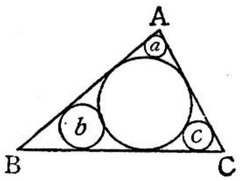
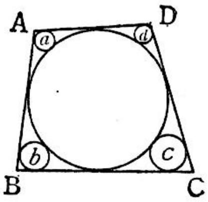
８８「江戸時代の数学者が考えていた問題－２」

幾何学大辞典（岩田至康 編）補巻Ⅰ 附録Ⅳ「和算の現代化に関する論文」にあった問題（その２）

問題 2. 円に外接する n 角形において，その辺と円周との間に円を内接させ，それらの円の半径を $a, b, c, d, \cdots$ とし，もとの円の半径を r とすると





$n=3$ のとき　$r=\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$

$n=4$ のとき　$r^2-(\sum\sqrt{ab})r+\sqrt{abcd}=0$

$n=5$ のとき　$r^2-(\sum\sqrt{ab})r+\sum\sqrt{abcd}=0$

$n=6$ のとき　$r^3-(\sum\sqrt{ab})r^2+(\sum\sqrt{abcd})r-\sqrt{abcdef}=0$

……………………………………………

なる関係が成り立つ.

彼はもちろん $n=3,4,5,6,\cdots$ と推定しているだけであるが，編者は三角関数を使って，これらの問題を証明し，かつ研究した．詳細については日本数学教育会誌，49 巻 9 号 (1967) を参照されたい．（Ⅲ，507，535；Ⅳ，1113，1237，1298）

前問と同じように解けると思ってやってみたが、この「問題２」は「問題１」よりはるかに難しい。それに、ここに掲載されている推定は誤りであることがわかった。

つまり、$n=3$ のとき　$r=\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$

$n=4$ のとき　$r^2-(\sum\sqrt{ab})r+\sqrt{abcd}=0$

$n=5$ のとき　$r^2-(\sum\sqrt{ab})r+(\sum\sqrt{abcd})=0$

$n=6$ のとき　$r^3-(\sum\sqrt{ab})r^2+(\sum\sqrt{abcd})r-\sqrt{abcdef}=0$

とはならない。実際に計算してみると、$n=3$ 以外はもっとずっと複雑な式になる。

✿三角形（$n=3$）

図１において、∠ＢＡＣ，∠ＣＢＡ，∠ＡＣＢをそれぞれ θ_A，θ_B，θ_C、内接円の半径を r、その中心をＯとする。三角形の２辺と円に内接する３つの小円の半径をそれぞれ a，b，c、内接円と辺ＡＣの接点をＰ、小円の中心Ｒ$_A$からＡＣに平行な直線とＯＰの交点をＱとする。

∠ＯＲ$_A$Ｑは $\frac{\theta_A}{2}$ だから、

$$sin\frac{\theta_A}{2}=\frac{OQ}{OR_A}=\frac{r-a}{r+a},\quad cos\frac{\theta_A}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{r-a}{r+a}\right)^2}$$

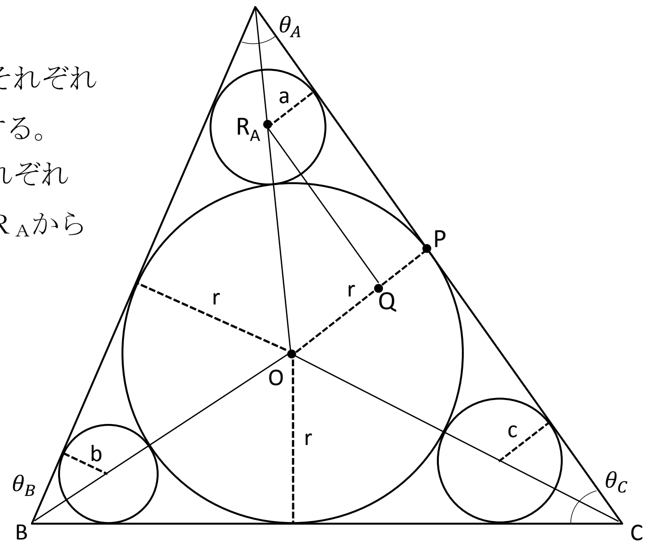


図１

$= \dfrac{2\sqrt{ar}}{r+a}$ ，同様に、$sin\dfrac{\theta_B}{2} = \dfrac{r-b}{r+b}$， $cos\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{2\sqrt{br}}{r+b}$、$sin\dfrac{\theta_C}{2} = \dfrac{r-c}{r+c}$， $cos\dfrac{\theta_C}{2} = \dfrac{2\sqrt{cr}}{r+c}$

ここで「問題１」の結果を利用するため、“問題１の a ”と“問題２の a ”との関係を求める。

$sin\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{r-a}{r+a}$， $cos\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{2\sqrt{ar}}{r+a}$ から、$tan\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{r-a}{2\sqrt{ar}}$ である。

混乱を避けるため“問題１の $a，b，c$ ”を“$A，B，C$ ”に置き換えると、

$tan\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{r}{A}$ だから $\dfrac{r}{A} = \dfrac{r-a}{2\sqrt{ar}}$ これから、$\mathrm{A} = \dfrac{2r\sqrt{ar}}{r-a} = \dfrac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}$ という関係が得られる。

同様に、$\mathrm{B} = \dfrac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}$，$\mathrm{C} = \dfrac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}$ である。

$n = 3$ の時の関係は、$a \to A，b \to B，c \to C$ とすると、前稿の①式より、

$r = \sqrt{\dfrac{ABC}{A+B+C}}$ なので、$r = \sqrt{\dfrac{\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}}{\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}+\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}+\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}}}$ より、$r^2 = \dfrac{\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}}{\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}+\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}+\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}}$

