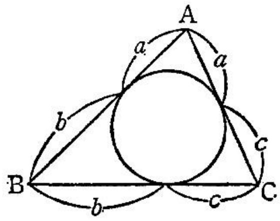
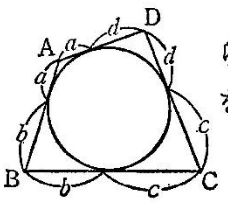
８７「江戸時代の数学者が考えていた問題－１」

幾何学大辞典（岩田至康 編）補巻Ⅰ 附録Ⅳ「和算の現代化に関する論文」にあった問題（その１）

会田安明の貫通術

編者は偶然に姫路市の古本屋から会田安明の算法貫通術巻之三なる写本を１冊手に入れた．それを読んでみると実に面白い．それは三角形に関する一性質を 4, 5, 6, … と多角形の場合に拡張していくものである．その後，平山諦著の「和算史上の人々」（富士短大）を読むに及んで，この貫通術は非常に大部のもので（刊行されたものではない）次のような問題から始まっていることがわかった．





問題 1. 円に外接する n 角形において，頂点から接点までの距離を $a, b, c, d, \cdots$ とし，内円の半径を r とすると

$n=3$ のとき $(a+b+c)r^2-abc=0$

$n=4$ のとき $(a+b+c+d)r^2-(bcd+acd+abd+abc)=0$

$n=5$ のとき $(\sum a)r^4-(\sum abc)r^2+abcde=0$

この問題に興味を持ち自分でも挑戦してみた。
内接円の半径 r を a，b，c ･･･で表す問題として、三角形，四角形･･･と一般化していく。

✿三角形（$n=3$）

図１において、∠ＢＡＣ，∠ＣＢＡ，∠ＡＣＢをそれぞれ θ_A，θ_B，θ_C

各頂点から内接円との接点までの長さを a，b，c、内接円の半径を r とする。

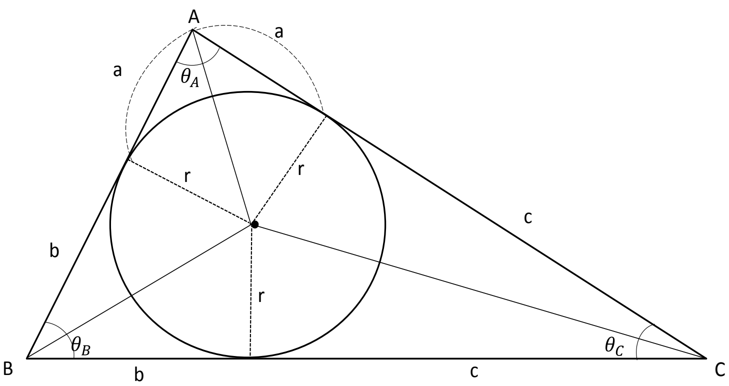


図１

$tan\frac{\theta_A}{2}=\frac{r}{a}$，$tan\frac{\theta_B}{2}=\frac{r}{b}$，$tan\frac{\theta_C}{2}=\frac{r}{c}$

と表せるので、tan の加法定理を使うと、

$$tan\left(\frac{\theta_A}{2}+\frac{\theta_B}{2}\right)=\frac{tan\frac{\theta_A}{2}+tan\frac{\theta_B}{2}}{1-tan\frac{\theta_A}{2}\cdot tan\frac{\theta_B}{2}}=\frac{\frac{r}{a}+\frac{r}{b}}{1-\frac{r}{a}\cdot\frac{r}{b}}=\frac{(a+b)r}{ab-r^2}$$

$tan\left(\frac{\theta_A}{2}+\frac{\theta_B}{2}\right)=tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_C}{2}\right)=\frac{1}{tan\frac{\theta_C}{2}}=\frac{c}{r}$ から、$\frac{(a+b)r}{ab-r^2}=\frac{c}{r}$ が導かれる。

これを整理すると、

$(a+b+c)r^2 = abc$ 、従って $r = \sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$ ……………… ①

