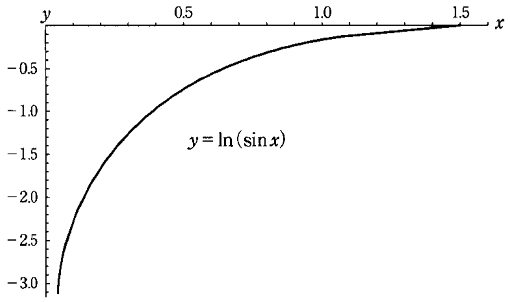
７８「数学 超・超絶難問（２）」

『オイラーの積分』

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\,x)\,dx$$

これはオイラーの技巧的な計算として有名です。この値は？



じっくり考えて解いてしまいましょう。解けたら、オイラーと肩を並べた気分にひたれるでしょう。

この問題は、本のタイトルどおり超・超難問といってよい。オイラーは素晴らしい発想でこの問題を解いたのだが、あなたは解けますか？という挑戦。

かなり時間をかけて、この積分の問題を考えたがどうしても解けなかった。というのも、この積分は初等関数では表せない関数だったのである。それをオイラーは技巧を駆使して、いとも簡単に解いてしまった。ただし、定積分の問題だからこそ解くことができた問題である。まず、本の模範解答を載せる。

（模範解答）

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\,x)\,dx$ とおく。

積分変数を x から $\frac{\pi}{2} - x$ に取り換えて、

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left[sin(\frac{\pi}{2} - x)\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos\,x)\,dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [l\,n(sin\,x) + ln(cos\,x)]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,n\big(sin\,x \cdot cos\,x\big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(\frac{1}{2} sin\,2x)\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} ln2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\,2x)\,dx$$

積分変数を x から $\frac{x}{2}$ に取り換えて、

$$= -\frac{\pi}{2} ln2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(sin\,x)\,dx = -\frac{\pi}{2} ln2 + I$$

従って、$I = -\frac{\pi}{2} ln2$　これが求める答えである。

普通にやれば初等関数で表すことができない、難しい積分（定積分）の問題が、積分変数の変換だけであっさり解けてしまうのは本当に凄い！これは、和を積にすることができる対数関数の性質、$ln(sin\,x)+ln(cos\,x)=ln(sin\,x\cdot cos\,x)$と、三角関数の$sin\,x$と$cos\,x$とが対称であること、及び倍角の公式を巧みに使うことによって、計算を簡単にすることに成功したため解くことができた問題である。

（解 答）

真正面から挑むと、これほど難しい問題だったということがわかる。以下の解き方はこの本が目指しているものではないが、普通にやればこうなるということを示そう。

部分積分 $\displaystyle\int u'v=uv-\int uv'$ を用いる。

$y=ln(sin\,x)$， $sin\,x=t$ とおくと、$y=ln(t)$， $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$， $\dfrac{dt}{dx}=cos\,x$ より、

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{t}\cdot cos\,x=\dfrac{cos\,x}{sin\,x}=cot\,x$ から、 $\dfrac{d}{dx}ln(sin\,x)=cot\,x$

$u=x$, $v=ln(sin\,x)$ とおくことにより、

$$\int ln(sin\,x)\,dx=x\,ln(sin\,x)-\int x\,cot\,x\ dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\int ln(sin\,x)\,dx+\int x\,cot\,x\ dx=x\,ln(sin\,x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$ と変形して、

$y=ln(sin\,x)$， $y=x\,cot\,x$， $y=x\,ln(sin\,x)$ のグラフを $0\sim\dfrac{\pi}{2}$ の間で描くと図 1 のとおりとなる。

$x=0$ のとき、$ln(sin\,x)=-\infty$, $x\,cot\,x=1$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$ln(sin\,x)=0$, $x\,cot\,x=0$ である。

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$x\,ln(sin\,x)=0$ なので ②より、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\,x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,cot\,x\ dx=0$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\,x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,cot\,x\ dx$ は積分値の符号は逆だが値は同じである。

つまり $x=0\sim\frac{\pi}{2}$ の区間で 曲線 $ln(sin\,x)$ ， $x\,cot\,x$ 及び x 軸に囲まれた部分の面積は、不思議なことに一致する。

