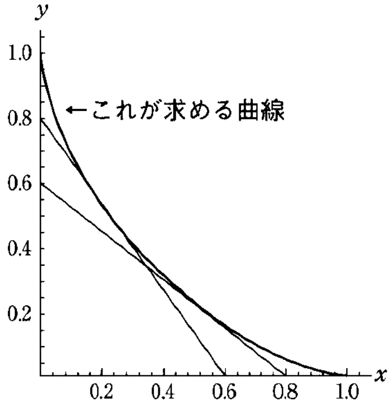
８０「数学 超・超絶難問（４）」

『壁に立てた棒の包絡線』

長さ１の棒が垂直な壁を下図のように滑っています。これから得られる包絡線（棒が通る領域と、棒が通らない領域との境界線）の方程式は？



解答を出してみて、この問題が有名な問題ということがわかった。
大学入試レベルの問題で、包絡線の問題は入試にしばしば出題されるので、受験生の傾向と対策に入っているようだ。しかし、解き方を知らずに挑むとかなりの難問である。

（解 答）

図１に示すように、求める曲線を$y=f(x)$とする。
曲線上の点 $[x_1,\ f(x_1)]$ における接線の方程式は、

$$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表すことができる。

①と x 軸の交点は $y=0$ とおいて、$x=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

①と y 軸の交点は $x=0$ とおいて、

$$y=f(x_1)-x_1f'(x_1)$$

ここで、題意より棒の長さは１だから、

$$\left[x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right]^2+[f(x_1)-x_1f'(x_1)]^2=1 \text{ が成り立つ。}$$

展開して、

$$[1+f'(x_1)^2]x^2+\left[1+\frac{1}{f'(x_1)^2}\right]y^2-2xy\left[f'(x_1)+\frac{1}{f'(x_1)^2}\right]=1$$

整理すると、

$$[1+f'(x_1)^2]\left[x-\frac{y}{f'(x_1)}\right]^2-1=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

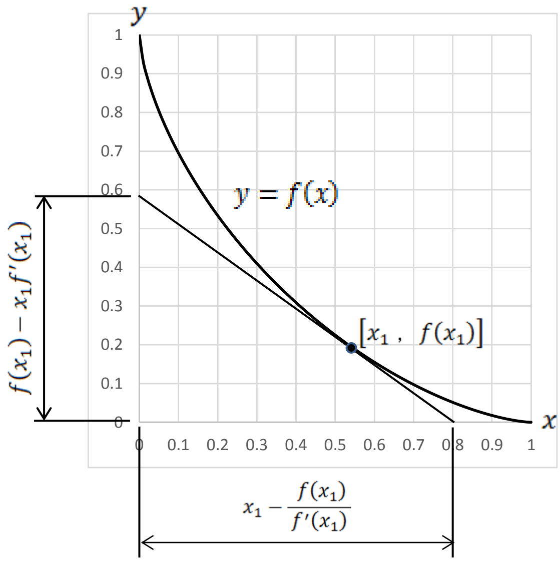


図１

②式は、x_1 が求める曲線上のどの点においても成り立つので $x_1 \to x$，$f'(x_1) = y'\ \left(\frac{dy}{dx}\right)$ とすると、

$$[1 + y'^2]\left[x - \frac{y}{y'}\right]^2 - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

が得られる。③は微分方程式（１階非線形常微分方程式）であり、これを解けば求める曲線が導かれるが、この微分方程式は簡単には解くことができない。

①　式で x_1 を変化させてできる複数の直線の包絡線は、その関数が $F(x, y, y') = 0$ と表されているとき、F を変数 y' で偏微分して 0 とおいた式、及びもとの方程式、

$\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0$，　$F(x, y, y') = 0$ から y' を消去すればよい。

③を y' について展開して微分する。

$F(x, y, y') = x^2 y'^2 - 2xyy' - 2xy\dfrac{1}{y'} + y^2\dfrac{1}{y'^2} + x^2 + y^2 - 1 = 0$ より

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y' - 2xy + 2xy\frac{1}{y'^2} - 2y^2\frac{1}{y'^3} = \frac{2(xy' - y)(xy'^3 + y)}{y'^3} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

④において $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ が成り立つのは、$xy' - y = 0$ から、$y' = \dfrac{y}{x}$　または、

$xy'^3 + y = 0$ から、$y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ のときである。