$= \dfrac{\left(2r^{\frac{3}{2}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{a}}{r-a}\frac{\sqrt{b}}{r-b}\frac{\sqrt{c}}{r-c}\right)}{\left(2r^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{r-a}+\frac{\sqrt{b}}{r-b}+\frac{\sqrt{c}}{r-c}\right)} = 4r^3\dfrac{\left(\frac{\sqrt{a}}{r-a}\frac{\sqrt{b}}{r-b}\frac{\sqrt{c}}{r-c}\right)}{\left(\frac{\sqrt{a}}{r-a}+\frac{\sqrt{b}}{r-b}+\frac{\sqrt{c}}{r-c}\right)}$ から、

$4r\left(\dfrac{\sqrt{a}}{r-a}\dfrac{\sqrt{b}}{r-b}\dfrac{\sqrt{c}}{r-c}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{r-a}+\dfrac{\sqrt{b}}{r-b}+\dfrac{\sqrt{c}}{r-c}\right)$ これを展開して整理すると、

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)r^2 - \left[(b+c)\sqrt{a}+(c+a)\sqrt{b}+(a+b)\sqrt{c}+4\sqrt{abc}\right]r + \left(bc\sqrt{a}+ca\sqrt{b}+ab\sqrt{c}\right) = 0$ ····· ①

という式が得られる。この式は因数分解できて、

$\left[r-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\right]\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)r-\sqrt{abc}\right] = 0$ これを解いて、

$r = \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$，$r = \dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

この解 $r = \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ は本に示された解と一致する。

もう一方の解、$r = \dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ は何だろう？

これは図２に示すように、小円のさらに外側の微小円に関係すると予想される。微小円の半径をそれぞれ $a'，b'，c'$ とすると、

$sin\dfrac{\theta_A}{2} = \dfrac{r-a}{r+a}$ より $a = r\dfrac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}$ であるから、

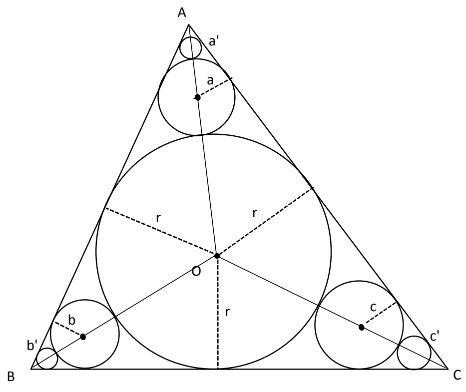


図２

$a' = r\left(\dfrac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\right)^2$ である。同様に、$b' = r\left(\dfrac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\right)^2$，$c' = r\left(\dfrac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}\right)^2$

微小円の幾何平均（３数の幾何平均はその積の立方根）をとってみると、

$$(a'\,b'\,c')^{\frac{1}{3}}=\left[r\left(\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\right)^2 r\left(\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\right)^2 r\left(\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}=r\left[\left(\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

この値を実際の三角形で計算してみる。例えば、 $r=10$，$\angle\mathrm{BAC}=70^\circ$ ，$\angle\mathrm{CBA}=60^\circ$ ，$\angle\mathrm{ACB}=50^\circ$ とすると、a =2.70990，b =3.33333，c =4.05858 、$a'=0.73435$，$b'=1.11111$，$c'=1.64721$ となるので、

$$\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{2.70990\cdot 3.33333\cdot 4.05858}}{\sqrt{2.70990}+\sqrt{3.33333}+\sqrt{4.05858}}=1.103588104$$

$$(a'\,b'\,c')^{\frac{1}{3}}=\left(0.73435\cdot 1.11111\cdot 1.64721\right)^{\frac{1}{3}}=1.103581744$$

少数下５ケタまで一致した。実際の式は以下のとおりで、

$$\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{r\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\cdot r\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\cdot r\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}}{\sqrt{r\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}}+\sqrt{r\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}}+\sqrt{r\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}}=r\frac{\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\cdot\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\cdot\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}}{\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}}+\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}}+\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}}$$

$$(a'\,b'\,c')^{\frac{1}{3}}=r\left[\left(\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

それぞれ一致してはいないが、非常に近い値であることが分かった。比率を取ってみると、

$$\frac{\left(a'\,b'\,c'\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}}=r\left[\left(\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{r}\frac{\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}}+\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}}+\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}}{\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\cdot\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\cdot\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}}$$

$$=\left[\left(\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}\right)\left(\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}}+\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_B}{2}}{1+sin\frac{\theta_B}{2}}}+\sqrt{\frac{1-sin\frac{\theta_C}{2}}{1+sin\frac{\theta_C}{2}}}\right)$$

$=0.999994237$　非常に近い値である。

この三角形が $a=b=c$ の正三角形とすると、$\theta_A=\theta_B=\theta_C=\frac{\pi}{3}$ だから、

$sin\frac{\theta_A}{2}=sin\frac{\theta_B}{2}=sin\frac{\theta_C}{2}=\frac{1}{2}$ である。これを上式に入れると、

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1$$

よって、$\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ は、微小円の半径に一致する。

✿四角形（$n=4$）

同様の方法で計算する。前稿の④式より、

$r=\sqrt{\dfrac{ABC+ABD+ACD+BCD}{A+B+C+D}}$ に $\mathrm{A}=\dfrac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}$，$B=\dfrac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}$，$\mathrm{C}=\dfrac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}$，$\mathrm{D}=\dfrac{2\sqrt{d}r^{\frac{3}{2}}}{r-d}$ を入れると、

$$r^2=\frac{\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}+\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}\frac{2\sqrt{d}r^{\frac{3}{2}}}{r-d}+\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}\frac{2\sqrt{d}r^{\frac{3}{2}}}{r-d}+\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}\frac{2\sqrt{d}r^{\frac{3}{2}}}{r-d}}{\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}+\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}+\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c}+\frac{2\sqrt{d}r^{\frac{3}{2}}}{r-d}}$$

