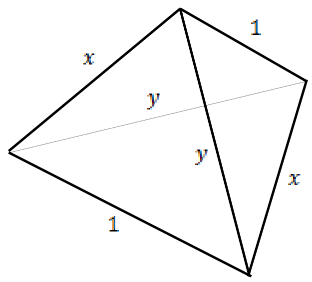
７６「数学 超・超絶難問（１）」

本のタイトルは「数学 超・超絶難問」だが、その中で基本レベルの難問とあったので、普通の難問レベルの問題だろうと思う。

３辺の長さが x, y, 1(ただし， $x+y=2$) である三角形を４つ使って作る等面４面体の体積Ｖが最大となる x の値は？
（ほとんどの人は「直感的には答えは１となりそう」と思うでしょう。さて、実際はどうなりますか？）



（解答）

図１は等面四面体の底面の三角形ＡＢＣを示している。各辺の長さを a, b, 1(ただし， $a+b=2$) とし、頂点をＯとすると ＡＯ＝1，ＢＯ＝b，ＣＯ＝a である。

図に示すように、Ｂを原点とする３次元直交座標 x, y, z （z 軸は上方向）をとり、∠ＡＢＣ＝α とすると、点Ａの座標は $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$，点Ｃの座標は $(1,\ 0)$ と表される。底面から頂点Ｏまでの高さをｈとすると、等面４面体の体積Ｖは、

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\sin\alpha\cdot h$ と表せる。

以上から、$\sin\alpha$ と h を a で表し、その最大値を求めればよい。

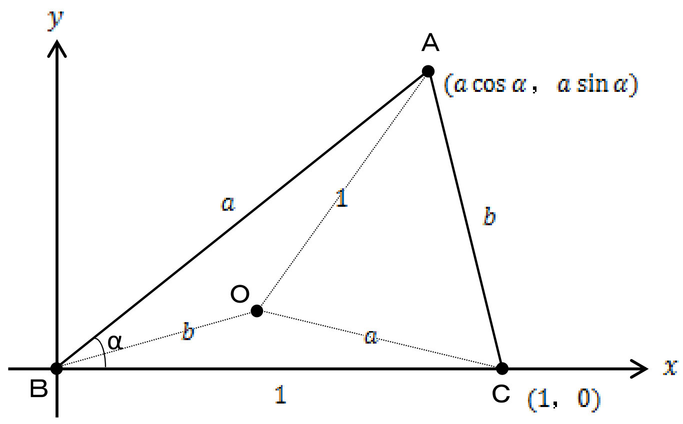


図１

まず $\sin\alpha$ については余弦定理から、

$\cos\alpha=\dfrac{a^2+1^2-b^2}{2a\cdot 1}$， $b=2-a$ を入れて、 $\cos\alpha=\dfrac{a^2+1^2-(2-a)^2}{2a}=\dfrac{4a-3}{2a}$ ･････････① よって、

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{4a-3}{2a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3(2a-1)(3-2a)}}{2a}$ ･･･････････②

つぎに h については、点Ａ，Ｂ，Ｃを中心とする、それぞれ半径1, b, a の球の交点の z 座標を求めれば良い。順に点Ｂ，Ｃ，Ａを中心とする球の方程式は、

$x^2+y^2+z^2=b^2$ ･･･････････③

$(x-1)^2+y^2+z^2=a^2$ ･･･････････④

$(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2+z^2=1^2$　　　　　　　　$\cdots\cdots\cdots\cdots$⑤

②－①を作ると、$-2x+1=a^2-b^2$ より、

$$x=\frac{b^2-a^2+1}{2}=\frac{(2-a)^2-a^2+1}{2}=\frac{5-4a}{2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

③－①を作ると、$-2ax\cos\alpha+a^2(cos^2\alpha+sin^2\alpha)-2ay\,sin\,\alpha=1-b^2$ より、

$2a(x\cos\alpha+y\,sin\,\alpha)=a^2+b^2-1$ これから、①，②，⑥により、

$$y=\frac{1}{sin\,\alpha}\left(\frac{a^2+b^2-1}{2a}-x\cos\alpha\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{3(2a-1)(3-2a)}}{2a}}\left(\frac{a^2+(2-a)^2-1}{2a}-\frac{5-4a}{2}\cdot\frac{4a-3}{2a}\right)$$

$$=\frac{20a^2-40a+21}{2\sqrt{3(2a-1)(3-2a)}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