✿四角形（$n=4$）

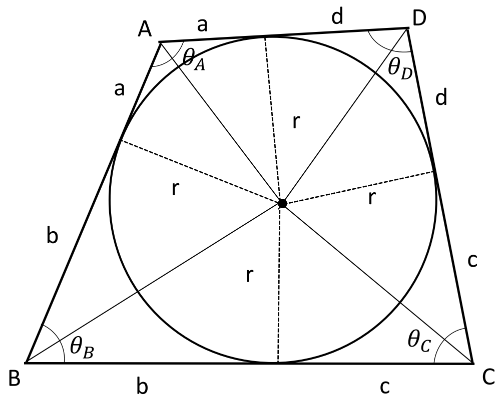


図２

図２において、∠ＢＡＤ，∠ＣＢＡ，∠ＤＣＢ

∠ＡＤＣをそれぞれ θ_A，θ_B，θ_C，θ_D

　各頂点から内接円との接点までの長さをa，b，c，d

内接円の半径をr とすると、三角形の場合と同様に

$$tan\frac{\theta_A}{2} = \frac{r}{a},\quad tan\frac{\theta_B}{2} = \frac{r}{b},\quad tan\frac{\theta_C}{2} = \frac{r}{c},\quad tan\frac{\theta_D}{2} = \frac{r}{d}$$

から、

$tan\left(\dfrac{\theta_A}{2}+\dfrac{\theta_B}{2}\right) = \dfrac{(a+b)r}{ab-r^2}$，$tan\left(\dfrac{\theta_C}{2}+\dfrac{\theta_D}{2}\right) = \dfrac{(c+d)r}{cd-r^2}$ …②，③ が導かれる。

$\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D = 2\pi$ 、$\dfrac{\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D}{2} = \pi$ から、$\dfrac{\theta_A+\theta_B}{2} = \pi - \dfrac{\theta_C+\theta_D}{2}$

$tan\left(\dfrac{\theta_A+\theta_B}{2}\right) = tan\left(\pi - \dfrac{\theta_C+\theta_D}{2}\right) = -tan\left(\dfrac{\theta_C+\theta_D}{2}\right)$ これに ②，③ を入れると、

$\dfrac{(a+b)r}{ab-r^2} = -\dfrac{(c+d)r}{cd-r^2}$ 　これを整理して、

$(a+b+c+d)r^2 = abc+abd+acd+bcd$ より、$r = \sqrt{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}}$ …………… ④

✿五角形（$n=5$）

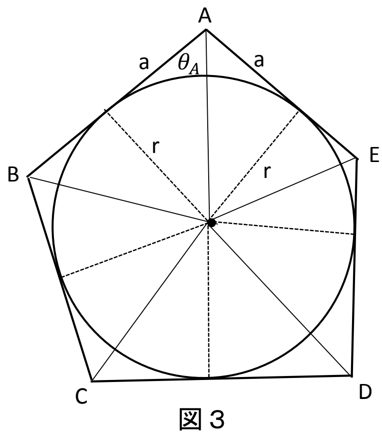


図３

　基本的に三，四角形と同様の考え方で計算を進めていくことができる。ここで、多角形の内角の和を整理しておくと、

三角形	π	七角形	5π
四角形	2π	八角形	6π
五角形	3π	九角形	7π
六角形	4π	十角形	8π

n 角形の内角の和は $(n-2)\pi$ で表される。

　同様に次式が成り立ち、

$tan\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{r}{a}$，$tan\dfrac{\theta_B}{2} = \dfrac{r}{b}$，$tan\dfrac{\theta_C}{2} = \dfrac{r}{c}$，$tan\dfrac{\theta_D}{2} = \dfrac{r}{d}$，$tan\dfrac{\theta_E}{2} = \dfrac{r}{e}$ ……………… ⑤

