

## 9 1 「江戸時代の数学者が考えていた問題－3」

ネット上で見つけた問題。かなりの難問である。

### 関流和算：4つの楕円のあいだの円

算額にみられる多くの幾何学的問題は図形の接触問題である。円と方形、楕円と三角形などの内接や外接を円理によって解くのが、主題である。

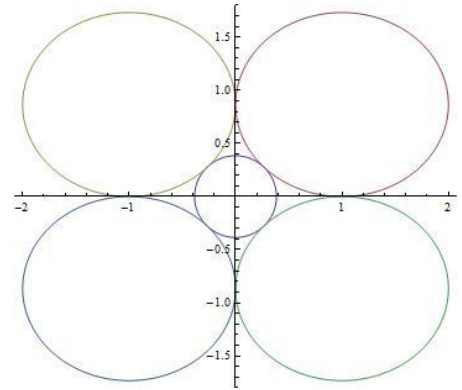
円理というのはことばのアヤだが、解析幾何と代数方程式で巧妙に解き明かすのが和算だ。ユークリッド幾何学的な解法ではない。そういう意味では算木ならぬコンピュータ代数を操る我らの世代にも解けない問題というわけではない。むしろ、計算機にゴリゴリ解を算出させるという意味では、和算家たちには他人ごとではない親近感をもつのだ。

というわけで、今回は下図のような問題を解いてみよう。

原点に対称的に配置された同一離心率  $e$  の4つの楕円と原点に置かれた円。その円の半径  $r$  を求めるのが課題である。右図は  $e = 1/2$  のケースである。

本ブログの読者ならご存知のようにこれは簡単には解けない。けれども、幸いにも簡単な連立方程式にはおとせる。

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 && \text{それぞれ、円の方程式、楕円の方程式、} \\ \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} &= 1 && \text{接点の方程式だ。}(x, y)\text{は接点の座標。} \\ \frac{x}{y} &= \frac{b^2(x-a)}{a^2(y-b)} && a, b \text{ は第一象限の楕円の中心の座標} \\ &&& (a, b) \text{ である。対称性を適切に考慮すれば一点での方程式でいい。} \end{aligned}$$



ならば一点での方程式でいい。ちなみに解は内接円と外接円のケースを含む。これを、下式に置き換える。こうしても一般性はなくなるであろう。

$e$  は楕円の離心率である。  $\{a = 1, b = \sqrt{1 - e^2}\}$

これらの問題は無論、解析幾何と代数方程式の範囲となる。そして、問題のレベルは高校数学であるが、残念ながらマンパワーで解析解は出せない。いや、出せないことはないがかなり難儀する。接点の  $x$  座標を示しておく。

$$\frac{1}{6e^2} \left[ -3 \cdot 6e^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^2 \sqrt{\frac{1}{e^2} \left( 6(1-2e^2)^2 - 8(1-4e^2+3e^4) \cdot \frac{4e^{2/3}(-1-e^2)^2}{(4-12e^2-39e^4-58e^6-27e^8-3\sqrt{3}\sqrt{e^4(-1-e^2)^4(8-8e^2-27e^4)})^{1/3}} - 2(8-24e^2-78e^4-116e^6-54e^8-6\sqrt{3}\sqrt{e^4(-1-e^2)^4(8-8e^2-27e^4)})^{1/3} \right)} \right]$$

$$3e^2 \sqrt{\left[ 8 \cdot \frac{8}{3} \left( -3 \cdot \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e^2} \right) \cdot \frac{2}{e^4} \cdot \frac{8}{e^2} - \frac{2e^{2/3}(-1-e^2)^2}{3e^4(4-12e^2-39e^4-58e^6-27e^8-3\sqrt{3}\sqrt{e^4(-1-e^2)^4(8-8e^2-27e^4)})^{1/3}} - \frac{(8-24e^2-78e^4-116e^6-54e^8-6\sqrt{3}\sqrt{e^4(-1-e^2)^4(8-8e^2-27e^4)})^{1/3}}{3e^4} \right]}$$

$$\frac{2\sqrt{6}(1-2e^2-2e^4)}{\sqrt[4]{\frac{6(1-2e^2)^2-8(1-4e^2+3e^4) \cdot \frac{4e^{2/3}(-1-e^2)^2}{(4-12e^2-39e^4-58e^6-27e^8-3\sqrt{3}\sqrt{e^4(-1-e^2)^4(8-8e^2-27e^4)})^{1/3}} - 2(8-24e^2-78e^4-116e^6-54e^8-6\sqrt{3}\sqrt{e^4(-1-e^2)^4(8-8e^2-27e^4)})^{1/3}}{e^4}}}}$$