③，⑥，⑦から、

$$z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}=\sqrt{(2-a)^2-\left(\frac{5-4a}{2}\right)^2-\left(\frac{20a^2-40a+21}{2\sqrt{3(2a-1)(3-2a)}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9(2a-1)(2a-3)(4a^2-8a+3)-(20a^2-40a+21)^2}{12(2a-1)(3-2a)}}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{(4a-3)(4a-5)(2a^2-4a+3)}{(2a-1)(2a-3)}}\cdots⑧$$

以上から、Ｖの式に②，⑧を入れて、

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot sin\,\alpha\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3(2a-1)(3-2a)}}{2a}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{(4a-3)(4a-5)(2a^2-4a+3)}{(2a-1)(2a-3)}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(4a-3)(-4a+5)(2a^2-4a+3)}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-(16a^2-32a+15)(2a^2-4a+3)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-[16(a^2-2a)+15][2(a^2-2a)+3]}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-32[\{(a-1)^2-1\}^2+78\{(a-1)^2-1\}+45]}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-32\left[(a-1)^2+\frac{7}{32}\right]^2+\frac{81}{32}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨より $a=1$ のとき、つまり$x=y=1$ のとき等面四面体の体積が最大となる。この時の等面四面体は正四面体であり、その時の体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-32\left[(a-1)^2+\frac{7}{32}\right]^2+\frac{81}{32}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-32\cdot\left(\frac{7}{32}\right)^2+\frac{81}{32}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{-\frac{7^2}{32}+\frac{81}{32}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$\sqrt{\quad}$ 内は１となり $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ を得る。

⑧において $a=1$ とすると $z=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 、つまり各辺が１の正四面体の高さは $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ であることが分かる。

１辺の長さが１の正三角形の面積は$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ だから、１辺の長さが１である正四面体の体積は、

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$ となり一致する。

不思議なことに、正三角形に必ず付随する$\sqrt{3}$ は、底面積から出てきた$\sqrt{3}$と、高さから出てきた$\frac{1}{\sqrt{3}}$ が打ち消しあうため、体積からは$\sqrt{3}$が消え$\sqrt{2}$が残る。正三角形をもとにした立体の問題なのに$\sqrt{3}$に関係しないことは意外な結果といえる。

Ｖを求める途中で出てきた式、

$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(4a-3)(-4a+5)(2a^2-4a+3)}$ の$\sqrt{}$ 内を微分して０とおくと、

$-4(a-1)(32a^2-64a+39)=0$

　第１項より、$a=1$，第２項の２次方程式は、その判別式が$64^2-4\cdot32\cdot39<0$となるため、２つの虚数根を持つ。よって最大値となるのは$a=1$のときであり、それは一辺が１の正四面体の場合であることがわかる。

　⑨式で表される等面四面体の体積をグラフにすると図２のとおりである。

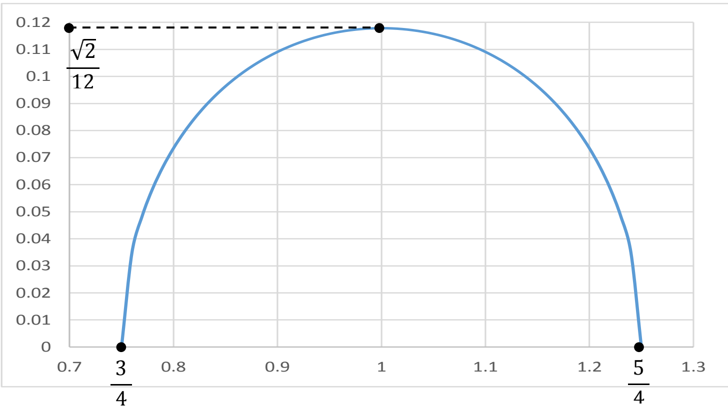
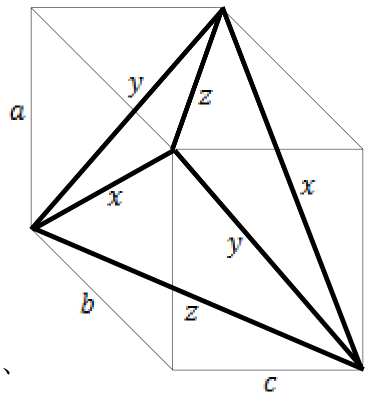