$\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D+\theta_E = 3\pi$ 、$\dfrac{\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D+\theta_E}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$ から、$\dfrac{\theta_A+\theta_B+\theta_C}{2} = \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\theta_D+\theta_E}{2}$

$$tan\left(\frac{\theta_A+\theta_B+\theta_C}{2}\right)=tan\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_D+\theta_E}{2}\right)\right]=-tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_D+\theta_E}{2}\right)=\frac{1}{tan\left(\frac{\theta_D+\theta_E}{2}\right)}$$

$$tan\left(\frac{\theta_A+\theta_B+\theta_C}{2}\right)=\frac{\left(tan\frac{\theta_A}{2}+tan\frac{\theta_B}{2}+tan\frac{\theta_C}{2}\right)-tan\frac{\theta_A}{2}tan\frac{\theta_B}{2}tan\frac{\theta_C}{2}}{1-\left(tan\frac{\theta_A}{2}tan\frac{\theta_B}{2}+tan\frac{\theta_B}{2}tan\frac{\theta_C}{2}+tan\frac{\theta_C}{2}tan\frac{\theta_A}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$tan\left(\frac{\theta_D+\theta_E}{2}\right)=\frac{tan\frac{\theta_D}{2}+tan\frac{\theta_E}{2}}{1-tan\frac{\theta_D}{2}\cdot tan\frac{\theta_E}{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑤の関係を⑥⑦に入れると次式を得る。

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)r-\frac{r^3}{abc}}{1-\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)r^2}=\frac{1-\frac{r^2}{de}}{\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)r} \qquad \frac{(ab+bc+ca)r-r^3}{abc-(a+b+c)r^2}=\frac{de-r^2}{(d+e)r}$$ これを整理して、

$$(a+b+c+d+e)r^4-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)r^2+abcde=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

これは r^2 についての二次方程式なので、

$a+b+c+d+e=A_1, abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde=B_1, abcde=C_1$

とおくと、$A_1(r^2)^2-B_1(r^2)+C_1=0$ これを解いて、

$$r=\sqrt{\frac{B_1+\sqrt{{B_1}^2-4A_1C_1}}{2A_1}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$ これが求める解である。

三角形，四角形の場合は２次方程式だったが、五角形では４次方程式になった。

４次の項の係数は a ～ e の和、２次の項の係数は a ～ e の５つから３つを選んだものの積、定数項は a ～ e 全ての積となっている。

ここで、例えば五角形を$a=b=c=d=e=1$ の正五角形とすると、$A_1=5$，$B_1=10$，$C_1=1$ だから、

$$r=\sqrt{\frac{10+\sqrt{10^2-4\cdot5\cdot1}}{2\cdot5}}=\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}\fallingdotseq 1.376$$ となる。

✿六角形（$n=6$）

以降、同じなので図は省略する。同様に次式が成り立ち、

$$tan\frac{\theta_A}{2}=\frac{r}{a},\quad tan\frac{\theta_B}{2}=\frac{r}{b},\quad tan\frac{\theta_C}{2}=\frac{r}{c},\quad tan\frac{\theta_D}{2}=\frac{r}{d},\quad tan\frac{\theta_E}{2}=\frac{r}{e},\quad tan\frac{\theta_F}{2}=\frac{r}{f}$$

$$tan\left(\frac{\theta_A+\theta_B+\theta_C}{2}\right)=tan\left[2\pi-\left(\frac{\theta_D+\theta_E+\theta_F}{2}\right)\right]=-tan\left(\frac{\theta_D+\theta_E+\theta_F}{2}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)r-\frac{r^3}{abc}}{1-\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)r^2}=-\frac{\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)r-\frac{r^3}{def}}{1-\left(\frac{1}{de}+\frac{1}{ef}+\frac{1}{fd}\right)r^2}$$

$$\frac{(ab+bc+ca)r-r^3}{abc-(a+b+c)r^2}=-\frac{(de+ef+fd)r-r^3}{def-(d+e+f)r^2}$$ 、これを 整理すると、

$$(a+b+c+d+e+f)r^4-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+def)r^2+(abcde+\cdots\cdots\cdots+bcdef)=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑩}$$