つまり、三次方程式の解の一つになるのだ。江戸期の和算家は算木により厳密解を得ることが可能だったようだ。気の遠くなるような計算を積み重ねてこの手の幾何学模様（模様という次元になっている）を得るため努力していた。

しかも、彼らは名誉のためだけにこんな類の幾何計算を趣味として算額として奉納していたのだ。それはそれは高邁なことではないか。ちなみに今でもなお算額を神社に納める人たちはいる。その証拠を見なければ、東京渋谷の金王八幡宮に奉納されている。

以下、この問題への挑戦について経緯を交えて記す。

前ページの式、

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{y} = \frac{b^2(x-a)}{a^2(y-b)}$$

は、円を座標の中心とした場合の式である。

私は、図1（前ページの図の1/4を示している）に示すように、原点を楕円の中心に取り検討を行う。こうすることにより、

楕円の方程式は、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ..... ①

円の方程式は、 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  ..... ②

接線の方程式は、 $\frac{x-a}{y-b} = \frac{b^2x}{a^2y}$  ..... ③

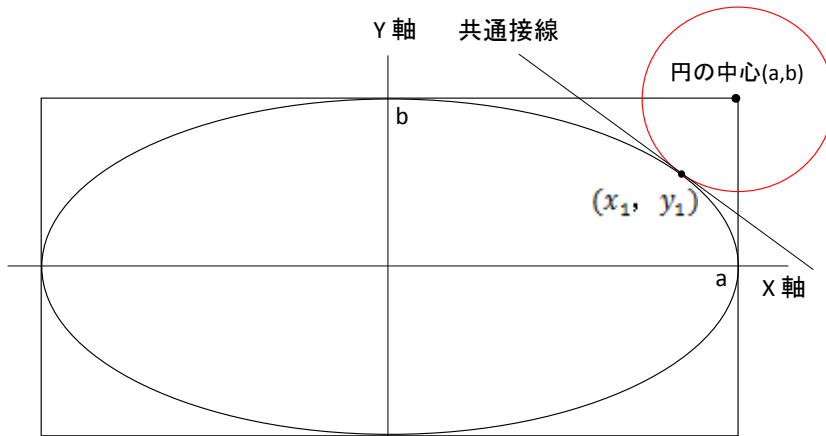


図 1

と表される。③式は、円の接線と楕円の接線の勾配が一致するという条件により導かれる。

① ③から  $y$  を消去すれば、

$$(a^2 - b^2)^2 x^4 - 2a^3(a^2 - b^2)x^3 + 2a^4b^2x^2 + 2a^5(a^2 - b^2)x - a^8 = 0 \quad \text{..... ④}$$

という式が導かれる。これを解き  $x, y$  を求め ② に代入すれば円の半径  $r$  を求めることができる。しかし、④は4次方程式で簡単に一般解を求めることはできない。

円と楕円の接する点を  $(x_1, y_1)$  とすると、その点における円の接線、楕円の接線の方程式は、

それぞれ、 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ ,  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$  と表される。

この2つの方程式は一致するはずであるから、これらを同一の式として解き  $(x_1, y_1)$  の座標を求めると次のようになった。

$$x_1 = \frac{-[(a^2 - b^2)r^2 - a^2(3a^2 - b^2)] - \sqrt{(a^2 - b^2)^2r^4 - a^2(a^2 - b^2)(3a^2 - 2b^2)r^2 + a^4b^2(3a^2 + b^2)}}{3a(a^2 - b^2)}$$

$$y_1 = \frac{-[(a^2 - b^2)r^2 - a^2(a^2 - 3b^2)] + \sqrt{(a^2 - b^2)^2r^4 - b^2(a^2 - b^2)(2a^2 - 3b^2)r^2 + a^2b^4(a^2 + 3b^2)}}{3a(a^2 - b^2)}$$

