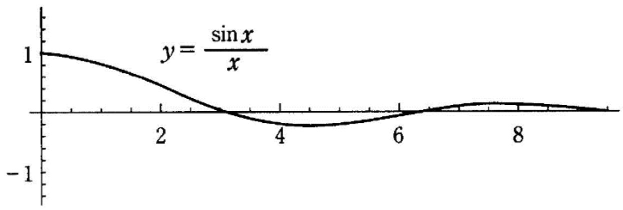
７９「数学 超・超絶難問（３）」

『オイラーの定理』

$$\int_0^\infty \frac{sin\,x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

これはオイラーの定理とよばれています。

オイラーはこれも技巧的な計算で導いたのですが、あなたはこれを証明できますか？



本問を自力で解けたら、天才中の天才でしょうね。

この問題も、本のタイトルどおり超・超難問である。自力で解けたら天才中の天才、という問題だから、自分に解けるはずはないと気楽に挑戦してみたがやはり解けなかった。

$\frac{sin\,x}{x}$ に何か都合のいい関数を掛けて、微分すると x が出てきて $\frac{sin\,x}{x}$ の分母と打ち消すようにできればいいはずなのだが、その関数が思いつかない。

かなり時間をかけて、この問題を考えたが結局だめだった。やはり、この積分も初等関数では表せない関数であった。まず、本の模範解答を載せる。

（模範解答）

$g(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{sin\,x}{x}dx \quad (y \geqq 0)$ と定義します。

y で微分して

$$\frac{dg}{dy} = \int_0^\infty \frac{d}{dy}\left(e^{-xy}\frac{sin\,x}{x}\right)dx = \int_0^\infty -xe^{-xy}\frac{sin\,x}{x}dx = -\int_0^\infty e^{-xy}\,sin\,x\,dx$$

部分積分を２回行なって、$\frac{dg}{dy} = -\frac{1}{1+y^2}$

両辺を積分して、 $\mathrm{g}(y) = C - \arctan y$ 　　（※注）

$\mathrm{g}(\infty) = 0$ なので、$0 = C - arctan\,\infty = C - \frac{\pi}{2} \quad \therefore C = \frac{\pi}{2}$

ゆえに、$g(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{sin\,x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \arctan y$

$y=0$ とおくと、$arctan\,0=0$ より、$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{sin\,x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

(※注)　$tan\,x=y$ であるとき、

$\dfrac{dx}{dy}=cos^2x=\dfrac{1}{1+tan^2x}=\dfrac{1}{1+y^2}$ 、$tan\,x=y\ \Leftrightarrow arctan\,y=\ x$ なので、$(\arctan y)'=\dfrac{1}{1+y^2}$

この模範解答では「部分積分を２回行う」ところが省略されている。

実際に $-\displaystyle\int e^{-xy}\,sin\,x\,dx$ の不定積分について部分積分を回２行うと、結果は $\dfrac{e^{-xy}(y\,sin\,x+\cos x)}{1+y^2}$

となり、これを定積分することによって、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-xy}(y\,sin\,x+\cos x)=-1$ から

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-xy}(y\,sin\,x+\cos x)}{1+y^2}dx=-\frac{1}{1+y^2}$ になるという詳しい説明があった方が親切である。

（解 答）

何か関数を掛けて、微分するとx が出てきて $\dfrac{sin\,x}{x}$ の分母と打ち消しあうようにすればよい、

ということまでは良かったのだが、e^{-xy} を掛けて y で微分するというところまでは気付かなかった。これをx で微分している限りx は出てこない。

例えば、このまま部分積分をしてみると、

$\displaystyle\int uv'=uv-\int u'v$ において、$u=\dfrac{sin\,x}{x}$，$v'=1$（これを積分すれば x が出てくる）とすると、

$u'=\dfrac{xcos\,x-sin\,x}{x^2}$，$v=x$ だから、$\displaystyle\int\frac{sin\,x}{x}dx=\frac{sin\,x}{x}\cdot x-\int\frac{xcos\,x-sin\,x}{x^2}\cdot xdx$

