８２「数学 超・超絶難問（６）」

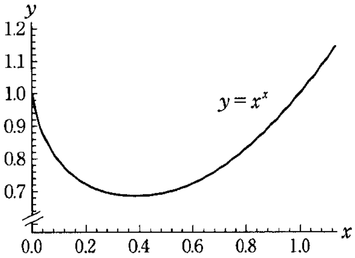
『ヨハン・ベルヌーイの定積分』

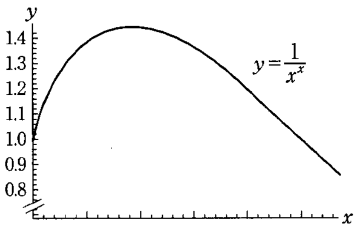
ヨハン・ベルヌーイは１，６９７年に、以下の等式を導きました。

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots\cdots\cdots$$

あなたはこれらを導くことができますか？





本問は、導き方を思いつくまで、かなり時間がかかるかもしれません。解けるまですくなくとも１週間は考えてみましょう。

これは本物の超・超難問である。題意の定積分がとても美しい式で表されることに魅せられ、是非自力で解きたいと思い挑戦したが、最初の数日間は全く手も足も出なかった。「少なくとも１週間は考えてみよう」ということなのでかなり時間を使って考えた。

ヒントは、導くべき式が初めから与えられていることだ。解が級数として与えられているので、テーラー展開した形が「解」に似ているものを探せばよいことに気付いた。

そこで思い当たったのが、 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$ である。

気になったのは、解の級数は分母が整数のべき乗なのに対し、テーラー展開の方は分母が階乗であることだ。

（解 答）

$x^x = e^{x\ln x}$ $(\ln x; \log_e x)$ と表せるから、これを $x=0$ でテーラー展開すると、

$$e^{x\ln x} = 1 + \frac{x\ln x}{1!} + \frac{(x\ln x)^2}{2!} + \frac{(x\ln x)^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\int_0^1 x^x\,dx = \int_0^1 e^{x\ln x}\,dx = \int_0^1 \left[1 + \frac{x\ln x}{1!} + \frac{(x\ln x)^2}{2!} + \frac{(x\ln x)^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\right]dx \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を１項ずつ積分していく。

【０乗項】

$$\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$$

【１乗項】

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,ln\,x}{1!}dx$，　不定積分 $\displaystyle\int x\,ln\,x\,dx$ を部分積分により計算する。

$\displaystyle\int x\,ln\,x\,dx = x(x\,ln\,x - x)$ であることに注意して、

$$\int x\,ln\,x\,dx = x(x\,ln\,x - x) - \int (x\,ln\,x - x)\,dx = x^2\,ln\,x - x^2 - \int x\,ln\,x\,dx + \int xdx$$

$2\displaystyle\int x\,ln\,x\,dx = x^2\,ln\,x - x^2 + \frac{1}{2}x^2 = x^2\,ln\,x - \frac{1}{2}x^2$　よって、$\displaystyle\int x\,ln\,x\,dx = x^2\left(\frac{ln\,x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$ln\,1 = 0$，$ln\,0 = -\infty$ だから、

$$\int_0^1 \frac{x\,ln\,x}{1!}dx = \frac{1}{1!}\left[x^2\left(\frac{ln\,x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2^2}$$

【２乗項】

$\displaystyle\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^2}{2!}dx$，　不定積分 $\displaystyle\int (x\,ln\,x)^2 dx$ を部分積分により計算する。

$\displaystyle\int ln^2\,x\,dx = x(ln^2 x - 2\,ln\,x + 2)$ であることに注意して、

$$\int (x\,ln\,x)^2 dx = x^2[x(ln^2 x - 2\,ln\,x + 2)] - 2\int x^2(ln^2 x - 2\,ln\,x + 2)dx = x^3(ln^2 x - 2\,ln\,x + 2)$$

$$-2\int (x\,ln\,x)^2 dx + 4\int x^2\,ln\,x\,dx - 4\int x^2 dx$$

$$3\int (x\,ln\,x)^2 dx = x^3(ln^2 x - 2\,ln\,x + 2) + 4\int x^2\,ln\,x\,dx - 4\cdot\frac{x^3}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで $\displaystyle\int x^2\,ln\,x\,dx$ を求める。

$$\int x^2\,ln\,x\,dx = x^2(x\,ln\,x - x) - 2\int x(x\,ln\,x - x)dx = x^3(ln\,x - 1) - 2\int x^2\,ln\,x\,dx + 2\int x^2 dx$$