五角形の場合と同様に４次方程式になった。

４次の項の係数は$a \sim f$の和、２次の項の係数は$a \sim f$の６つから３つを選んだ積で、項数は ${}_6C_3=20$ となる。定数項は　$a \sim f$の６つから５つを選んだ積であり、項数は ${}_6C_5=6$ である。

$a+b+c+d+e+f=A_2$，$abc+abd+\cdots\cdots\cdots+def=B_2$，$abcde+\cdots\cdots\cdots+bcdef=C_2$

とおくと、$A_2(r^2)^2-B_2(r^2)+C_2=0$ これを解いて、

$$r=\sqrt{\frac{B_2+\sqrt{{B_2}^2-4A_2C_2}}{2A_2}} \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑪}$$

これが求める解である。

例えば六角形を$a=b=c=d=e=f=1$の正六角形とすると、$A_2=6$，$B_2=20$，$C_2=6$だから、$3(r^2)^2-10(r^2)+3=0$を解いて、

$$r=\sqrt{\frac{10+\sqrt{10^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}}=\sqrt{3}\fallingdotseq 1.732$$ となる。

✿七角形（$n=7$）

これまでと同様に、

$$tan\left(\frac{\theta_A+\theta_B+\theta_C+\theta_D}{2}\right)=tan\left[\frac{5\pi}{2}-\left(\frac{\theta_E+\theta_F+\theta_G}{2}\right)\right]=\tan\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_E+\theta_F+\theta_G}{2}\right)\right]$$

$$=tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_E+\theta_F+\theta_G}{2}\right)=\frac{1}{tan\left(\frac{\theta_E+\theta_F+\theta_G}{2}\right)}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)r-\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right)r^3}{1-\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right)r^2+\frac{1}{abcd}r^4}=\frac{1-\left(\frac{1}{ef}+\frac{1}{eg}+\frac{1}{fg}\right)r^2}{\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)r-\frac{r^3}{efg}}$$

$$\frac{(abc+abd+acd+bcd)r-(a+b+c+d)r^3}{abcd-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)r^2}=-\frac{efg-(e+f+g)r^2}{(ef+eg+fg)r-r^3}$$ 、これを整理すると、

$$(a+b+c+d+e+f+g)r^6-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+efg)r^4$$
$$+(abcde+\cdots\cdots\cdots+cdefg)r^2-abcdefg=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdot \text{⑫}$$

７角形の場合は６次方程式になった。

６次の項の係数は$a \sim g$の和、４次の項の係数は$a \sim g$の７つから３つを選んだ積で、項数は ${}_7C_3=35$ 、２次の項の係数は$a \sim g$の７つから５つを選んだ積で、項数は ${}_7C_5=21$ となる。定数項は$a \sim g$の７つのすべての積である。

以上の計算から、

偶数角形の場合は、$tan\left(\frac{\theta_A+\theta_B+\cdots\cdots\cdots}{2}\right)=-tan\left(\frac{\theta_L+\theta_M+\cdots\cdots\cdots}{2}\right)$

奇数角形の場合は、$tan\left(\frac{\theta_A+\theta_B+\cdots\cdots\cdot}{2}\right)=\frac{1}{tan\left(\frac{\theta_L+\theta_M+\cdots\cdots\cdot}{2}\right)}$

という式に帰着し、係数の符号は最高次数を＋とすると、順次＋－を繰り返す。さらに八角形，九角形の式を書いてみると、

✿八角形（$n=8$）

$$\frac{(abc+abd+acd+bcd)r-(a+b+c+d)r^3}{abcd-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)r^2+r^4}=-\frac{(efg+efh+egh+fgh)r-(e+f+g+h)r^3}{efgh-(ef+eg+eh+fg+fh+gh)r^2+r^4}$$