$=sin\,x-\displaystyle\int cos\,xdx+\int\frac{sin\,x}{x}dx$ となり、結果的に恒等式 $\displaystyle\int cos\,xdx=sin\,x$ となってしまう。

また、$u=sin\,x$，$v'=\dfrac{1}{x}$ とすると、$u'=\cos x$，$v=ln\,x$ だから、

$\displaystyle\int\frac{sin\,x}{x}dx=sin\,x\cdot ln\,x-\int\cos x\cdot ln\,x\,dx$，さらに$\displaystyle\int\cos x\cdot ln\,x\,dx=\sin x\cdot ln\,x-\int\frac{sin\,x}{x}dx$ から、

$\displaystyle\int\frac{sin\,x}{x}dx=sin\,x\cdot ln\,x-\left(\sin x\cdot ln\,x-\int\frac{sin\,x}{x}dx\right)$，$0=0$ となってしまい部分積分ができない。

調べたところ、この問題は「ディリクレ積分」といい、とても有名な問題だということがわかった。この証明は、部分積分による方法，フーリエ変換による方法，複素積分による方法などいくつか解く方法がある。それらを分かりやすく述べる。

まず、$y=\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフを示す。

図１のように、y 軸を中心に左右対称で、最大値は $y=0$ のとき $x=1$、 x が大きくなると、どんどん 0 に近づいていく。この曲線と x 軸に囲まれた部分の面積を 0 から∞まで積分するとそれが $\frac{\pi}{2}$ になるという問題である。

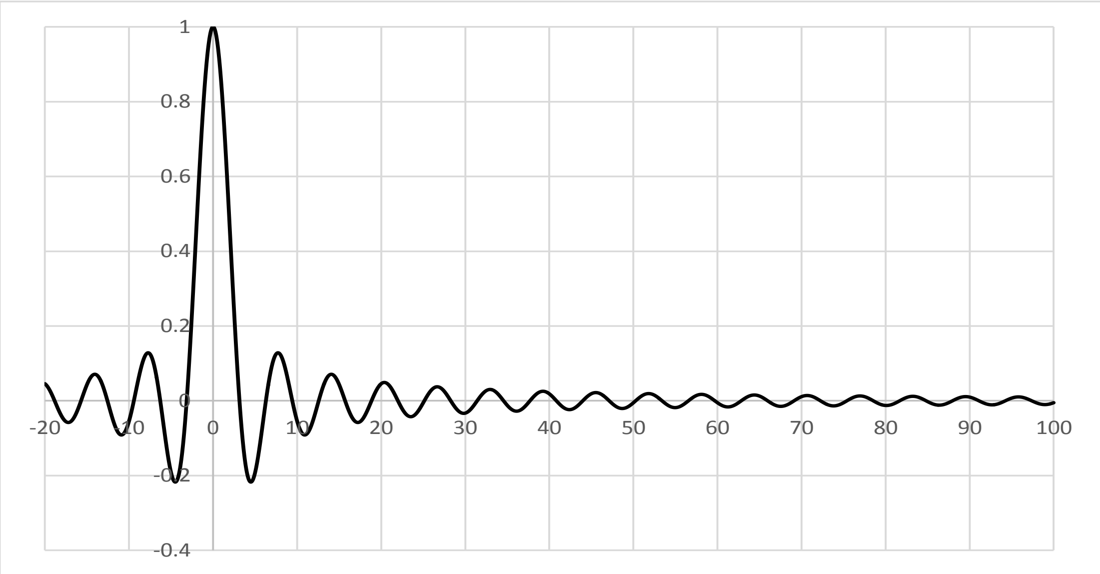


図１ $y=\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ

【１】部分積分による証明

$$A=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$ とおく。

$$A=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\right]dt$$ と考えて、まず [ ] 内の積分を行う。

$$A_1=\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$$ として部分積分を行う。

部分積分 $\int u'v=uv-\int uv'$ において、$u'=e^{-tx}$, $v=\sin x$ とすると、$u=-\frac{1}{t}e^{-tx}$, $v'=\cos x$ だから、