より、

$$4r\left(\frac{\sqrt{a}}{r-a}\frac{\sqrt{b}}{r-b}\frac{\sqrt{c}}{r-c}+\frac{\sqrt{a}}{r-a}\frac{\sqrt{b}}{r-b}\frac{\sqrt{d}}{r-d}+\frac{\sqrt{a}}{r-a}\frac{\sqrt{c}}{r-c}\frac{\sqrt{d}}{r-d}+\frac{\sqrt{b}}{r-b}\frac{\sqrt{c}}{r-c}\frac{\sqrt{d}}{r-d}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{a}}{r-a}+\frac{\sqrt{b}}{r-b}+\frac{\sqrt{c}}{r-c}+\frac{\sqrt{d}}{r-d}\right)$$

これを展開して整理すると、

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)r^3-[(b+c+d)\sqrt{a}+(a+c+d)\sqrt{b}+(a+b+d)\sqrt{c}+(a+b+c)\sqrt{d}$$
$$+4\left(\sqrt{abc}+\sqrt{abd}+\sqrt{acd}+\sqrt{bcd}\right)]r^2+[(bc+bd+cd)\sqrt{a}+(ac+ad+bd)\sqrt{b}+(ab+ad+bd)\sqrt{c}$$
$$+(ab+bc+ca)\sqrt{d}+4(\sqrt{bcda}+\sqrt{acdb}+\sqrt{abdc}+\sqrt{abcd})]r-(bcd\sqrt{a}+acd\sqrt{b}+abd\sqrt{c}+abc\sqrt{d})=0$$

………………　②

三角形の時に比べ、次数が１つ増えて３次方程式に、そして少し複雑な式となった。これはとても因数分解できそうにない。

もう少し式を変形すると、

r^2 の項

$$(b+c+d)\sqrt{a}+(a+c+d)\sqrt{b}+(a+b+d)\sqrt{c}+(a+b+c)\sqrt{d}$$
$$=(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)-\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$4\left(\sqrt{abc}+\sqrt{abd}+\sqrt{acd}+\sqrt{bcd}\right)=4\sqrt{abcd}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$$

r の項

$$(bc+bd+cd)\sqrt{a}+(ac+ad+cd)\sqrt{b}+(ab+ad+bd)\sqrt{c}+(ab+bc+ca)\sqrt{d}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)[(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]-(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$+\left(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}}+c^{\frac{5}{2}}+d^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$4(\sqrt{bcd}a+\sqrt{acd}b+\sqrt{abd}c+\sqrt{abc}\mathrm{d})=4\sqrt{abcd}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)$$

定数項

$$bcd\sqrt{a}+acd\sqrt{b}+abd\sqrt{c}+abc\sqrt{d}=abcd\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$$

のように書くことができ、以上をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})r^3\\
&\quad-\left[(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)-\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}\right)+4\sqrt{abcd}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}\right)\right]r^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)[(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]-(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}}+c^{\frac{5}{2}}+d^{\frac{5}{2}}\right)+4\sqrt{abcd}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]r-abcd\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}\right)=0\quad\cdots\cdots\ ③
\end{aligned}$$

それほど簡単になったとは思えないが、幾分か見やすくなっている。

✿五角形（$n=5$）

同様の方法で計算する。前稿の⑧式より、

$$(A+B+C+D+E)r^4-(ABC+ABD+ABE+ACD+ACE+ADE+BCD+BCE+BDE+CDE)r^2+ABCDE=0$$

$$\mathrm{A}=\frac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a},\ B=\frac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b},\ \mathrm{C}=\frac{2\sqrt{c}r^{\frac{3}{2}}}{r-c},\ \mathrm{D}=\frac{2\sqrt{d}r^{\frac{3}{2}}}{r-d},\ \mathrm{E}=\frac{2\sqrt{e}r^{\frac{3}{2}}}{r-e}$$

を入れ、計算した結果を示すと次のようになる。（途中の計算はかなり複雑である）

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)r^4\\
&\quad-[\{(b+c+d+e)\sqrt{a}+(a+c+d+e)\sqrt{b}+(a+b+d+e)\sqrt{c}+(a+b+c+e)\sqrt{d}\\
&\quad+(a+b+c+d)\sqrt{e}\}\\
&\quad+4\left(\sqrt{abc}+\sqrt{abd}+\sqrt{abe}+\sqrt{acd}+\sqrt{ace}+\sqrt{ade}+\sqrt{bcd}+\sqrt{bce}+\sqrt{bde}+\sqrt{cde}\right)]r^3\\
&\quad+[(bc+bd+be+cd+ce+de)\sqrt{a}+(ac+ad+ae+cd+ce+de)\sqrt{b}+(ab+ad+ae+bd+be\\
&\quad+de)\sqrt{c}+(ab+ac+ae+bc+be+ce)\sqrt{d}+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\sqrt{e}\\
&\quad+4\left\{\sqrt{abc}(d+e)+\sqrt{abd}(c+e)+\sqrt{abe}(c+d)+\sqrt{acd}(b+e)+\sqrt{ace}(b+d)\right.\\
&\quad\left.+\sqrt{ade}(b+c)+\sqrt{bcd}(a+e)+\sqrt{bce}(a+d)+\sqrt{bde}(a+c)+\sqrt{cde}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\right\}\\
&\quad+16\sqrt{abcde}\,]r^2\\
&\quad-\left[\{(bcd+bce+bde+cde)\sqrt{a}+(acd+ace+ade+cde)\sqrt{b}\right.\\
&\quad+(abd+abe+ade+bde)\sqrt{c}+(abc+abe+ace+bce)\sqrt{d}\\
&\quad+(abc+abd+acd+bcd)\sqrt{e}\}\\
&\quad+4\left(\sqrt{abc}de+\sqrt{abd}ce+\sqrt{abe}cd+\sqrt{acd}be+\sqrt{ace}bd+\sqrt{ade}bc+\sqrt{bcd}ae+\sqrt{bce}ad\right.\\
&\quad\left.\left.+\sqrt{bde}ac+\sqrt{cde}ab\right)\right]r+\left(bcde\sqrt{a}+acde\sqrt{b}+abde\sqrt{c}+abce\sqrt{d}+abcd\sqrt{e}\right)=0
\end{aligned}$$