$3\displaystyle\int x^2\,ln\,x\,dx = x^3(ln\,x - 1) + 2\cdot\frac{x^3}{3} = x^3\,ln\,x - \frac{x^3}{3}$，よって $\displaystyle\int x^2\,ln\,x\,dx = x^3\left(\frac{1}{3}ln\,x - \frac{1}{9}\right)$

これを③に入れると、

$$3\int (x\,ln\,x)^2 dx = x^3(ln^2 x - 2\,ln\,x + 2) + 4x^3\left(\frac{1}{3}ln\,x - \frac{1}{9}\right) - \frac{4x^3}{3} = x^3\left(ln^2 x - \frac{2}{3}ln\,x + \frac{2}{9}\right)$$

$\displaystyle\int (x\,ln\,x)^2 dx = x^3\left(\frac{1}{3}ln^2 x - \frac{2}{9}ln\,x + \frac{2}{27}\right)$　となる。以上から、

$$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^2}{2!}dx = \frac{1}{2!}\left[x^3\left(\frac{1}{3}ln^2x - \frac{2}{9}ln\,x + \frac{2}{27}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{27} = \frac{1}{3^3}$$

【３乗項】

$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^3}{3!}dx$，　不定積分 $\int (x\,ln\,x)^3dx$ を部分積分により計算する。

$$\int (x\,ln\,x)^3dx = x^3\cdot\left[\int ln^3xdx\right] - \int 3x^2\cdot\left[\int ln^3xdx\right]dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

ここで 置換積分により、$\int ln^3xdx$ を求める。$ln\,x = t$ とおくと、$x = e^t$，$\frac{1}{x}dx = dt$ より、

$dx = xdt = e^tdt$，$\int ln^3xdx = \int t^3e^tdt$　部分積分を用いて、

$\int t^3e^tdt = t^3e^t - 3\int t^2e^tdt\ = t^3e^t - 3e^t(t^2 - 2t + 2) = e^t(t^3 - 3t^2 + 6t - 6)$ からtを戻して

$\int ln^3xdx = x(ln^3x - 3ln^2x + 6\,ln\,x - 6)$　これを④に入れると、

$$\int (x\,ln\,x)^3dx = x^3\cdot x(ln^3x - 3ln^2x + 6\,ln\,x - 6) - 3\int x^2\cdot x(ln^3x - 3ln^2x + 6\,ln\,x - 6)dx$$

$$= x^4(ln^3x - 3ln^2x + 6\,ln\,x - 6) - 3\left[\int x^3ln^3xdx - 3\int x^3ln^2xdx + 6\int x^3lnxdx - 6\int x^3dx\right]$$

$$4\int (x\,ln\,x)^3dx = x^4(ln^3x - 3ln^2x + 6\,ln\,x - 6) + 9\int x^3ln^2xdx - 18\int x^3lnxdx + 18\int x^3dx$$

$\int x^3ln^2xdx$，及び $\int x^3lnxdx$ を部分積分により求めると（計算過程は省略）

$\int x^3ln^2xdx = x^4\left(\frac{1}{4}\,ln^2x - \frac{1}{8}ln\,x + \frac{1}{32}\right)$，$\int x^3lnxdx = x^4\left(\frac{1}{4}ln\,x - \frac{1}{16}\right)$ これを⑤に入れて

$$4\int (x\,ln\,x)^3dx = x^4(ln^3x - 3ln^2x + 6\,ln\,x - 6) + 9x^4\left(\frac{1}{4}\,ln^2x - \frac{1}{8}ln\,x + \frac{1}{32}\right) - 18x^4\left(\frac{1}{4}ln\,x - \frac{1}{16}\right)$$