$$\int e^{-tx}\sin x\,dx=-\frac{1}{t}e^{-tx}\sin x+\frac{1}{t}\int e^{-tx}\cos x\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\int e^{-tx}\cos x\,dx$ に部分積分を行う。$u'=e^{-tx}$, $v=\cos x$ とすると、$u=-\frac{1}{t}e^{-tx}$, $v'=-\sin x$ だから

$$\int e^{-tx}\cos x\,dx=-\frac{1}{t}e^{-tx}\cos x-\frac{1}{t}\int e^{-tx}\sin x\,dx$$ これを②に入れて、

$$\int e^{-tx}\sin x\,dx=-\frac{1}{t}e^{-tx}\sin x+\frac{1}{t}\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\cos x-\frac{1}{t}\int e^{-tx}\sin x\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{t}e^{-tx}\,sin\,x - \frac{1}{t^2}e^{-tx}\,cos\,x - \frac{1}{t^2}\int e^{-tx}\,sin\,x\,dx$$

$\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\int e^{-tx}\,sin\,x\,dx = -\frac{1}{t^2}e^{-tx}\left(sin\,x\cdot t+\cos x\right)$　　よって $\int e^{-tx}\,sin\,x\,dx$ は、

$\int e^{-tx}\,sin\,x\,dx = -\frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}e^{-tx}\left(sin\,x\cdot t+\cos x\right) = -\frac{1}{1+\,t^2}e^{-tx}\left(sin\,x\cdot t+\cos x\right)$ となる。

これは t を y に置き換えれば、２ページに示した式と全く同じ式である。
定積分に戻して計算すると、

$$A_1 = \int_0^\infty e^{-tx}\,sin\,x\,dx = -\frac{1}{1+\,t^2}\left[e^{-tx}\left(sin\,x\cdot t+\cos x\right)\right]_0^\infty = -\frac{1}{1+\,t^2}(0-1) = \frac{1}{1+\,t^2}\qquad \cdots\cdots\text{③}$$

次に①において、x と t の積分順序を変えると、

$$A = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-tx}\,sin\,x\,dt\right]dx$$

[　] 内を A_2 として、$A_2 = \int_0^\infty e^{-tx}\,sin\,x\,dt$ の積分を行うと、

$$A_2 = \int_0^\infty e^{-tx}\,sin\,x\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}(sin\,x)\right]_0^\infty = -\frac{sin\,x}{x}\left[e^{-tx}\right]_0^\infty = -\frac{sin\,x}{x}(0-1) = \frac{sin\,x}{x}\qquad\cdots\cdots\text{④}$$

ここに求めるべき $\frac{sin\,x}{x}$ が出てきた。

$\int_0^\infty A_1 dt$ と $\int_0^\infty A_2 dx$ は同じであるから、③，④より $\int_0^\infty \frac{1}{1+\,t^2}dt = \int_0^\infty \frac{sin\,x}{x}dx$ である。

従って、$\int_0^\infty \frac{sin\,x}{x}dx$ の値は $\int_0^\infty \frac{1}{1+\,t^2}dt$ を計算すればよい。

$\int_0^\infty \frac{1}{1+\,t^2}dt = \left[\tan^{-1}t\right]_0^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$　これで $\int_0^\infty \frac{sin\,x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ が証明された。

この方法は、t を y に置き換えれば模範解答とほぼ同じものである。

【２】フーリエ変換による証明

フーリエ変換は、時間 t の関数 $f(t)$ を周波数 ω の関数 $F(\omega)$ に移す変換で、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

またフーリエ逆変換は、

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$　と表される。

フーリエ変換は、無線通信における正弦波や有線通信における方形波（ディジタル信号）などの信号の周波数成分を解析するために利用されており、情報通信技術に欠かせないものとなっている。

このフーリエ変換を利用して $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ を証明することができる。

$f(t)$ を図２に示すように、$-\infty<t<\infty$で連続関数とし、次のように定義する。

$$\left.\begin{array}{lll} -\infty<t<-1 & \text{のとき } f(t)=0 & \text{（区間１）} \\ -1<t<0 & \text{のとき } f(t)=-1 & \text{（区間２）} \\ 0<t<1 & \text{のとき } f(t)=1 & \text{（区間３）} \\ 1<t<\infty & \text{のとき } f(t)=0 & \text{（区間４）} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