この式を書き直すと、

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)r^4 \\
&\qquad -\left[\left\{(a+b+c+d+e)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)-\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}+e^{\frac{3}{2}}\right)\right\}\right. \\
&\qquad \left.-2\sqrt{abcde}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\right\}\right]r^3 \\
&\qquad +\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)\{(a+b+c+d+e)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\}\right. \\
&\qquad -(a+b+c+d+e)\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}+e^{\frac{3}{2}}\right)+\left(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}}+c^{\frac{5}{2}}+d^{\frac{5}{2}}+e^{\frac{5}{2}}\right) \\
&\qquad \left.+4\sqrt{abcde}\left\{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)-1\right\}\right]r^2 \\
&\qquad -\left[abcde\left\{-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\left(a^{-\frac{3}{2}}+b^{-\frac{3}{2}}+c^{-\frac{3}{2}}+d^{-\frac{3}{2}}+e^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}\right. \\
&\qquad \left.+2\sqrt{abcde}\left\{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2-(a+b+c+d+e)\right\}\right]r \\
&\qquad +abcde\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0
\end{aligned}
$$

✿六角形（$n=6$）

同様の方法で計算し結果のみを示す。

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}\right)r^5 \\
&\qquad -[\{(b+c+d+e+f)\sqrt{a}+(a+c+d+e+f)\sqrt{b}+(a+b+d+e+f)\sqrt{c} \\
&\qquad +(a+b+c+e+f)\sqrt{d}+(a+b+c+d+f)\sqrt{e}+(a+b+c+d+e)\sqrt{f}\} \\
&\ +4\left(\sqrt{abc}+\sqrt{abd}+\sqrt{abe}+\sqrt{abf}+\sqrt{acd}+\sqrt{ace}+\sqrt{acf}+\sqrt{ade}+\sqrt{adf}+\sqrt{aef}+\sqrt{bcd}+\sqrt{bce}\right. \\
&\qquad \left.+\sqrt{bcf}+\sqrt{bde}+\sqrt{bdf}+\sqrt{bef}+\sqrt{cde}+\sqrt{cdf}+\sqrt{cef}+\sqrt{def}\right)]r^4 \\
&+[(bc+bd+be+bf+cd+ce+cf+de+df+ef)\sqrt{a}+(ac+ad+ae+af+cd+ce+cf+de+df \\
&\qquad +ef)\sqrt{b}+(ab+ad+ae+af+bd+be+bf+de+df+ef)\sqrt{c} \\
&\qquad +(ab+ac+ae+af+bc+be+bf+ce+cf+ef)\sqrt{d} \\
&\qquad +(ab+ac+ad+af+bc+bd+bf+cd+cf+df)\sqrt{e} \\
&\qquad +(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\sqrt{f} \\
&\qquad +4\left\{\sqrt{abc}(d+e+f)+\sqrt{abd}(c+e+f)+\sqrt{abe}(c+d+f)+\sqrt{abf}(c+d+e)\right. \\
&\qquad +\sqrt{acd}(b+e+f)+\sqrt{ace}(b+d+f)+\sqrt{acf}(b+d+e)+\sqrt{ade}(b+c+f)+\sqrt{adf}(b \\
&\qquad +c+e)+\sqrt{aef}(b+c+d)+\sqrt{bcd}(a+e+f)+\sqrt{bce}(a+d+f)+\sqrt{bcf}(a+d+e) \\
&\qquad +\sqrt{bde}(a+c+f)+\sqrt{bdf}(a+c+e)+\sqrt{bef}(a+c+d)+\sqrt{cde}(a+b+f)+\sqrt{cdf}(a \\
&\qquad \left.+b+e)+\sqrt{cef}(a+b+d)+\sqrt{def}(a+b+c)\right\}
\end{aligned}
$$

$$+16\left(\sqrt{abcde}+\sqrt{abcdf}+\sqrt{abcef}+\sqrt{abdef}+\sqrt{acdef}+\sqrt{bcdef}+\right)\Big]r^3$$