$$= x^4\left(ln^3x - \frac{3}{4}ln^2x + \frac{3}{8}ln\,x - \frac{3}{32}\right)$$

$\int (x\,ln\,x)^3dx = x^4\left(\frac{1}{4}ln^3x - \frac{3}{16}ln^2x + \frac{3}{32}ln\,x - \frac{3}{128}\right)$　以上から、

$$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^3}{3!}dx = \frac{1}{3!}\left[x^4\left(\frac{1}{4}ln^3x - \frac{3}{16}ln^2x + \frac{3}{32}ln\,x - \frac{3}{128}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3!}\left(-\frac{3}{128}\right) = \frac{1}{3\cdot2\cdot1}\left(-\frac{3}{4^3\cdot2}\right) = -\frac{1}{4^4}$$

さらに、（４乗項）$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^4}{4!}dx$，（５乗項）$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^5}{5!}dx$ について計算結果のみ示すと、

$$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^4}{4!}dx = \frac{1}{4!}\left[x^5\left(\frac{1}{5}ln^4x - \frac{4}{5^2}ln^3x + \frac{12}{5^3}ln^2x - \frac{24}{5^4}ln\,x + \frac{24}{5^5}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\left(\frac{24}{5^5}\right) = \frac{1}{5^5}$$

$$\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^5}{5!}dx = \frac{1}{5!}\left[x^6\left(\frac{1}{6}ln^5x - \frac{5}{6^2}ln^4x + \frac{20}{6^3}ln^3x - \frac{60}{6^4}ln^2x + \frac{120}{6^5}ln\,x - \frac{120}{6^6}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\left(-\frac{120}{6^6}\right) = -\frac{1}{6^6}$$

ここで、０乗項から５乗項までを係数の規則性に注意して並べて書くと、

（０乗項） $\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

（１乗項） $\int_0^1 \frac{x\,ln\,x}{1!}dx \quad = \frac{1}{1!}\left[x^2\left(\frac{2^1}{2^2}ln\,x - \frac{2^0(2-1)}{2^2}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{2^2}$

（２乗項） $\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^2}{2!}dx = \frac{1}{2!}\left[x^3\left(\frac{3^2}{3^3}ln^2x - \frac{3^1(3-1)}{3^3}ln\,x + \frac{3^0(3-1)(3-2)}{3^3}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3^3}$

（３乗項） $\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^3}{3!}dx$

$$= \frac{1}{3!}\left[x^4\left(\frac{4^3}{4^4}ln^3x - \frac{4^2(4-1)}{4^4}ln^2x + \frac{4^1(4-1)(4-2)}{4^4}lnx\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4^0(4-1)(4-2)(4-3)}{4^4}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{4^4}$$

（４乗項） $\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^4}{4!}dx$

$$= \frac{1}{4!}\left[x^5\left(\frac{5^4}{5^5}ln^4x - \frac{5^3(5-1)}{5^5}ln^3x + \frac{5^2(5-1)(5-2)}{5^5}ln^2x\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{5^5}ln\,x + \frac{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5^5}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{5^5}$$

（５乗項） $\int_0^1 \frac{(x\,ln\,x)^5}{5!}dx$

$$= \frac{1}{5!}\left[x^6\left(\frac{6^5}{6^6}ln^5x - \frac{6^4(6-1)}{6^6}ln^4x + \frac{6^3(6-1)(6-2)}{6^6}ln^3x - \frac{6^2(6-1)(6-2)(6-3)}{6^6}ln^2x\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{6^6}ln\,x - \frac{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{6^6}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{6^6}$$

以上から n 乗項は、

$$\frac{1}{n!}\left[x^{n+1}\left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}}ln^nx - \frac{(n+1)^{n-1}n}{(n+1)^{n+1}}ln^{n-1}x + \frac{(n+1)^{n-2}n(n-1)}{(n+1)^{n+1}}ln^{n-2}x \ \cdots\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(n+1)^0 n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n+1)^{n+1}}\right)\right]_0^1$$

という式になってことがわかる。

これを 0 → 1 の区間で積分することにより、$ln\,x$ を含む項は全て 0 となり、残るのは定数部のみである。定数部の分子 $n!$ と、テーラー展開によって出てきた分母の $n!$ が打ち消しあい、定数部の分母 $(n+1)^{n+1}$ だけが残る。なお、各項ごとに符号は反転する。

n 乗項を一般式で表すと次の⑥式となる。ここで、k は n 乗項の k 番目を表している。

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}\left[(-1)^{2n-k+1}\cdot x^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!}\cdot ln^{n-k+1}x\right] \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

