９０「正方形のなかの２つの楕円の共通面積」

ネット上で見つけた問題に挑戦。

誰も考えつきそうで、まだ未見の図形問題。 **正方形のなかに内接して交差する２つの同じ楕円を描く。同じ楕円とは、大きさと偏心率 e が同じということ。この楕円を対角線上に配して内接させて、さらにクロスで配置する。正方形の辺の長さと偏心率を与えたとき、この重なり部分の面積を求める問題。**

投稿者は、正方形の辺の長 ＝１としても一般性は失われないとしている。ただし、解答は辺の長さを $\sqrt{2}$ として計算しているので、同じ条件で解いていく。いずれにせよ、問題の本質にはそれほど影響しない。

【解 答】

問題を図で表すと、図１のようになる。
直交させた楕円に対し、図のようにＸ－Ｙ座標を配置する。

楕円Ⅰ，Ⅱの長辺を a，短辺を b としてそれぞれ方程式で表すと次のようになる。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

博想録「**７２ 楕円を回転させると**」において、この共通部分の面積Ｓは既に計算済みで、以下のとおりである。

$$S=4ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

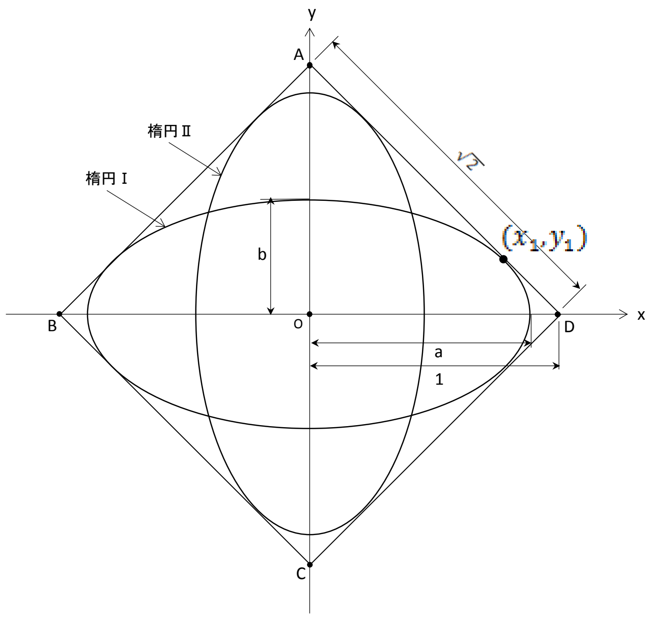

図１

今回の問題は、正方形の一辺を $\sqrt{2}$ としたとき、離心率 e でＳを表すという題意なので、a, b を離心率で表す必要がある。これがこの問題の少し難しいところだ。

楕円Ⅰ，Ⅱの第一象限における共通接線ＡＤの式は、$x+y=1$ ………… ④　　と表される。
一方、楕円Ⅰに着目して、楕円上の１点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めると、次の⑤式を得る。

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

これが④式に一致しなければならないので、

$\dfrac{x_1}{a^2}=1,\ \dfrac{y_1}{b^2}=1$ でなければならない。よって、$x_1=a^2,\ \ y_1=b^2$ である。

さらに $x+y=1$ から、$x_1 + y_1 = 1$ だから、$a^2+b^2=1$ ………… ⑥　という関係が導かれる。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される楕円の離心率 e は、図２のように長径と焦点間の距離の比であるから、

$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$　　………… ⑦ で表される。

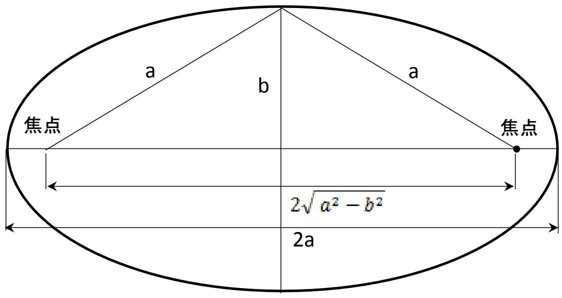

図２

⑥⑦より、a，b を離心率 e で表すと、

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2-e^2}}$，$b=\sqrt{\dfrac{1-e^2}{2-e^2}}$ となる。