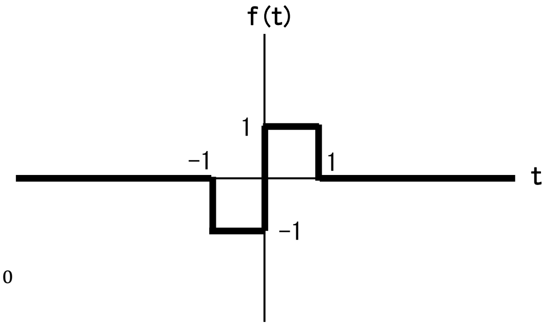


図２

この$f(t)$ は広義積分可能である。

この $f(t)$ をフーリエ変換する。

⑤ をフーリエ変換すると、区間２で$f(t)=-1$,

区間３で $f(t)=1$ だから、

$$F(\omega)=\int_{-1}^{0}(-1)\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1}(1)\cdot e^{-i\omega t}dt=-\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{0}$$

$$+\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{i\omega}\left(1-e^{i\omega}-e^{-i\omega}+1\right)=\frac{2i}{\omega}(\cos\omega-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

⑥ のフーリエ逆変換は、

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i}{\omega}(\cos\omega-1)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega, \qquad e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$$ を入れると、

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\cos\omega-1)(\cos\omega t+i\sin\omega t)}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t\,(\cos\omega-1)}{\omega}d\omega-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t\,(\cos\omega-1)}{\omega}d\omega\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

⑦ の第１項は、$\omega=-1$ を入れると全体がマイナスになるので奇関数で、その積分値は０となる。
一方、第２項はプラスになるので偶関数である。後述する補足「図３」「図４」そのグラフを示す。
第２項は次のように計算できる。

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t\,(\cos\omega-1)}{\omega}d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t\,(\cos\omega-1)}{\omega}d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega t\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)d\omega$$

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t\cos\omega}{\omega}d\omega+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

ここで $t=\alpha$ とすると、$\alpha=1$ で $f(t)=0$ だから、$f(\alpha)=0$ である。

⑧ に $t=\alpha$ を入れると、

$$f(\alpha)=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha\omega\cos\omega}{\omega}d\omega+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha\omega}{\omega}d\omega=0$$

よって、$\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha\omega\cos\omega}{\omega}d\omega=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha\omega}{\omega}d\omega$ が成り立つ。

$\displaystyle\sin\alpha\omega\cos\omega=\frac{1}{2}[\sin(\alpha\omega+\omega)+\sin(\alpha\omega-\omega)]=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+1)\omega+\sin(\alpha-1)\omega]$ だから、

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\left[\frac{sin(\alpha+1)\omega}{\omega}+\frac{sin(\alpha-1)\omega}{\omega}\right]d\omega=\int_0^\infty \frac{sin\,\alpha\omega}{\omega}d\omega \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑨}$$

$u=(\alpha+1)\omega$ とおくと、$\mathrm{d}u=(\alpha+1)d\omega$ ，$\dfrac{sin(\alpha+1)\omega}{\omega}d\omega=\dfrac{sin\,u}{\frac{u}{\alpha+1}}\dfrac{du}{\alpha+1}=\dfrac{sin\,u}{u}du$

$v=(\alpha-1)\omega$ とおくと、$\mathrm{d}v=(\alpha-1)d\omega$ ，$\dfrac{sin(\alpha-1)\omega}{\omega}d\omega=\dfrac{sin\,v}{\frac{v}{\alpha-1}}\dfrac{dv}{\alpha-1}=\dfrac{sin\,v}{v}dv$

となるから、第１項と第２項は同じであり ⑨の左辺は次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\left[\frac{sin(\alpha+1)\omega}{\omega}+\frac{sin(\alpha-1)\omega}{\omega}\right]d\omega=\int_0^\infty \frac{sin\,\omega}{\omega}d\omega$$

