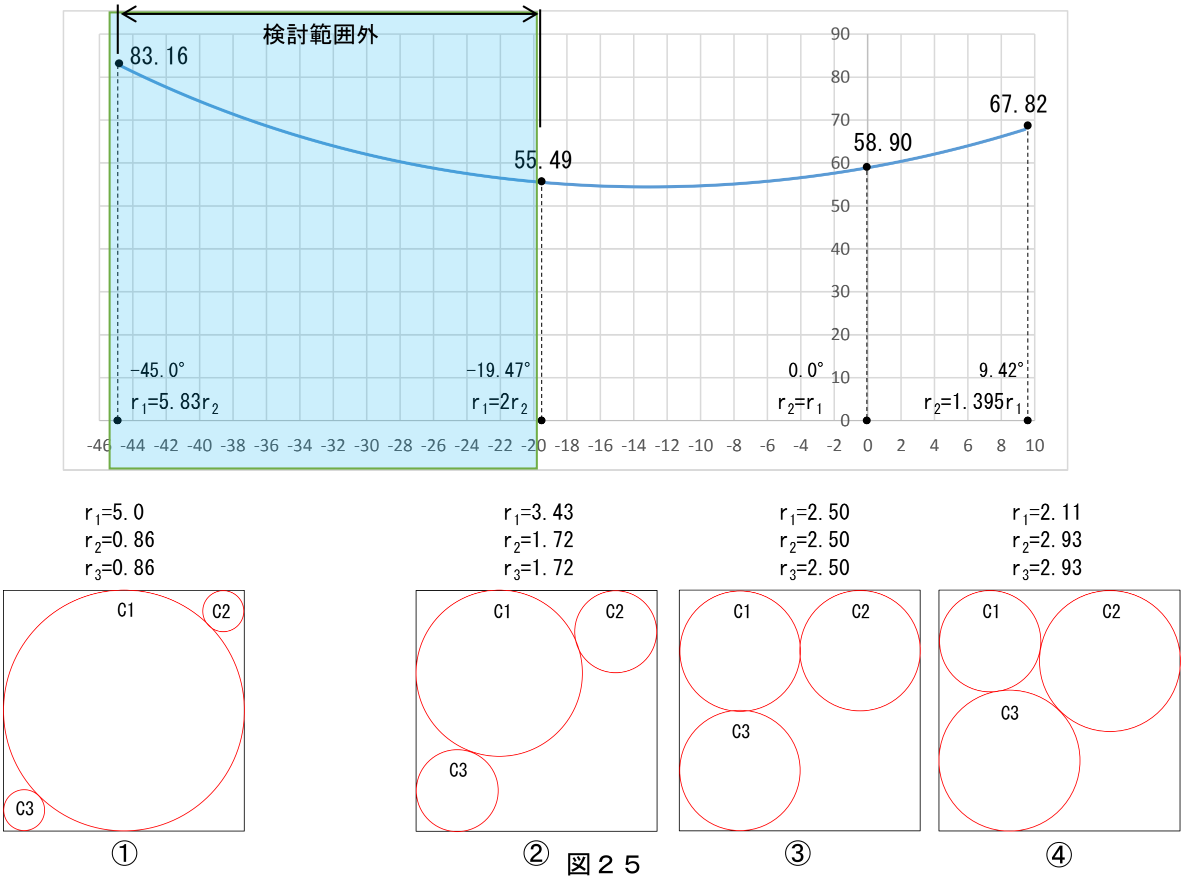

図２５

【図２６】図２４の①からＣ２を拡大し、残ったスペースにＣ１，Ｃ３をできるだけ大きく入れる

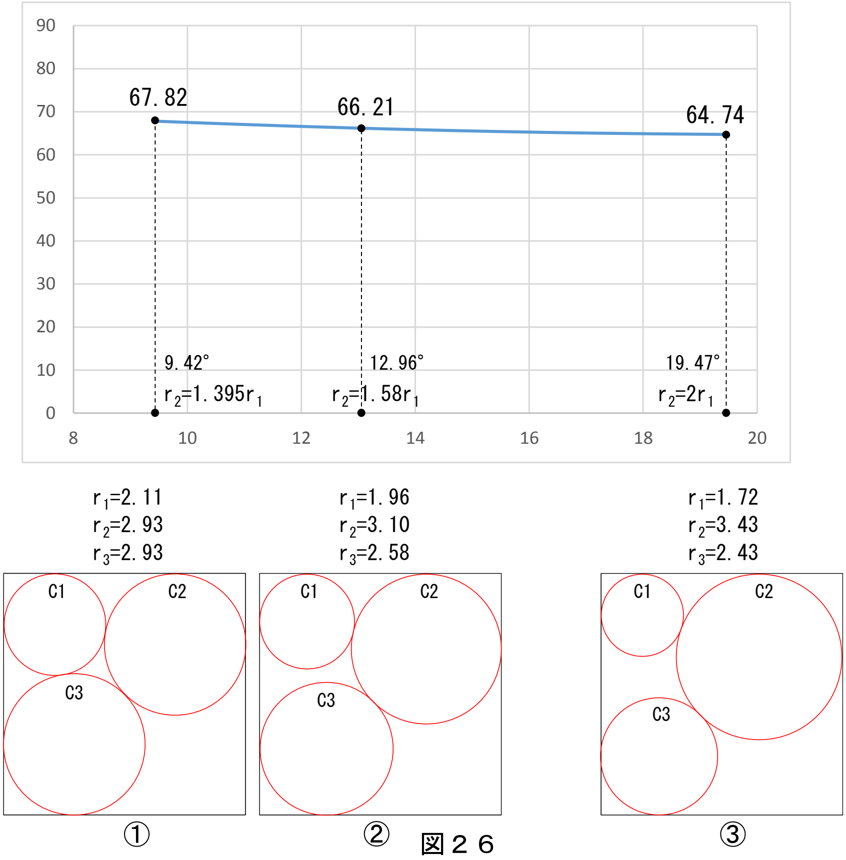

図２６

【図２７】図２の配置からＣ１を拡大し、Ｃ２，Ｃ３が同じ大きさで縮小する

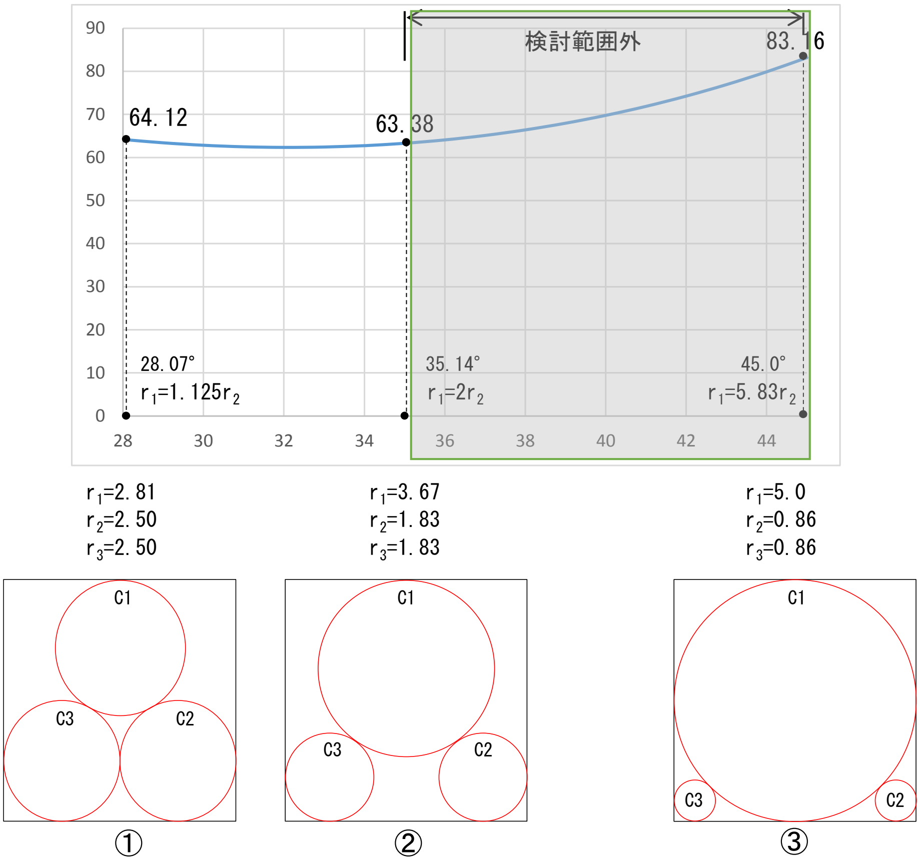

図２７

図２４～２７でわかるように、３つの円の合計面積が最大となるのは５－３図の場合で、対角線の位置に目一杯の円を２つ入れ、残ったスペースに３つめの円を入れた場合で、３つの円の合計面積は正方形の約６８％になる。最大の円と最小の円の半径を２倍以下という条件にしたため、問題としては少し難しくなったが、結果に意外性はなく平凡なものだった。（２０１９．１２．１５）