８１「数学 超・超絶難問（５）」

『$\boldsymbol{sin\,x = 0}$ は複素根を持たない』（オイラー）

$sin\,x = 0$ が実根のみなら、等式

$sin\,x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots\cdots$ オイラーがバーゼル問題を解くために使った式

が成り立つのは直感的にわかりますね。

ところで、この等式が成り立つためには、$sin\,x = 0$ が複素根を持たないことの証明が必要（「$sin\,x = 0$ には複素根があるのでは？」という疑問は実際、ダニエル・ベルヌーイが述べました）なので、オイラーはその証明もしました。さて、どのように証明したらいいのでしょう？

なお、ほとんどの読者は、方針がまったく立たないでしょうから、ヒントを下に書いておきます。完全に自力で解きたい人は、そこを見ないように注意してください。

（ヒント）

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

これはオイラーの公式です。また、これを使って導ける下２式もオイラーの公式です。

$cos\,x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$， $sin\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

「オイラーがバーゼル問題を解くために使った式」について、なぜ複素根を持たないことの証明が必要かというと、この式が $sin\,x$ を $\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$ という式の積の形で表したものとなっているためだ。

ドイツのクンマーは、フェルマーの方程式 $x^p + y^p = z^p$（p は素数）を証明するため、一般解を求めようとこの左辺を因数分解し、$x^p + y^p = (x+y)\left(x+\zeta_p^1 y\right)\left(x+\zeta_p^2 y\right)\left(x+\zeta_p^3 y\right)\cdots\cdot\left(x+\zeta_p^{p-1} y\right) = z^p$

とした。ここで、ζ_p^1，ζ_p^2，$\cdots\cdot\zeta_p^{p-1}$ は１の p 乗根を表す複素数である。

ここでクンマーは、複素数の領域では素因数分解の一意性が必ずしも成り立たない場合があることに気付き、イデアルの概念を導入し素因数分解の一意性を成り立たせることで飛躍的に証明を進めた。

以上のことから、オイラーの式 $x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots\cdots$ においても、複素数の範囲に解がないことが確認されなければ、素因数分解がこの一通りであることにはならず、他にも解が存在することになってしまう。

この問題を証明する重要性は以上のように難解であるが、問題としては超・超絶難問の中にあって、比較的難しくない問題である。ヒントで与えられたオイラーの公式も当然知っているので、自分としては難なく解くことができた。

（解 答）

$sin\,x=0$ が複素根を持ったとして、その根を $x=a+ib$ （ a,bは実数）とすると、
$sin(a+ib)=0$ が成り立たなくてはならない。

これを展開して、$sin(a+ib)=sin\,a\cdot cos(ib)+cos\,a\cdot sin(ib)=0$ ……………… ①

$cos\,\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$， $sin\,\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ において $\theta=ib$ とすると、

$cos(ib)=\dfrac{e^{i(ib)}+e^{-i(ib)}}{2}=\dfrac{e^{b}+e^{-b}}{2}$， $sin(ib)=\dfrac{e^{i(ib)}-e^{-i(ib)}}{2i}=-\dfrac{e^{b}-e^{-b}}{2i}$ が得られ、

これを①に代入して、

$sin\,a\cdot\dfrac{e^{b}+e^{-b}}{2}-cos\,a\cdot\dfrac{e^{b}-e^{-b}}{2i}=0$ ……………… ②

②を i について整理し、 $i=$ 　の式にすると、

$i=\dfrac{e^{b}-e^{-b}}{e^{b}+e^{-b}}\cdot\dfrac{cos\,a}{sin\,a}$ ……………… ③

③の右辺において、 a,b は実数だから、

$\dfrac{e^{b}-e^{-b}}{e^{b}+e^{-b}}$ 及び $\dfrac{cos\,a}{sin\,a}$ はいずれも虚数となることはないので、③は成り立たない。

従って、$sin(a+ib)=0$ を成り立たせる複素数 $a+ib$ は存在しないことになり、$sin\,x=0$ は複素根を持たないことが証明された。

（模範解答）

$P_n(x)=\dfrac{1}{2i}\left[\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^{n}-\left(1-\dfrac{ix}{n}\right)^{n}\right]$ とおきます。

$sin\,x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$

$P_n(x)=0$ の根を n で表わし、$n\to\infty$ とすれば、$sin\,x=0$ の根がすべて得られます。

$P_n(x)=0$ のときは、

$$\left(1+\frac{ix}{n}\right)^{n}=\left(1-\frac{ix}{n}\right)^{n}$$

$$1+\frac{ix}{n}=e^{\frac{2k\pi i}{n}}\cdot\left(1-\frac{ix}{n}\right)^{n},\qquad x=\frac{n}{i}\cdot\frac{e^{\frac{k\pi i}{n}}-e^{-\frac{k\pi i}{n}}}{e^{\frac{k\pi i}{n}}+e^{-\frac{k\pi i}{n}}}=n\,tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} n\,tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=k\pi$ （kは任意の整数）

したがって、$sin\,x=\lim_{n\to\infty}P_n(x)=0$ は複素根を持ちません。

（２０２０．０３．１４）