よって⑨から次式が成り立つ。

$$\int_0^\infty \frac{sin\,\omega}{\omega}d\omega=\int_0^\infty \frac{sin\,\alpha\omega}{\omega}d\omega \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑩}$$

次に、$t=\dfrac{1}{2}$ とすると $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ だから、⑧に$t=\dfrac{1}{2}$ を入れると、

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin\frac{\omega}{2}cos\,\omega}{\omega}d\omega+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{sin\frac{\omega}{2}}{\omega}d\omega=1$ これから、

$-\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin\frac{\omega}{2}cos\,\omega}{\omega}d\omega+\int_0^\infty \frac{sin\frac{\omega}{2}}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$ $\dfrac{\omega}{2}=\sigma$ と変数変換すると、$\omega=2\sigma$ ，$d\omega=2d\sigma$ から

$$-\int_0^\infty \frac{sin\,\sigma\,cos\,2\sigma}{2\sigma}2d\sigma+\int_0^\infty \frac{sin\,\sigma}{2\sigma}2d\sigma=\frac{\pi}{2}$$

$sin\,\sigma\,cos\,2\sigma=\dfrac{1}{2}[sin(3\sigma)-sin\,\sigma]$ を入れると、$-\displaystyle\int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}[sin(3\sigma)-sin\,\sigma]}{\sigma}d\sigma+\int_0^\infty \frac{sin\,\sigma}{\sigma}d\sigma=\frac{\pi}{2}$

⑩$\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin\,\omega}{\omega}d\omega=\int_0^\infty \frac{sin\,\alpha\omega}{\omega}d\omega$ を使うと、上式の第１項は次のように 0 となる。よって、

$$-\int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}[sin(3\sigma)-sin\,\sigma]}{\sigma}d\sigma=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{sin3\sigma}{\sigma}d\sigma+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{sin\,\sigma}{\sigma}d\sigma=0$$

以上より、

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin\,\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$ が証明された。

（補 足）

$f(t)$ をフーリエ変換した $F(\omega)$ を逆変換する ⑦式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\left[i\int_{-\infty}^\infty \frac{cos\,\omega t\,(cos\,\omega-1)}{\omega}d\omega-\int_{-\infty}^\infty \frac{sin\,\omega t\,(cos\,\omega-1)}{\omega}d\omega\right]$$

において、$t=2$ として第１項 $\dfrac{cos\,\omega t\,(cos\,\omega-1)}{\omega}$ 及び、第２項 $\dfrac{sin\,\omega t\,(cos\,\omega-1)}{\omega}$ のグラフを描くと図３，図４のとおりとなる。図３に示す第１項は奇関数であり、その積分値は 0 となる。

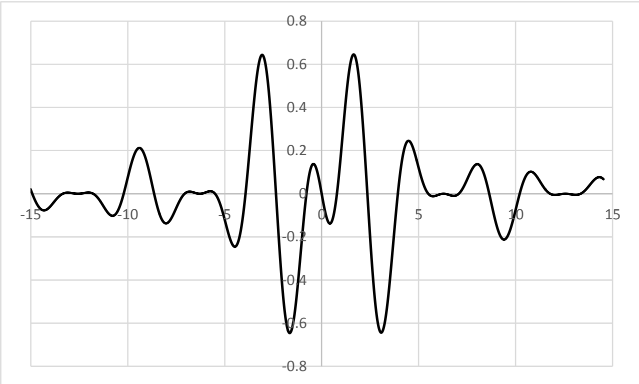


図３　$y = \dfrac{\cos 2x\,(\cos x - 1)}{x}$　のグラフ

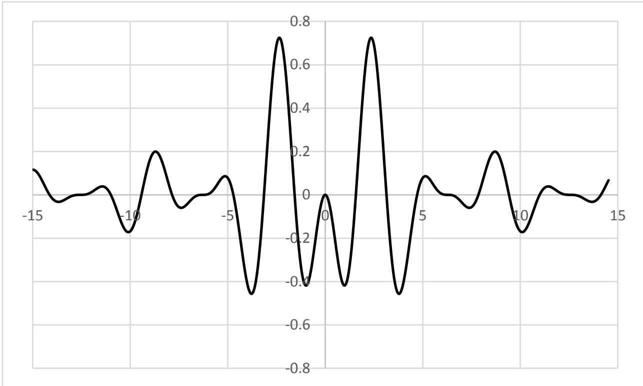


図４　$y = \dfrac{\sin 2x\,(\cos x - 1)}{x}$　のグラフ

従って $f(t)$ は図４に示す第２項のみとなり、この積分は

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t\,(\cos\omega - 1)}{\omega}d\omega = -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\{sgn(1-t) + 2sgn(t) - sgn(1+t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[sgn(1-t) + 2sgn(t) - sgn(1+t)] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