この問題を解くだけなら定数部のみがわかればよく、⑥式で $k=n$ とすればテーラー展開の n 乗項の定数部を求めることができる。

例えば１０乗項について、定数部は $n+1$ 番目だから、$n=10$，$k=n+1=11$ を入れると、

$$\frac{1}{10!}\sum_{k=11}^{11}\left[(-1)^{10}\cdot x^{11}\cdot\frac{1}{11^{11}}\cdot\frac{10!}{0!}\,ln^0x\right]=\frac{x^{11}}{11^{11}}$$ となり、$0\to1$ の積分を行うと $$\left[\frac{x^{11}}{11^{11}}\right]_0^1=\frac{1}{11^{11}}$$

となり $(n-1)$乗項の定数として、次々と$(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^n}$ が得られる。

以上より、次式が成り立つことが証明された。

$$\int_0^1 x^x\,dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (=0.783431,,,)$$

次に $\int_0^1 x^{-x}\,dx$ について、

$x^{-x}=e^{-x\,ln\,x}$ と表せるから、同様にテーラー展開すると、

$$e^{-x\,ln\,x}=1+\frac{-x\,ln\,x}{1!}+\frac{(-x\,ln\,x)^2}{2!}+\frac{(-x\,ln\,x)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (=1.291285,,,) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

これから、奇数乗項はマイナス、偶数乗項はプラスとなることがわかる。
x^x のときの定数部の符号については、偶数乗項の符号がプラス，奇数乗項の符号がマイナスだったので、⑦式に当てはめると、すべての項でプラスとなることがわかる。
よって、次式が成り立つことが証明された。

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

（模範解答）

x^x を無限級数で表すと、

$$x^x = e^{x\,ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\,ln(x))^n}{n!}$$

$$\int_0^1 x^m\,ln^n(x)dx = \left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}ln^n(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{m+1}x^m ln^{n-1}(x)\,dx = -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\,ln^{n-1}(x)dx$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n}\int_0^1 x^m\,ln^{n-n}(x)dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

したがって、

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(x\,ln(x))^n}{n!}dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x\,ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\,ln(x))^n}{n!}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-x\,ln(x))^n}{n!}dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots\cdots\cdots$$

この解答を見て、とてもシンプルなことに驚いた。
これは解に対して一直線に向かったもので、計算過程は簡潔なものほど優れた解答であるといえる。 x^x を $e^{x\,ln(x)}$ と変形し、それをテーラー展開するところまでは同じだが、私が不定積分で一般項を求めたのに対し、模範解答は直接 $x^m ln^n(x)$ の部分積分を行って次式を導いている。

$$\int_0^1 x^m\,ln^n(x)dx = \left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}ln^n(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{m+1}x^m ln^{n-1}(x)\,dx$$

定積分により、この式の右辺第１項は $ln(x)$ を含むため０となり第２項が残る。次に第２項について部分積分を行うと、再び $ln(x)$ を含む項は０となるので、この定積分を繰り返すことにより、x^m はそのまま、ln^{n-1} は $ln^{n-2}\ ln^{n-3}\cdots\cdots$ と n が１ずつ減っていき、最終的に $\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdots\cdots\frac{2}{m+1}\cdot\frac{1}{m+1}$ のように、定数項である $(-1)^n\ \frac{n!}{(m+1)^n}$ だけが残るのである。そしてうまいことに、この分子の $n!$ とテーラー展開して出てきた分母の $n!$ とが打ち消あい、不思議なことに１, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^3}$, $\frac{1}{4^4}$, $\frac{1}{5^5}\cdots\cdots$ の数列だけが残る。

私としては、問題を解く過程で色々な発見があることに数学の楽しさを感じているので、直球で解答を導きだす必要はなく、今回のように定積分すると０となる項に対しても不定積分で残し、n 乗項の一般式を導くことで $\int(x\,ln\,x)^n$ の奥深さを知ることができた。
（２，０２０．０３．２１）