偶数角形の場合、両辺の分子をrで割ることができるため、次数が１次下がり、両辺とも分子は２次式，分母は４次式となる。さらに両辺の分母，分子は同型である。上式を整理すると以下のとおりとなる。

$$(a+b+c+d+e+f+g+h)r^6-\left(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+fgh\right)r^4\ +(abcde+\cdots\cdots\cdots+defgh)r^2$$
$$-(abcdefg+\cdots\cdots\cdots+bcdefgh)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot \text{⑬}$$

r^6 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h」８数から１数ずつ選んだ８つの数の和 ${}_8C_1=8$ 項
r^4 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h」８数から３数選んだ数の積で作られるすべての数の組の和 ${}_8C_3=56$ 項
r^2 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h」８数から５数選んだ数の積で作られるすべての数の組の和 ${}_8C_5=56$ 項
定数項は「a，b，c，d，e，f，g，h」８数から７数選んだ数の積で作られるすべての数の組の和 ${}_8C_7=8$ 項

✿九角形（$n=9$）

$$\frac{\left(abcd+abce+\cdots\cdots+bcde\right)r-\left(ab+ac+\cdots\cdots+de\right)r^3+r^5}{abcde-\left(abc+abd+\cdots\cdots+cde\right)r^2+(a+b+c+d+e)r^4}$$
$$=\frac{fghi-\left(fg+fh+\cdots\cdots+hi\right)r^2+r^4}{\left(fgh+fgi+\cdots\cdots+ghi\right)r-(f+g+h+i)r^3}$$

両辺の分子はrで割ることができないので、左辺の分子は５次式，分母は４次式、右辺の分子は４次式，分母は３次式である。両辺を通分するとそれぞれの次数が揃い８次式（r^2の４次式）となる。

上式を整理すると以下のとおりである。

$$(a+b+c+\cdots\cdots\cdots+i)r^8-\left(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+ghi\right)r^6+(abcde+\cdots\cdots\cdots+efghi)r^4$$
$$-(abcdefg+\cdots\cdots\cdots+cdefghi)r^2+abcdefghi=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot \text{⑭}$$

r^8 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h，i」９数から１数ずつ選んだ９つの数の和 ${}_9C_1=9$ 項
r^6 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h，i」９数から３数選んだ数の積で作られるすべての数の組の和

$_9C_3$ $=84$ 項
r^4 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h，i」９数から５数選んだ数の積で作られるすべての数の組の和
$_9C_5$ $=126$ 項
r^2 の係数は「a，b，c，d，e，f，g，h，i」９数から７数選んだ数の積で作られるすべての数の組の和
$_9C_7$ $=56$ 項
定数項は「a，b，c，d，e，f，g，h，i」９数すべての積で作られる $_9C_9$ $=1$ 項

十角形も同様であり、計算は省略する。
三角形から十角形について式をまとめると以下のとおりとなる。

3 角形	$(a+b+c)r^2-abc=0$
4 角形	$(a+b+c+d)r^2-(abc+abd+acd+bcd)=0$
5 角形	$(a+b+c+d+e)r^4-(abc+abd+abe+\cdots\cdots\cdots+cde)r^2+abcde=0$
6 角形	$(a+b+c+d+e+f)r^4-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+def)r^2+(abcde+\cdots\cdots\cdots+bcdef)=0$
7 角形	$(a+b+c+d+e+f+g)r^6-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+efg)r^4$ $+(abcde+\cdots\cdots\cdots+cdefg)r^2-abcdefg=0$
8 角形	$(a+b+c+d+e+f+g+h)r^6-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+fgh)r^4$ $+(abcde+\cdots\cdots\cdots+defgh)r^2-(abcdefg+\cdots\cdots\cdots+bcdefgh)=0$
9 角形	$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)r^8-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+ghi)r^6$ $+(abcde+\cdots\cdots\cdots+efghi)r^4-(abcdefg+\cdots\cdots\cdots+cdefghi)r^2+abcdefghi=0$
10 角形	$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j)r^8-(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+hij)r^6$ $+(abcde+\cdots\cdots\cdots+fghij)r^4-(abcdefg+\cdots\cdots\cdots+defghij)r^2+abcdefghij=0$