$$\begin{aligned}
&-\Big[4\Big\{\Big(\sqrt{abc}(de+ef+ef)+\sqrt{abd}(ce+cf+ef)+\sqrt{abe}(cd+cf+df)+\sqrt{abf}(cd \\
&+ce+de)+\sqrt{acd}(be+bf+ef)+\sqrt{ace}(bd+bf+df)+\sqrt{acf}(bd+be+de) \\
&+\sqrt{ade}(bc+bf+cf)+\sqrt{adf}(bc+be+ce)+\sqrt{aef}(bc+bd+cd)+\sqrt{bcd}(ae+af \\
&+ef)+\sqrt{bce}(ad+af+df)+\sqrt{bcf}(ad+ae+de)+\sqrt{bde}(ac+af+cf)+\sqrt{bdf}(ac \\
&+ae+ce)+\sqrt{bef}(ac+ad+cd)+\sqrt{cde}(ac+af+cf)+\sqrt{cdf}(ab+ae+be) \\
&+\sqrt{cef}(ab+ad+bd)+\sqrt{def}(ab+ac+bc)\Big)\Big\} \\
&+\Big\{(bcd+bce+bcf+bde+bdf+bef+cde+cdf+cef+def)\sqrt{a} \\
&+(acd+ace+acf+ade+adf+aef+cde+cdf+cef+def)\sqrt{b} \\
&+(abd+abe+abf+ade+adf+aef+bde+bdf+bef+def)\sqrt{c} \\
&+(abc+abe+abf+ace+acf+aef+bce+bcf+bef+cef)\sqrt{d} \\
&+(abc+abd+abf+acd+acf+adf+bcd+bcf+bdf+cdf)\sqrt{e} \\
&+(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)\sqrt{f}\Big\} \\
&+16\left(\sqrt{abcde}\,f+\sqrt{abcdf}\,e+\sqrt{abcef}\,d+\sqrt{abdef}\,c+\sqrt{acdef}\,b+\sqrt{bcdef}\,a\right)\Big]r^2 \\
&+\Big[4\Big(\sqrt{abc}\,def+\sqrt{abd}\,cef+\sqrt{abe}\,cdf+\sqrt{abf}\,cde+\sqrt{acd}\,bef+\sqrt{ace}\,bdf+\sqrt{acf}\,bde \\
&+\sqrt{ade}\,bcf+\sqrt{adf}\,bce+\sqrt{aef}\,bcd+\sqrt{bcd}\,aef+\sqrt{bce}\,adf+\sqrt{bcf}\,ade+\sqrt{bde}\,acf \\
&+\sqrt{bdf}\,ace+\sqrt{bef}\,acd+\sqrt{cde}\,acf+\sqrt{cdf}\,abe+\sqrt{cef}\,abd+\sqrt{def}\,abc\Big) \\
&+\Big\{(bcde+bcdf+bcef+bdef+cdef)\sqrt{a}+(acde+acdf+acef+adef+cdef)\sqrt{b} \\
&+(abde+abdf+abef+adef+bdef)\sqrt{c}+(abce+abcf+abef+acef+bcef)\sqrt{d} \\
&+(abcd+abcf+abdf+acdf+bcdf)\sqrt{e}+(abcd+abcf+abdf+acdf+bcdf)\sqrt{f}\Big\}\Big]
\end{aligned}$$

$$-\left(bcdef\sqrt{a}+acdef\sqrt{b}+abdef\sqrt{c}+abcef\sqrt{d}+abcdf\sqrt{e}+abcde\sqrt{f}\right)=0$$

このように非常に長い式になった。ここで、

$n=3$ から 6 までの式を並べて、$\mathrm{A}=\dfrac{2\sqrt{a}r^{\frac{3}{2}}}{r-a}$，$\mathrm{B}=\dfrac{2\sqrt{b}r^{\frac{3}{2}}}{r-b}$，・・・・・・，$\mathrm{F}=\dfrac{2\sqrt{f}r^{\frac{3}{2}}}{r-f}$ を入れて式をながめてみる。

$n=3\quad (A+B+C)r^2-ABC=0$

$n=4\quad (A+B+C+D)r^2-(ABC+ABD+ACD+BCD)=0$

$n=5\quad (A+B+C+D+E)r^4-\left(ABC+ABD+\cdots\cdots+BDE+CDE\right)r^2+ABCDE=0$

$n=6\quad (A+B+C+D+E+F)r^4-\left(ABC+ABD+\cdots\cdots+CEF+DEF\right)r^2+(ABCDE+\cdots+\mathrm{BCDEF})=0$

前問において $n=3$，4 は r の 2 次式で、

$n=3$ のとき、$\left(2r^{\frac{3}{2}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}}{r-a}+\dfrac{\sqrt{b}}{r-b}+\dfrac{\sqrt{c}}{r-c}\right)r^2-\left(2r^{\frac{3}{2}}\right)^3\left(\dfrac{\sqrt{a}}{r-a}\,\dfrac{\sqrt{b}}{r-b}\,\dfrac{\sqrt{c}}{r-c}\right)=0$ から、

$$\left[\frac{\sqrt{a}(r-b)(r-c)+\sqrt{b}(r-a)(r-c)+\sqrt{c}(r-a)(r-b)}{(r-a)(r-b)(r-c)}\right]-4r\left[\frac{\sqrt{abc}}{(r-a)(r-b)(r-c)}\right]=0$$

通分して整理すると、r の 2 次式となる。

$n=4$ のとき同様に、

$$\left[\frac{\sqrt{a}(r-b)(r-c)(r-d)+\sqrt{b}(r-a)(r-c)(r-d)+\sqrt{c}(r-a)(r-b)(r-d)+\sqrt{d}(r-a)(r-b)(r-c)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)}\right]$$

$$-4r\left[\frac{\sqrt{abc}(r-d)+\sqrt{abd}(r-c)+\sqrt{acd}(r-b)+\sqrt{bcd}(r-a)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)}\right]=0$$

通分して整理すると、r の 3 次式となる。

前問において $n=5$，6 は r の 4 次式で、

$n=5$ のとき同様に、

$$\left[\frac{\sqrt{a}(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)+\sqrt{b}(r-a)(r-c)(r-d)(r-e)+\cdots\cdots+\sqrt{e}(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)}\right]$$

$$-4r\left[\frac{\sqrt{abc}(r-d)(r-e)+\sqrt{abd}(r-c)(r-e)+\cdots\cdots+\sqrt{cde}(r-a)(r-b)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)}\right]$$

$$+16r^2\left[\frac{\sqrt{abcd}(r-e)+\sqrt{abce}(r-d)+\cdots\cdots+\sqrt{bcde}(r-a)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)}\right]=0$$