①～③式は  $(x_1, y_1)$  を通るので、そのいずれかを選び  $(x_1, y_1)$  を代入し、この2つの式と連立させ、 $x_1, y_1$  を消去すれば円の半径  $r$  を求めることができるが、これも容易にはできない。ここで行き詰ってしまった。

次に思いついたのは、楕円の方程式 ①と接線の方程式 ③から導かれた④は、一点で接していることから重根を持つはずである。そのことを利用して何とかできないだろうか？

楕円の離心率  $e$  を用いて④式を簡単にすると、

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ から、 } b = a\sqrt{1 - e^2} \text{ を入れて整理すると次式を得る。}$$

$$e^4x^4 - 2ae^2x^3 + 2a^2(1 - e^2)x^2 + 2a^3e^2x - a^4 = 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

⑤は4次方程式で、これが重根をもつことから、次のように因数分解できるはずである。

$$(Ax + B)^2(Cx^2 + Dx + E) = 0 \quad \dots\dots\dots ⑥$$

これを展開して、

$$A^2Cx^4 + (2ABC + A^2D)x^3 + (A^2E + B^2C + 2ABD)x^2 + (B^2D + 2ABE)x + B^2E = 0 \quad \dots\dots\dots ⑦$$

⑤⑦ 2つの式の係数を比較して、

$$\left. \begin{aligned} A^2C &= e^4, \quad 2ABC + A^2D = -2ae^2, \quad A^2E + B^2C + 2ABD = 2a^2(1 - e^2), \\ B^2D + 2ABE &= 2a^3e^2, \quad B^2E = -a^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑧$$

⑧の連立方程式も解くのは容易ではないが、必要なのは  $A, B$  なので、

$$X = \frac{B}{A} \text{ と置くことにより⑧から } e^4X^4 + ae^2X^3 + a^3e^2X + a^4 = 0 \text{ が導かれる。}$$

この式は  $(e^2X^3 + a^3)(e^2X + a) = 0$  と因数分解でき、これを解いて、

$$X = \frac{B}{A} = -ae^{-\frac{2}{3}}, \text{ または } -ae^{-2}$$

$$(Ax + B)^2(Cx^2 + Dx + E) = 0 \text{ を、 } A^2\left(x + \frac{B}{A}\right)^2(Cx^2 + Dx + E) = 0 \text{ と変形し、上記 } X \text{ を入れると、}$$

$$A^2\left(x - ae^{-\frac{2}{3}}\right)^2(Cx^2 + Dx + E) = 0 \text{ または、 } A^2(x - ae^{-2})^2(Cx^2 + Dx + E) = 0$$

これから、 $x = ae^{-\frac{2}{3}}$ , または  $x = ae^{-2}$  が得られる。

$x = ae^{-\frac{2}{3}}$ ,  $x = ae^{-2}$  を⑤の左辺に入れて計算すれば0になるはずであるが、

$$e^4 \left( ae^{-\frac{2}{3}} \right)^4 - 2ae^2 \left( ae^{-\frac{2}{3}} \right)^3 + 2a^2(1-e^2) \left( ae^{-\frac{2}{3}} \right)^2 + 2a^3e^2 \left( ae^{-\frac{2}{3}} \right) - a^4 = a^4 \left( 3e^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{2}{3}} - 1 \right)$$

$$= a^4 \left( 3e^{\frac{2}{3}} + 1 \right) \left( e^{\frac{2}{3}} - 1 \right)$$

$$e^4(ae^{-2})^4 - 2ae^2(ae^{-2})^3 + 2a^2(1-e^2)(ae^{-2})^2 + 2a^3e^2(ae^{-2}) - a^4 = a^4(e^{-2} - 1)^2$$

という結果になり、いずれも0にならない。

確認のため、具体的な数値を入れて計算してみる。

$$a = 1, b = \frac{1}{2} \text{ とすると、 } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となるので、}$$