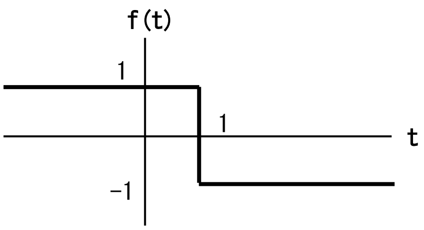
となる。ここで $sgn(1-t)$，$sgn(t)$，$sgn(1+t)$ は符号関数といい、それぞれ

$sgn(1-t) \rightarrow -\infty < \mathrm{t} < 1$ で $\mathrm{f(t)} = 1$，$1 < \mathrm{t} < \infty$ で $\mathrm{f(t)} = -1$

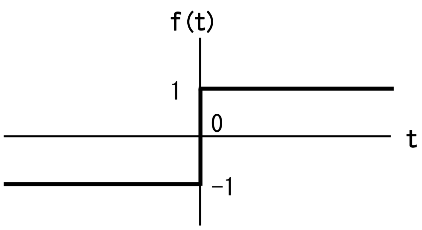
$sgn(t) \quad\; \rightarrow -\infty < \mathrm{t} < 0$ で $\mathrm{f(t)} = -1$，$0 < \mathrm{t} < \infty$ で $\mathrm{f(t)} = 1$

$sgn(1+t) \rightarrow -\infty < \mathrm{t} < -1$ で $\mathrm{f(t)} = -1$，$-1 < \mathrm{t} < \infty$ で $\mathrm{f(t)} = 1$

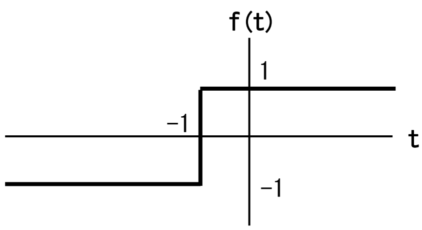
と表される。グラフで描くと下図のようになる。



$sgn(1-t)$



$sgn(t)$



$sgn(1+t)$

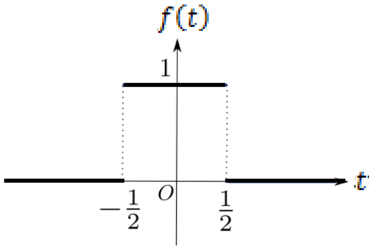
$sgn(1-t)$，$sgn(t)$，$-sgn(1+t)$ により⑪式をグラフに描くと図２と同じものが得られ、もとの $f(t)$ に戻ることが確認できる。

また別の方法として、$f(t)$ を次のように定義する。

$-\infty < t < -\frac{1}{2}$　のとき $f(t) = 0$　（区間１）

$- -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$　のとき $f(t) = 1$　（区間２）

$\frac{1}{2} < t < 1$　のとき $f(t) = 0$　（区間３）



この $f(t)$ をフーリエ変換すると、

$$F(\omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1)\cdot e^{-i\omega t}dt=\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{-i\omega}\left(e^{-\frac{i\omega}{2}}-e^{\frac{i\omega}{2}}\right)=\frac{1}{-i\omega}\left(cos\frac{\omega}{2}-i\,sin\frac{\omega}{2}-cos\frac{\omega}{2}-i\,sin\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\frac{1}{-i\omega}\cdot\left(-2i\,sin\frac{\omega}{2}\right)=\frac{2}{\omega}sin\frac{\omega}{2}=\frac{sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$