通分して整理すると、r の 4 次式となる。

$n=6$ のとき同様に、

$$\left[\frac{\sqrt{a}(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)(r-f)+\cdots\cdots+\sqrt{f}(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)(r-f)}\right]$$

$$-4r\left[\frac{\sqrt{abc}(r-d)(r-e)(r-f)+\sqrt{abd}(r-c)(r-e)(r-f)+\cdots\cdots+\sqrt{def}(r-a)(r-b)(r-c)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)(r-f)}\right]$$

$$+16r^2\left[\frac{\sqrt{abcde}(r-f)+\sqrt{abcdf}(r-e)+\cdots\cdots+\sqrt{bcdef}(r-a)}{(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)(r-e)(r-f)}\right]=0$$

通分して整理すると、r の 5 次式となる。

　$n=7$ 以上についての計算は省略するが、$n=7$，8 のときの式の形を示すと、

$[\quad\;]-4r[\quad\;]+16r^2[\quad\;]-64r^3[\quad\;]=0$ のように、$-64r^3[\quad\;]$ の項が加わりさらに項数が増え複雑になる。

　以上のように、前問と異なり方程式は r の $(n-1)$ 次式となることが分かる。

　式の規則性が明らかになったので、$n=6$ の場合でまとめると、

・<u>最高次数 r^5 の項</u>

　【$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}$】

　　　a,b,c,d,e,f 6 数から 1 つずつ選んだ数の$\sqrt{\ }$ の和 ${}_6C_1=6$ 項

・<u>r^4 の項</u>

　　【$(b+c+d+e+f)\sqrt{a}+\cdots\cdots\cdots+(a+b+c+d+e)\sqrt{f}$】（符号はマイナス）

　　　6 数から 1 数を選びその$\sqrt{\ }$ に、残りすべての数の和を掛ける ${}_6C_1\times{}_5C_1=30$ 項

　　【$\sqrt{abc}+\sqrt{abd}+\cdots\cdots\cdots+\sqrt{def}$】

　　　6 数から 3 数を選びその積の$\sqrt{\ }$ のすべての組み合わせの和、 ${}_6C_3=20$ 項

　　　（係数を伴う： $n=6$ のときは 4）

・<u>r^3 の項</u>

【$(bc+bd+\cdots\cdots+ef)\sqrt{a}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\left(ab+ac+\cdots\cdots+de\right)\sqrt{f}$ 】

６数から１数を選びその$\sqrt{\ }$に、残りすべての数から２数を選んだ１０通りの積のすべての和を掛ける ${}_5C_2\times{}_6C_1=60$ 項

【$\sqrt{abc}\,(d+e+f)+\sqrt{abd}\,(c+e+f)+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{def}\,(a+b+c)$】

６数から３数を選びその積の$\sqrt{\ }$に残りすべての数の和を掛ける ${}_6C_3\times{}_3C_1=60$ 項

（係数を伴う：$n=6$ のときは４）

【$\sqrt{abcde}+\sqrt{abcdf}+\cdots\cdots\cdots+\sqrt{bcdef}$ 】

６数から５数を選びその積の$\sqrt{\ }$の和 ${}_6C_5=6$ 項

（係数を伴う：$n=6$ のときは16）

・<u>r^2 の項</u>

【$(bcd+bce+\cdots\cdots+def)\sqrt{a}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\left(abc+abd+\cdots\cdots+cde\right)\sqrt{f}$ 】（符号はマイナス）

６数から１数を選びその$\sqrt{\ }$に、残り５数から３数を選んだ１０通りの積のすべての和を掛ける ${}_6C_1\times{}_5C_3=60$ 項

【$\sqrt{abc}\,(de+ef+ef)+\sqrt{abd}\,(ce+cf+ef)+\cdots\cdots\cdots+\sqrt{def}\,(ab+ac+bc)$】（符号はマイナス）

６数から３数を選びその積の$\sqrt{\ }$に、残りすべての数から２数を選びその積の和を掛ける

${}_6C_3\times{}_3C_2=60$ 項 （係数を伴う：$n=6$ のときは-4）

【$\sqrt{abcde}\,f+\sqrt{abcdf}\,e+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{bcdef}\,a$ 】

６数から５数を選びその積の$\sqrt{\ }$に残りの数を掛けたものの和 ${}_6C_5=6$ 項

（係数を伴う：$n=6$ のときは -16）

・<u>r の項</u>

【$\left(bcde+\cdots\cdots+cdef\right)\sqrt{a}+\left(acde+\cdots\cdots+cdef\right)\sqrt{b}+\cdots\cdots\cdots\cdots(abcd+\cdots\cdots+bcdf)\sqrt{f}$】

６数から１数を選びその$\sqrt{\ }$に、残り５数から４数を選んだ１０通りの積のすべての和を掛ける ${}_6C_1\times{}_5C_4=30$ 項

【$\sqrt{abc}\,def+\sqrt{abd}\,cef+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{def}\,abc$】