これを⑤  $e^4x^4 - 2ae^2x^3 + 2a^2(1-e^2)x^2 + 2a^3e^2x - a^4 = 0$  に入れると、

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 x^4 - 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 x^3 + 2 \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] x^2 + 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 x - 1 = 0 \quad \text{整理すると、}$$

$$\frac{9}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \text{これを解いて、 } x = \frac{1}{3} \left[ 2 - \sqrt{5} \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}} \right]$$

$$x = \frac{1}{3} \left[ 2 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{-3 + 2\sqrt{5}} \right] \text{ から実根 } 2, \text{ 複素根 } 2 \text{ となり重根ではない。}$$

やっと良い方法を見つけたと思って頑張って計算してみたが、結局解くことはできなかった。重根とならない理由は、①と③を連立させて導いた⑤式であったが、③は円の接線と楕円の接線の勾配が一致するという条件により導いたもので、接線の方程式そのものではなかったためであった。

さらに図1において、円と楕円の共通接線に直交し、その接点を通る直線は円の中心  $(a, b)$  を通るので、その条件で導いた式を連立させる方法も検討したが、いずれも4次方程式が出てきて簡単に解くことができず途中で断念した。

次に思いついたのは、⑤の4次方程式を解の公式に当てはめて力づくで解いてみたらどうか? ということである。⑤をチルンハウス変換で変形し、完全平方式にするわけだが、その過程で出て来る三次分解方程式は次の通りになり、この方程式でさえ一般解はとも得られそうにない。

$$t^3 - \frac{4e^2 - 1}{2e^4} t^2 - \frac{5 - 8e^2}{4e^8} t + \frac{-8e^6 + 16e^4 - 24e^2 + 15}{2e^{10}} = 0$$

そんな中、楕円を媒介変数表示にして円の方程式に入れると、 $a, b$  が ( ) の外に出て来ることに気付きやってみることにした。

楕円の媒介変数表示は  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$  と表され、これを円の方程式②に入れると、

$$(a \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta - b)^2 = r^2, \quad a^2(\cos \theta - 1)^2 + b^2(\sin \theta - 1)^2 = r^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

となる。この式は、媒介変数で表された楕円上の点と、円の中心との距離を表した式に他ならない。

座標  $(a, b)$  を中心とする円の点のうち、最も近い点が楕円との接点であるから、

$$f(\theta) = a^2(\cos \theta - 1)^2 + b^2(\sin \theta - 1)^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

とにおいて、この最小値を求めることにより、円と楕円の接点が求められるはずである。

⑩を  $\theta$  で微分して 0 と置くと、

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= a^2 \cdot 2(\cos \theta - 1) \cdot (-\sin \theta) + b^2 \cdot 2(\sin \theta - 1) \cdot \cos \theta \\ &= (a^2 - b^2) \sin \theta \cdot \cos \theta - (a^2 \sin \theta - b^2 \cos \theta) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{11} \end{aligned}$$

これを満たす  $\theta$  から円と楕円が接する点の座標が求められ、⑨に  $\theta$  を代入すれば円の半径  $r$  が求められる。

このように簡単に言ってみても、実際に⑪を解くのは非常に難しい。Wolfram Alpha にこの方程式を解いてもらおうと、三角関数の比較的単純な方程式に見えたが、結局 4 次方程式の解のような式が現れた。