図２

--------------------------------------　模範解答　--------------------------------------



右図より、$a^2+b^2=x^2$ ，$a^2+c^2=y^2$，$b^2+c^2=z^2$　従って、

$$a^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$$

$$b^2=\frac{1}{2}(x^2+z^2-y^2)$$

$$c^2=\frac{1}{2}(y^2+z^2-x^2)$$

　直方体からＶの等面四面体を取り除いた残りの４つの四面体の体積は、

どれも $\dfrac{abc}{6}$ なので、$V = abc - 4\cdot\dfrac{abc}{6} = \dfrac{abc}{3}$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{8}(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

これに、$y = 2 - x$，$z = 1$ を代入し、

$$V = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{[x^2+(2-x)^2-1][x^2+1-(2-x)^2][(2-x)^2+1-x^2]}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{-32(x^2-2x)^2-78(x^2-2x)-45} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{-32\left[(x^2-2x)+\frac{39}{32}\right]^2+\frac{81}{32}}$$

$$\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{-32\left[(x-1)^2+\frac{7}{32}\right]^2+\frac{81}{32}}$$

V の値が最大となるのは、$(x-1)^2+\dfrac{7}{32}$ が最小のとき、すなわち、$x = 1$ のときで、その最大値は

$V = \dfrac{1}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ である。

私の解答は最初から $a + b = 2$ として計算したので、ここで一般解を求めてから $a + b = 2$ の条件を入れて解を導いてみよう。

$x^2+y^2+z^2 = b^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$⑩

$(x-c)^2+y^2+z^2 = a^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$⑪

$(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2+z^2 = c^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$⑫

$$\cos\alpha = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2ac}$$

⑪ − ⑩より、$x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$⑬

⑫ − ⑩より、$y = \dfrac{1}{\sin\alpha}\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} - x\cos\alpha\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2-3c^4}{2c\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

⑩，⑬，⑭から、

$$z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2-\left(\frac{(a^2-b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2-3c^4}{2c\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

$sin\,\alpha$ と⑮より、

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot sin\,\alpha\cdot z=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2ac}$$

$$\times\sqrt{\frac{2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4c}\cdot\sqrt{2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2-c^2)}$$

ここで、$b=2-a$，$\mathrm{c}=1$ を入れると、

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\sqrt{(4a-3)(-4a+5)(2a^2-4a+3)}$$

というように前出の式が導かれ、以降は同様である。

辺の長さが a，b，c の直方体の、それぞれ対角の位置にある４点を結ぶことで等面四面体の一般形ができることに気付けば、比較的容易に模範解答と同じ結果を得ることができると思われる。

模範解答は、各辺が $x=\sqrt{a^2+b^2}$，$\mathrm{y}=\sqrt{a^2+c^2}$，$\mathrm{z}=\sqrt{b^2+c^2}$ の等面四面体の一般形で体積を計算し、それに $y=2-x$，$z=1$ を代入して最大値を求めており非常にシンプルで明快である。

等面四面体の体積を求める問題「３辺の長さが６，７，８である三角形４つからなる等面四面体の体積は？」など、類題が大学の入試問題として出題されている。

「３辺が６，７，８のときの体積」は上記(a)式を用いて、次のように簡単に計算できる。

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{8}(6^2+7^2-8^2)(6^2+8^2-7^2)(7^2+8^2-6^2)}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{8}\cdot 21\cdot 51\cdot 77}=\frac{2}{7}\sqrt{\frac{11\cdot 17}{2}}=33.84\cdots$$

（２０２０．０１．１５）