６数から３数を選びその積の$\sqrt{\ }$に、残りすべての数を掛けたものの和

${}_6C_3=20$ 項 （係数を伴う：$n=6$ のときは４）

・<u>定数項</u>

【$bcdef\sqrt{a}+acdef\sqrt{b}+\cdots\cdots\cdots\cdots+abcde\sqrt{f}$】

６数から１数を選びその$\sqrt{\ }$に、残り５数の積を掛けたものの和 ${}_6C_1=6$ 項

$n=7$ 以上になると、n が１つ増えるごとに項数はどんどん増えていくが、規則に従って計算すれば式を導くことができる。

最初に戻って、$n=3$ のとき $r=\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$

$n=4$ のとき $r^2=-(\sum\sqrt{ab})\,r+\sqrt{abcd}=0$

$n=5$ のとき $r^2=-(\sum\sqrt{ab})\,r+(\sum\sqrt{abcd})=0$

$n=6$ のとき $r^3=-(\sum\sqrt{ab})\,r^2+(\sum\sqrt{abcd})r-\sqrt{abcdef}=0$

において、一致したのは $n=3$ のときのみである。$n=4,\ 5,\ 6$ の場合はもっとずっと複雑な式であることが分かった。

正 n 角形の場合に $a=b=c=\cdots=1$ として、$n=3$〜6 についてすべて計算すると次のようになる。

正 n 角形	方程式の次数	$a=b=\cdots=1$ となる r	r を求める方程式
三角形	2	$r=3$	$3r^2-10r+3=0$ $(r-3)(3r-1)=0$
四角形	3	$r=3+2\sqrt{2}$ $\fallingdotseq 5.828$	$4r^3-28r^2+28r-4=0$ $4(r-1)(r^2-6r+1)=0$
五角形	4	$r=5+2\sqrt{5}$ $\fallingdotseq 9.472$	$5r^4-60r^3+126r^2-60r+5=0$ $(r^2-10r+5)(5r^2-10r+1)=0$
六角形	5	$r=7+4\sqrt{3}$ $\fallingdotseq 13.928$	$6r^5-110r^4+396r^3-396r^2+110r-6=0$ $2(r-1)(r-3)(3r-1)(r^2-14r+1)=0$
七角形	6	$\fallingdotseq 19.196$	$7r^6-182r^5+1001r^4-1716r^3+1001r^2-182r+7=0$ $(r^3-21r^2+35r-7)(7r^3-35r^2+21r-1)=0$
八角形	7	$7+4\sqrt{2}+2\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ $\fallingdotseq 25.274$	$8r^7-280r^6+2184r^5-5720r^4+5720r^3-2184r^2+280r-8=0$ $8(r-1)(r^2-6r+1)(r^4-28r^3+70r^2-28r+1)$

正多角形のとき方程式は因数分解でき、小円の半径は無理数で与えられる。

前述したように、正三角形の場合 $\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ は微小円の半径に一致した。

三角形を $a=b=c=1$ の正三角形としたときの方程式、$3r^2-10r+3=0$ を因数分解した $(r-3)(3r-1)=0$ から得られる、$r=3$ が求める内接円の半径であり、もう一方の $r=\dfrac{1}{3}$ が内接する小円のさらに外側の微小円の半径を示している。

方程式の係数は二項係数のように対称形で、必ず因数分解できる形になっていて、微小円の半径は

内接円の半径 $\times\left(\dfrac{1-sin\dfrac{(n-2)\pi}{2n}}{1+sin\dfrac{(n-2)\pi}{2n}}\right)^2$ 、または 小円の半径 $\times\left(\dfrac{1-sin\dfrac{(n-2)\pi}{2n}}{1+sin\dfrac{(n-2)\pi}{2n}}\right)$ で与えられる。

以下、内接円の半径を r，小円の半径を r_1，微小円の半径を r_2 とすると、r 及び r_1 は当然として、r_2 も必ず方程式の解に含まれていることが分かった。

・四角形：$4(r-1)(r^2-6r+1)=0$ の解、$r=3+2\sqrt{2}$ ($\fallingdotseq 5.828$)，$r_1=1$，$r_2=3-2\sqrt{2}$ ($\fallingdotseq 0.1716$)

・五角形：$(r^2-10r+5)(5r^2-10r+1)=0$ の解、 $r=5+2\sqrt{5}$ ($\fallingdotseq 9.4721$)，$r_2=1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ($\fallingdotseq 0.1056$)

五角形の場合、$r_1=1$ の解は現れない。

・六角形：$2(r-1)(r-3)(3r-1)(r^2-14r+1)=0$ の解、$r=7+4\sqrt{3}$ ($\fallingdotseq 13.928$)，$r_1=1$，$r_2=7-4\sqrt{3}$ ($\fallingdotseq 0.07179$)

・七角形：$(r^3-21r^2+35r-7)(7r^3-35r^2+21r-1)=0$ の解は無理数で表すことができず、

$r \fallingdotseq 19.196$, $r_2 \fallingdotseq 0.05209$ となった。また七角形の場合、$r_1 = 1$ の解は現れない。

・八角形：$8(r-1)(r^2-6r+1)(r^4-28r^3+70r^2-28r+1)$の解、

$$r = 7+4\sqrt{2}+2\sqrt{20+14\sqrt{2}}\ (\fallingdotseq 13.928),\ r_1 = 1,\ r_2 = 7+4\sqrt{2}-2\sqrt{20+14\sqrt{2}}\ (\fallingdotseq 0.0395)$$

例えば図形を四角形として、先に小円の半径 a, b, c, d を指定した場合、どのような図形になるかを考えてみる。多分変な形になるであろう、$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ としたらどうなるだろうか？

③式に示す方程式

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})r^3$$
$$-\left[(a+b+c+d)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})-\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}\right)+4\sqrt{abcd}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}\right)\right]r^2$$
$$+\left[\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})[(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]\right.$$
$$\left.-(a+b+c+d)\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}\right)+\left(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}}+c^{\frac{5}{2}}+d^{\frac{5}{2}}\right)+4\sqrt{abcd}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})\right]r$$
$$-abcd\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{d}}\right)=0$$