よって、この a，b を③に入れると、

$$S=4ab\,tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$=4\frac{1}{\sqrt{2-e^2}}\sqrt{\frac{1-e^2}{2-e^2}}tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{1-e^2}{2-e^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2-e^2}}}\right)=4\frac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2}tan^{-1}\sqrt{1-e^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

これで正方形に内接し直交する２つの楕円の共通部分の面積を、離心率のみで表すことができた。離心率 e を変化させてグラフを描いてみると、図３のようになる。

離心率の範囲は、$a=b$ のとき $e=0$、$b\to 0$ のとき１である。

共通部分の面積の最大値は離心率が０の時で、

$S=4\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2}tan^{-1}\sqrt{1-e^2}=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot tan^{-1}(1)=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{\pi}{2}$ 、離心率０は $a=b$(円)の場合なので、このとき円の半径

は $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから、$S=\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$ と一致する。

離心率が１に近づくに従って、共通部分の面積が小さくなるのは、楕円が扁平になっていくためであり当然のことである。

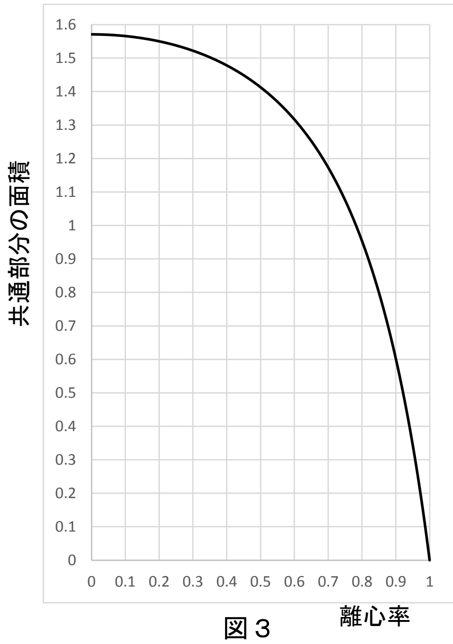

図３

具体的な数値で計算してみよう。

$a^2+b^2=1$ を満たす $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ を⑧式に入れてみると、

$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ より、$S=4\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2}tan^{-1}\sqrt{1-e^2}$

$$= 4\frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}}{2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}\cdot tan^{-1}\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 4\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\,(\fallingdotseq 0.9069)$$

③式に直接 a, b を入れると、

$$S = 4ab\,tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$$ と一致する。

計算を単純化するために、正方形の１辺の長さ $=\sqrt{2}$ としたが、これを１にしても基本的なことは変わらない。面積については $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ となることに注意すればよい。

投稿者の解は以下の通り。

> $$\frac{2\left(\sqrt{1-e^2}-\left(-2+e^2\right)\mathrm{ArcCsc}\left[\sqrt{2-e^2}\right]\right)}{\left(2-e^2\right)^{3/2}\sqrt{2-3e^2+e^4}}$$
>
> $2-e^2$ という因子はなんか中途半端な感じだが、どうしようもない。
> 解について「“あまり美しくない” 根号の中身を因数分解できるなど、検算中であるけれど一応書き込みしておく」

と結んでいる。

$$\frac{2\left[\sqrt{1-e^2}-(-2+e^2)ArcCsc\left(\sqrt{2-e^2}\right)\right]}{(2-e^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-3e^2+e^4}}$$ に $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ を入れて確認してみると、

$ArcCsc\left(\sqrt{2-e^2}\right) = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-e^2}}$ だから、$sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}} = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ である。

$$S = \frac{2\left[\sqrt{1-e^2}-(-2+e^2)ArcCsc\left(\sqrt{2-e^2}\right)\right]}{(2-e^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-3e^2-e^4}} = \frac{2\left[\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}-\left(-2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right)\cdot\frac{\pi}{3}\right]}{\left(2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4}} = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4\pi}{9}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{9+4\sqrt{3}\pi}{8}\,(\fallingdotseq 3.846)$$ という結果になり、$\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\,(\fallingdotseq 0.9069)$ とは一致しない。

１辺の長さ $=\sqrt{2}$ の正方形のなかに内接して交差する楕円の共通部分の面積を求める問題であるから、正方形の面積 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 以上となることはなく、この解は誤りではないかと思われる。

（２０２０．０６．３０）