以上から $F(\omega)=\dfrac{sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$ となり、これを逆変換の式に入れ $t=0$ とすると$f(t)=1$ である。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{i\omega t}\,d\omega$$

$f(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{0}\,d\omega=1$ ， $\dfrac{\omega}{2}=\sigma$ とおくと $d\omega=2d\sigma$ から、

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{sin\,\sigma}{\sigma}\,2d\sigma=1$， $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{sin\,\sigma}{\sigma}\,d\sigma=\pi$， $\dfrac{sin\,\sigma}{\sigma}$ は偶関数だから、$2\displaystyle\int_{0}^{\infty}\dfrac{sin\,\sigma}{\sigma}\,d\sigma=\pi$

ゆえに、$\displaystyle\int_{0}^{\infty}\dfrac{sin\,\sigma}{\sigma}\,d\sigma=\dfrac{\pi}{2}$ が証明された。

【３】複素積分による証明

この方法は複素積分の問題としてはごく一般的なものである。

実関数 $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\dfrac{sin\,x}{x}\,dx$ の定積分を求めるために、複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を考える。

この関数は実軸上の $z=0$ に極をもつ。

積分経路として、特異点を避けて図５に示すようにとる。図５において、C_1 は半径Rの上半円， C_2 は半径 ε の上半円である。このように積分路をとれば特異点 $z=0$ は積分路の外にあるので、コーシーの積分定理より $\oint f(z)dz=0$ であり、積分方向を反時計周りにとると次式が成り立つ。

$$\oint_{C}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑫}$$

⑫の右辺、第１項と第３項は実軸上の積分なので変数は x としている。

この実数積分については、第１項の変数を $x=-x$ に置き換えると、

$\displaystyle\int_{-R}^{-\varepsilon}\dfrac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{\varepsilon}^{R}\dfrac{e^{-ix}}{x}dx$ となるので第３項とまとめると、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx$$

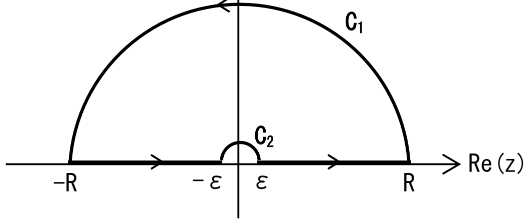


図５　積分路

ここで、$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ を用いて $sin\,x$ を表すと、

$sin\,x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ となるので前式に代入して、

$\displaystyle\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{2i\sin x}{x}dx$ となる。これを⑫に戻すと、

$$\int_{\varepsilon}^{R}\frac{2i\sin x}{x}dx+\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

Ｃ$_2$については、$z=\varepsilon e^{i\theta}$ とあらわせるので、 $dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$ から、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}i\,\varepsilon e^{i\theta}d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}i\,e^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=-\pi i$$

Ｃ$_1$については、$z=Re^{i\theta}$ とあらわせるので、 $dz=iRe^{i\theta}d\theta$ から $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}ie^{iRe^{i\theta}}d\theta$

$\displaystyle=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}ie^{iR(\cos\theta+isin\,\theta)}d\theta=\lim_{R\to\infty}i\int_0^{\pi}e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-Rsin\,\theta}d\theta$，ここで$\left|e^{iR\cos\theta}\right|=1$ だから

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}i\int_0^{\pi}e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-Rsin\,\theta}d\theta=0$ となり、$\displaystyle\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}dx=\pi i$ が導かれた。

よって、 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{sin\,x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ が証明された。

これまでの解き方から、一つ気付いたことがある。
部分積分による証明では、

$\displaystyle A=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-tx}\,sin\,x\,dx\,dt$ というように、$sin\,x$ に e^{-tx} を掛けて積分したが、この e^{-tx} を掛けるのはラプラス変換にとても似ているということである。とすると、ラプラス変換を使って証明できるのではないか？

ラプラス変換は、ある関数 $f(x)$ に e^{-sx} を掛けて積分して得られる s についての関数 $F(s)$ をいい、微分方程式などを解くときに利用される。また、マイナス乗の指数関数を掛けるところはフーリエ変換にも似ている。実際にやってみると、