に $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ を入れて計算すると、

$6.146r^3-99.002r^2+219.560r-66.827=0$ という３次方程式が得られる。

これを解いて、$r=0.3622$, $\mathrm{r}=2.2194$, $\mathrm{r}=13.5261$ が出て来るが、この中で求める r は、13.5261 であることがわかる。次に４つの角度は、

$$a = r\frac{1-sin\frac{\theta_A}{2}}{1+sin\frac{\theta_A}{2}}$$ から、$\theta_A = 2\,sin^{-1}\left(\frac{1-\frac{a}{r}}{1+\frac{a}{r}}\right) = 119.2^\circ$ 同様に、$\theta_B = 95.9^\circ$, $\theta_C = 79.1^\circ$, $\theta_D = 65.8^\circ$

４辺の長さは、右図において、

$AB = L_1+L_2$, $BC = L_2+L_3$, $CD = L_3+L_4$, $DA = L_4+L_1$ である。

$L_1 = \frac{r}{tan\frac{\theta_A}{2}}$, $L_2 = \frac{r}{tan\frac{\theta_B}{2}}$, $L_3 = \frac{r}{tan\frac{\theta_C}{2}}$, $L_4 = \frac{r}{tan\frac{\theta_D}{2}}$ だから、

$$AB = L_1+L_2 = r\left(\frac{1}{tan\frac{\theta_A}{2}}+\frac{1}{tan\frac{\theta_B}{2}}\right) = 20.2$$ 同様に、$BC = 28.6$

$CD = 37.3$, $DA = 28.8$ として求められる。

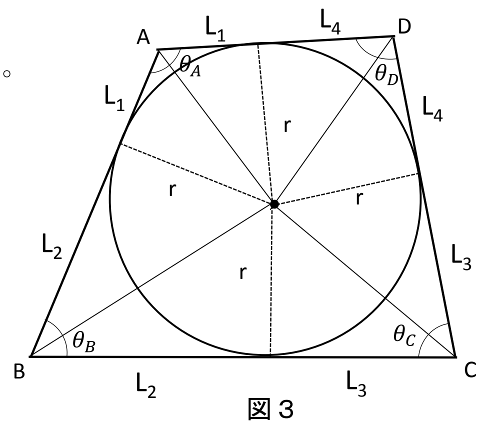


図３

結果を整理すると、

r	13.5261	θ_A	119.2°	AB	20.2
a	1	θ_B	95.9°	BC	28.6
b	2	θ_C	79.1°	CD	37.3
c	3	θ_D	65.8°	DA	28.8
d	4	（合計角度）	360°	（全周の長さ）	114.8

以下の表は、エクセルの計算フォームである。

入力条件	
a	1
b	2
c	3
d	4
各種計算用数値	
$\sqrt{a}$	1
$\sqrt{b}$	1.4142
$\sqrt{c}$	1.7321
$\sqrt{d}$	2
a+b+c+d	10
$a^2+b^2+c^2+d^2$	30
abcd	24
1/a+1/b+1/c+1/d	2.0833
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$	6.1463
$a^{3/2}+b^{3/2}+c^{3/2}+d^{3/2}$	17.0246
$\sqrt{abcd}$	4.8990
$a^{-1/2}+b^{-1/2}+c^{-1/2}+d^{-1/2}$	2.7845
$a^{5/2}+b^{5/2}+c^{5/2}+d^{5/2}$	54.2453
r^3 の項	6.1463
r^2 の項	−99.0021
r の項	219.5605
定数項	−66.8270

計算結果	
r	13.5261
$\angle\theta_A$ (rad)	2.0797
$\angle\theta_B$ (rad)	1.6732
$\angle\theta_C$ (rad)	1.3810
$\angle\theta_D$ (rad)	1.1493
$\angle\theta_A$ (°)	119.1554
$\angle\theta_B$ (°)	95.8673
$\angle\theta_C$ (°)	79.1277
$\angle\theta_D$ (°)	65.8496
合計	360
L_1	7.9428
L_2	12.2074
L_3	16.3713
L_4	20.8883
AB	20.1501
BC	28.5786
CD	37.2596
DA	28.8311

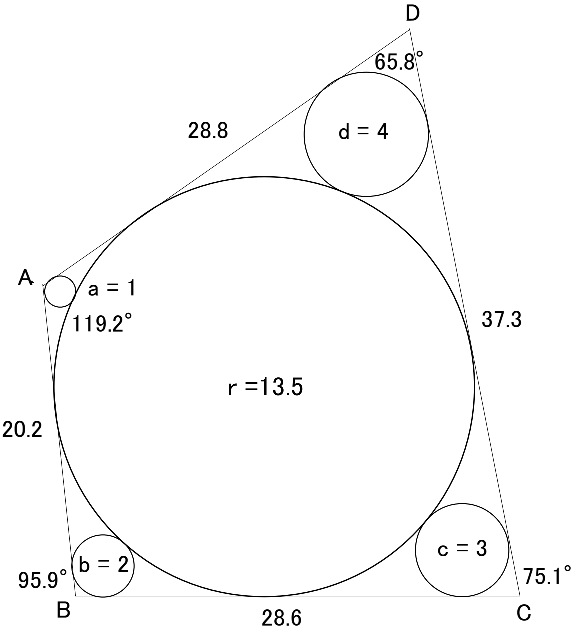


図４

これをもとに描いたのが図４である。

この問題が掲載されている、会田安明「算法貫通術 巻之三」は、巻之二と同じように山形大学 学術機関 リポジトリィからネット上に公開されていた。しかし、前問に比べてより難問だったためか、この問題の解答（予測）は正しいものではなかった。記号が充分発達していない時代に、このような問題に取り組んでいたのは本当に凄いことだと思う。（２０２０．０６．２１）

（２０２