$y' = \dfrac{y}{x}$ を③に入れると、

$\left[1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]\left[x - y\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]^2 - 1 = 0$，$x - y\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$ となり成り立たない。

x，y の範囲は、$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ であるから、図１のグラフより接線の勾配（微分係数）は $y' \leqq 0$ でなければならないが、$y' = \dfrac{y}{x} \geqq 0$ なので成り立たないのである。

$y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ を③に入れると、$\left[1 + \left\{-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2\right]\left[x - \dfrac{y}{-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}\right]^2 - 1 = 0$ より、

$$\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[x + y\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

$1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$，$\left[x + y\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left[x + y \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}\right]^2 = \left[x + x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}\right]^2$

$= \left[x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\right]^2 = x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2$　であるから⑤に代入すると、

$\left[x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\right]\left[x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2\right]-1=0$， $\therefore \left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3=1$， x,yは実数なので、

求める式は $\underline{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1}$ である。

包絡線を求めるには、$\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')=0$， $F(x,y,y')=0$ から y' を消去すればよい、ということを知らないとすると、$[1+y'^2]\left[x-\dfrac{y}{y'}\right]^2-1=0$ という非常に難解な微分方程式を解かなくてはならないが、この方法を知っていれば大学受験レベルの問題になってしまう。

その理屈は、③式は x_1 を変化させてできる複数の直線に接するという条件、④式は求めるべき曲線上の点であるという条件だから、１つの微分方程式を易しい２つの条件の式に分解することにより、容易に解けるようになったということなのである。

（別 解）

図１において、曲線 $y=f(x)$ の接線（棒）と x 軸との角度を θ とすると、接線の方程式は θ を用いて $y=-\tan\theta\cdot x+\sin\theta$ と表すことができる。

これを変形して $y=-\dfrac{sin\,\theta}{\cos\theta}x+sin\,\theta$ より、$\dfrac{x}{cos\,\theta}+\dfrac{y}{sin\,\theta}=1$ が得られる。

$$F(x,y,\theta)=\frac{x}{cos\,\theta}+\frac{y}{sin\,\theta}-1=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥を θ で微分して 0 とおくと、

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}=\frac{sin\,\theta}{cos^2\,\theta}x-\frac{cos\,\theta}{sin^2\,\theta}y=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦を変形して $sin^3\,\theta\,x=cos^3\,\theta\,y$，$\mathrm{y}=\dfrac{sin^3\,\theta}{cos^3\,\theta}x$、これを⑥に代入すると

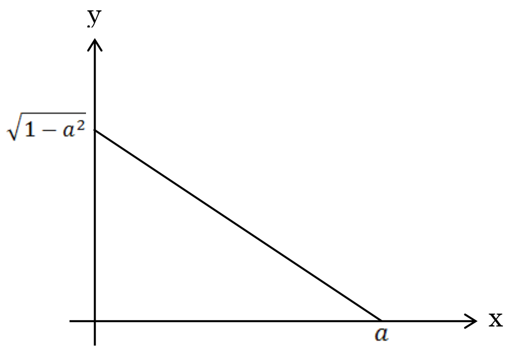
$\dfrac{x}{cos\,\theta}+\dfrac{1}{sin\,\theta}\cdot\dfrac{sin^3\,\theta}{cos^3\,\theta}x-1=0$， $\left[\dfrac{1}{cos\,\theta}+\dfrac{sin^2\,\theta}{cos^3\,\theta}\right]x=1$， $\dfrac{1}{cos\,\theta}\left[1+\dfrac{sin^2\,\theta}{cos^2\,\theta}\right]x=1$， $\dfrac{1}{cos^3\,\theta}x=1$ より、

$x=cos^3\,\theta$， $\mathrm{y}=sin^3\,\theta$ それぞれ両辺を $\dfrac{2}{3}$ 乗し、$sin^2\,\theta+cos^2\,\theta=1$ を使うと

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ が得られる。

（模範解答）

右図のように、棒の端が $(a,\ o)$ にあるとき、棒の方程式は、



$$y=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}x+\sqrt{1-a^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

この棒と「端が $a+\Delta a$ にあるときの棒」との交点が、

$\Delta a \to 0$ で包絡線上の点となります。

この交点は、x を固定するとき、a の値が変わっても y の値が変わらないので、$\frac{dy}{dx}=0$ でなければなりません。

ゆえに $\dfrac{dy}{da}=\dfrac{x-a^3}{a^2\sqrt{1-a^2}}=0$ 　∴ $a=x^{\frac{1}{3}}$，この値を①に代入して、

$y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 　∴ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ （ちなみに、この曲線はアストロイド($astroid$)です。）

（２０２０．０３．０３）