ここまで計算すると、式の規則性がはっきりしてくる。
n 角形の一般式を導くため「a，b，$c\cdots\cdots$」の代わりに「a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$，a_n」とすると、
・方程式の次数は“偶数”角形では「$n-2$」次，“奇数”角形では「$n-1$」次で、各項は必ず偶数乗
・最高次数の係数は「$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n$」である
・次の係数の符号はマイナスで「a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$，a_n」から３数を選んだ積のそれぞれの和で、その項数は $_nC_3$ である。
・次の係数の符号はプラスで「a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$，a_n」から５数を選んだ積のそれぞれの和で、その項数は $_nC_5$ である。
・次の係数の符号はマイナスで「a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$，a_n」から７数を選んだ積のそれぞれの和で、その項数は $_nC_7$ である。
以下同様に９数、１１数､､､､と選んだ積のそれぞれの和である。
・定数項は「$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots\cdots a_n$」であり、すべての数の積で項数は１となる。

以上を総合して、n 角形についての一般式を作る。
（１） n が偶数の場合、(“k ” はk 番目の項を表す)

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n)r^{n-2}-(a_1a_2a_3+\ a_1a_2a_4+\cdots\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)r^{n-4}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{k+1}\sum\Big[(2k-1)\text{個の数の積}\Big]r^{n-2k}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\Big(a_1a_2\cdots a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2a_3\cdots a_n\Big)=0\ \cdots\ ⑮$$

k 番目の項は、n から$2k-1$ の数を選んでできる積の和で、項数は${}_nC_{2k-1}$ となる。

最終項（定数項）は n から$n-1$ 個を選ぶ n 通りの組み合わせの積からできる数の和となる。

（２） n が奇数の場合、(“k ” はk 番目の項を表す)

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n)r^{n-1}-(a_1a_2a_3+\ a_1a_2a_4+\cdots\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)r^{n-3}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{k+1}\sum\Big[(2k-1)\text{個の数の積}\Big]r^{n-2k+1}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}(a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n)=0\quad\cdots\cdots\ ⑯$$

k 番目の項は、n から$2k-1$ の数を選んでできる積の和で、項数は項数は${}_nC_{2k-1}$ となる。

最終項（定数項）は、n 個すべての数の積で項数は１となる。

「a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$，a_n」をすべて異なる長さとした場合、方程式が解けるのは六角形 $(n=6)$ くらいまでだろう。方程式は (r^2) の２次方程式となるので、一般解を計算することが可能である。それでも r^2 の項は２０項，定数項は６項となり、一般解は以下のように複雑である。

$$(a+b+c+d+e+f)r^4-\big(abc+abd+\cdots\cdots\cdots+def\big)r^2+(abcde+\cdots\cdots\cdots+bcdef)=0$$

$$r=\sqrt{\frac{\big(abc+abd+\cdots\cdots+def\big)+\sqrt{\big(abc+abd+\cdots+def\big)^2-4\big(a+b+\cdots\cdot+f\big)(abcde+\cdots\cdot+bcdef)}}{2(a+b+c+d+e+f)}}$$

計算を単純化するために、五角形，六角形で計算したように「a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots\cdots$，a_n」すべての長さを１にして計算してみる。これにより、各係数は即座に得られ簡単に計算できるため、方程式の正誤の確認に便利である。図４は正 n 角形の例として、正五角形を示している。頂点Aから内接円との接点までの長さを $a_1=1$ とする。

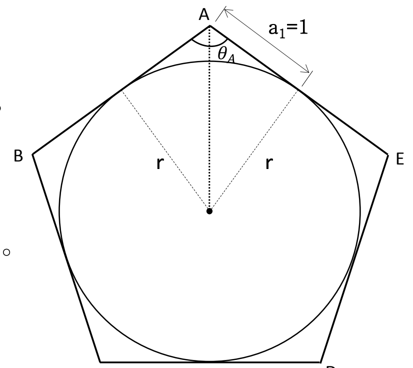


図４

正 n 角形の内角は $\theta_A=\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ と表せ、五角形の場合 $\theta_A=\dfrac{3\pi}{5}$ である。