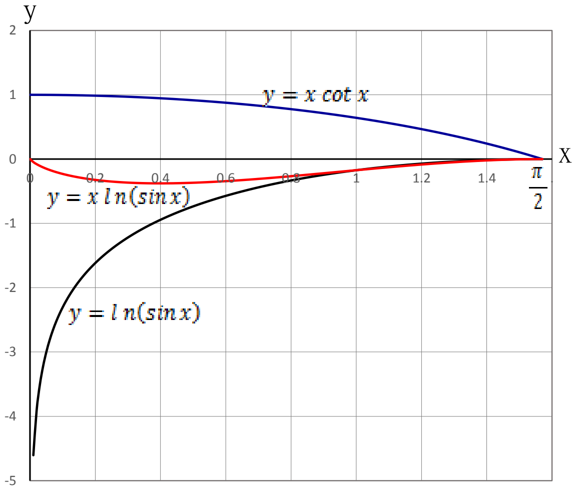


図 1

この事実は、部分積分を使って式を導いた段階で現れた数学的な面白さだと思う。

この性質を利用して $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\,x)\,dx$ を求めることができないかと考えたができなかった。

$ln(sin\,x)$ の不定積分は Walfram アルファ（計算知識エンジン）を使い、次のようになることがわかった。

$$\int ln(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}i\left[(x^2 + Li_2(e^{2ix})\right] - x\,ln\left(1 - e^{2ix}\right) + x\,ln(\sin x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdot ③$$

　ここで Li_2 は二重対数関数 $dilogarithm$（ダイログ関数）といい、

$Li_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ で定義される。

$x = 1$ とすると、 $Li_2(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

となり、リーマンゼータ関数と一致する。

　求める積分値は次式④で与えられる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,n(\sin x)\,dx = \left[\frac{1}{2}i\left[(x^2 + Li_2(e^{2ix})\right] - x\,ln\left(1 - e^{2ix}\right) + x\,ln(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdot ④$$

$e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$ から、$x = 0$ のとき $e^{2i\cdot 0} = 1$， $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $e^{2i\cdot\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

以上から、$x = 0$ のとき、$Li_2\left(e^{2ix}\right) = Li_2(e^0) = Li_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき、$Li_2\left(e^{2ix}\right) = Li_2\left(e^{i\pi}\right) = Li_2(-1)$　　$Li_2(x)$の定義から、

$Li_2(-1) = \frac{(-1)^1}{1^2} + \frac{(-1)^2}{2^2} + \frac{(-1)^3}{3^2} + \frac{(-1)^4}{4^2} + \cdots\cdots = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\cdot\right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\cdot\right)$

$= \left(\frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdot\right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\cdot\right) = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$ となるから④は、

$$= \left[\frac{1}{2}i\left[(x^2 + Li_2(e^{2ix})\right] - x\,ln\left(1 - e^{2ix}\right) + x\,ln(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}i\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right\} - \frac{\pi}{2}\cdot ln\left(1 - e^{i\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot ln(\sin\frac{\pi}{2})\right] - \left[\frac{1}{2}i\left\{0 + \frac{\pi^2}{6}\right\} - 0\cdot ln(1 - e^0) + 0\cdot ln(\sin 0)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}i\cdot\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\cdot ln(2) + \frac{\pi}{2}\cdot ln(1)\right] - \left[\frac{1}{2}i\cdot\frac{\pi^2}{6}\right] = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}\cdot ln(2)}}$$

　模範解答と一致する結果が得られた。

一見単純そうにみえた $l\,n(\sin x)$ の積分が、思いもよらず難しいものだった。

一方、$x\cot x$ の不定積分は、

$$\int x\cot x\ dx = x\,ln\left(1 - e^{2ix}\right) - \frac{1}{2}i\left[(x^2 + Li_2(e^{2ix})\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdot ⑤$$ で与えられる

$$\int ln(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}i\left[(x^2 + Li_2(e^{2ix})\right] - x\,ln\left(1 - e^{2ix}\right) + xl\,n(\sin x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdot ③$$ だったので、

③＋⑤を作ると、$\int ln(\sin x)\,dx + \int x\cot x\ dx = x\,l\,n(\sin x)$　となり②に一致する。

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \; dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$ だから、積分値として $\cot x$ に全く関係のなさそうな $\ln 2$ が現れるのが不思議だが、これは前出の式

$\frac{d}{dx} l\,n(\sin x) = \cot x$ の両辺を積分すると、$l\,n(\sin x) = \int \cot x \; dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$

であるから、$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ として現れる $\ln|f(x)|$ に由来するものである。

（２０２０．０２．０４）