$\displaystyle F(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 　において、$f(x)=sin\,x$ としてラプラス変換する。

$$F(s)=\int_0^{\infty}sin\,x\,e^{-sx}\,dx=\left[-\frac{1}{s}sin\,x\,e^{-sx}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}cos\,x\,e^{-sx}dx$$

$\displaystyle\int_0^{\infty}cos\,x\,e^{-sx}dx=\left[-\frac{1}{s}cos\,x\,e^{-sx}\right]_0^{\infty}-\frac{1}{s}\int_0^{\infty}sin\,x\,e^{-sx}dx$ だから、上式に代入して

$\displaystyle F(s)=\left[-\frac{1}{s}sin\,x\,e^{-sx}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}cos\,x\,e^{-sx}\right]_0^{\infty}-\frac{1}{s}\int_0^{\infty}sin\,x\,e^{-sx}dx\right\}$ より、

$s^2F(s) = -e^{-sx}\left[s\cdot sin\,x + \cos x\right]_0^\infty - F(s)$ 、ここで $-e^{-sx}\left[s\cdot sin\,x + \cos x\right]_0^\infty = 1$ となるから、

$(1+s^2)F(s) = 1$ から、$F(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$ となる。　　　………………　⑭

次に $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ の両辺を微分すると、

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\frac{de^{-sx}}{ds}\right) f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}[-xf(x)]dx = \int_0^\infty (-x)e^{-sx} f(x)dx \quad \cdots\cdots \text{⑮}$$

　つまり⑮は、$F(s)$ を微分することは、$f(x)$ に $-x$ を掛けたものをラプラス変換すればよいということを示している。⑭⑮をもとに、$\dfrac{sin\,x}{x}$ のラプラス変換 $\int_0^\infty \dfrac{sin\,x}{x} e^{-sx}\,dx$ を求める。

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty \frac{sin\,x}{x} e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty (-x)\frac{sin\,x}{x} e^{-sx}\,dx = -\int_0^\infty sin\,x\, e^{-sx}\,dx = -\frac{1}{1+s^2}$$ （$\dfrac{1}{x}$ が消去された！）

$\dfrac{d}{ds}\int_0^\infty \dfrac{sin\,x}{x} e^{-sx}\,dx = -\dfrac{1}{1+s^2}$　　この両辺を積分すると、右辺は s についての不定積分となり、

$\int_0^\infty \dfrac{sin\,x}{x} e^{-sx}\,dx = -\int \dfrac{1}{1+s^2}ds = -tan^{-1}s + C$　（C は積分定数）

$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \dfrac{sin\,x}{x} e^{-sx}\,dx = 0$ だから、$-tan^{-1}s + C = 0$，　$s \to \infty$ のとき $tan^{-1}s = \dfrac{\pi}{2}$ から、$\mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$

$tan^{-1}s = \dfrac{\pi}{2}$ となるから、$\int_0^\infty \dfrac{sin\,x}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}$ が導かれた。

　この「超・超難問」は、大数学者オイラーが技巧を凝らして解いたという問題を、そのまま解いてみなさいというものだが、何かもう少し出題の方法を工夫できなかったのだろうか？
私としては、１つの問題に対しいろいろな解き方があるというのはとても興味がわく。
　部分積分による証明は、アプローチとしては最も一般的だが、解き方としてはかなりの技巧を要するやり方だ。フーリエ変換を使った証明は思いもよらなかったが、フーリエ解析はそもそも正弦波 $sin\,x$ を対象とするもので、被変換関数をパルス状の関数とすることで、逆変換に伴い $\frac{1}{x}$ が出て来て、自然と $\frac{sin\,x}{x}$ が導き出されるところに絶妙のうまみがあることがわかった。

　複素積分による証明が、この中では計算として最も簡単だと思われるが、これはコーシーの積分定理という複素数の世界の素晴らしいテクニックを使うことにより初めて可能になったことであり、これはこれで充分納得できる。
　部分積分による証明がヒントとなったラプラス変換を利用する方法は、特別な技巧が必要なく比較的容易に証明でき、最終的には４通りの方法で証明できたことになる。（２０２０．０２．２０）