$\mathrm{r}=\ a_1\,tan\dfrac{\theta_A}{2}=$より、$tan\dfrac{(n-2)\pi}{2n}$ を計算することで r が求められる。

$n=3$〜10 についてすべて計算すると次の表のようになる。

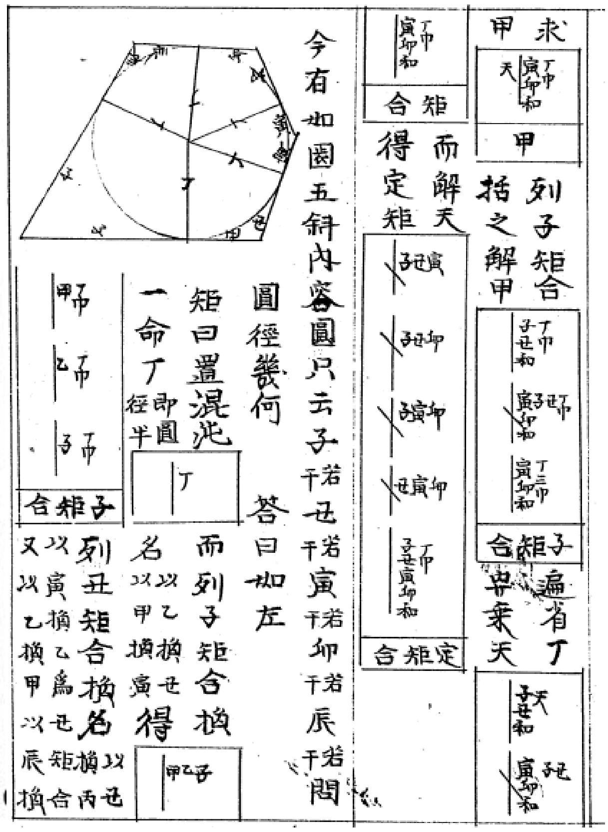
正 n 角形	方程式の次数	θ	$tan\frac{\theta}{2}=r$	方 程 式
三角形	2	$\frac{\pi}{3}$	$1/\sqrt{3}\ =0.5774$	$3r^2-1=0$
四角形	2	$\frac{\pi}{2}$	1	$r^2-1=0$
五角形	4(2)	$\frac{3\pi}{5}$	$\sqrt{1+2/\sqrt{5}}\fallingdotseq 1.3764$	$5r^4-10r^2+1=0$
六角形	4(2)	$\frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7321$	$3r^4-10r^2+3=0$
七角形	6(3)	$\frac{5\pi}{7}$	2.0765	$7r^6-35r^4+21r^2-1=0$
八角形	6(3)	$\frac{3\pi}{4}$	$1+\sqrt{2}=2.4142$	$r^6-\ \ 7r^4+\ \ 7r^2-1=0$
九角形	8(4)	$\frac{7\pi}{9}$	2.7475	$9r^8-\ \ 84r^6+126r^4-\ 36r^2+1=0$
十角形	8(4)	$\frac{4\pi}{5}$	3.0777	$10r^8-120r^6+252r^4-120r^2+1=0$

n が大きくなると r はどうなるのか？

$r=tan\frac{(n-2)\pi}{2n}=tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$ より、$\lim_{n\to\infty}\left[tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\right]=tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\to\infty$

n が大きくなれば n 角形はどんどん円に近づき、r は無限大になることが分かる。逆に r を固定すると a_1 はどんどん 0 に近づいていく。

この問題が掲載されている会田安明「算法貫通術 巻之二」は、山形大学 学術機関 リポジトリィからネット上に公開されていた。すでに江戸時代に独自の表現法を用いて、このような問題が研究されていたことが大きな驚きであった。



円に外接する n 角形の“頂点と接点”間の長さと“円の半径”との間に、規則的で美しい関係があることがわかった。“偶数”角形か“奇数”角形かにより、途中の式の様相はかなり異なるが、整理していくと最終的には同じような式が導かれたことは楽しい発見だった。（２０２０．０５．２８）