式が用紙に収まらず、縮小されて良く見えないのは、ネット上で示されていた解答と同様、非常に長い式となったためである。

$\theta =$

$$\begin{aligned} &2 \tan^{-1} \left[ \frac{b^2 - 2a^2}{2b^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b^2 - 2a^2)^2}{b^4} - \frac{4a^2}{\sqrt{3}\sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^6b^4 - 46a^4b^6 + 27a^4b^8}} + \frac{2\sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^6b^4 - 46a^4b^6 + 27a^4b^8}}}{3^{\frac{3}{2}}b^2}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(b^2 - 2a^2)^2}{b^4} + \frac{4a^2}{\sqrt{3}\sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^6b^4 - 46a^4b^6 + 27a^4b^8}} - \frac{2\sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^6b^4 - 46a^4b^6 + 27a^4b^8}}}{3^{\frac{3}{2}}b^2} - \frac{8(b^2 - 2a^2)^3 - 16}{b^6} - \frac{4(b^2 - 2a^2)^2}{b^4} - \frac{4a^2}{\sqrt{3}\sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^6b^4 - 46a^4b^6 + 27a^4b^8}} + \frac{2\sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^6b^4 - 46a^4b^6 + 27a^4b^8}}}{3^{\frac{3}{2}}b^2}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{12} \end{aligned}$$

要するに、この問題は式を立てることはできるが、それが解けないという問題なのだった。

⑪ 式において、 $\tan \frac{\theta}{2} = t$  と置いて書き直すと、 $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  だから、

$$b^2t^4 + 2(2a^2 - b^2)t^3 + 2b^2t - b^2 = 0 \quad \text{となり、4 次方程に帰着する。}$$

これでは解が正しいかどうかわからないので、数値を入れて計算して確認する。

前と同じように  $a = 1, b = \frac{1}{2}$  として ⑫ に入れると次のようになる。

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[ -3.5 - \frac{1}{2} \sqrt{49 - \frac{4}{0.68614} + \frac{2 \cdot 0.47574}{0.52002}} + \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 49 + \frac{4}{0.68614} - \frac{2 \cdot 0.47574}{0.52002} - \frac{2760}{4 \sqrt{49 - \frac{4}{0.68614} + \frac{2 \cdot 0.47574}{0.52002}}}} \right]$$

$$= 2 \tan^{-1}(0.302348)$$

これを解いて、 $\theta = 0.58722(\text{rad}) (= 16.8^\circ)$

⑪ 式  $(a^2 - b^2) \sin \theta \cdot \cos \theta - (a^2 \sin \theta - b^2 \cos \theta) = 0$  に、 $a = 1, b = \frac{1}{2}$  を入れると、

$$\frac{3}{4} \sin \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta + \frac{1}{4} \cos \theta = 0 \quad \text{となりこれを解くと、}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left\{ -7 - 3\sqrt{5} + \sqrt{2(51 + 23\sqrt{5})} \right\} \right] \quad \text{となり、} \frac{1}{2} \left\{ -7 - 3\sqrt{5} + \sqrt{2(51 + 23\sqrt{5})} \right\} \text{ を計算すると}$$

0.3023483 となるので、上記計算結果と一致することが確認できた。

よって、 $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  に数値を入れると、

$$x = 1 \cdot \cos(0.58722) = 0.832484, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \sin(0.58722) = 0.277024$$

以上より、 $r = \sqrt{(0.832484 - 1)^2 + (0.277024 - \frac{1}{2})^2} = 0.27889$  として円の半径が求められた。

$a = b = 1$  つまり円の場合、⑫式がどうなるか確認してみよう。

この式は、下記の無理式（平方根，三乗根）を含んだ複雑な2つの式の繰り返しでできている。

$$\frac{4a^2}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^8b^4 - 46a^6b^6 + 27a^4b^8}}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}}$$

$$\frac{2^3 \sqrt{-9a^4b^2 + 9a^2b^4 + \sqrt{3}\sqrt{27a^8b^4 - 46a^6b^6 + 27a^4b^8}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}{3^{\frac{2}{3}}}$$

となるので、⑫は次のように計算される。

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}} + \frac{2^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}{3^{\frac{2}{3}}}} + \frac{1}{2} \sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}} - \frac{2^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}{3^{\frac{2}{3}}}} - \frac{-24}{4 \sqrt{1 + \frac{2^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}{3^{\frac{2}{3}}} - \frac{4}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}}}} \right]$$

ルート内の複雑な  $\frac{4}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}} + \frac{2^3 \sqrt{2\sqrt{6}}}{3^{\frac{2}{3}}}$  は 0 となり、結局上式は

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{8} = -1 + \sqrt{2} \right] = 0.785398 \quad \text{という結果になった。}$$

単なる数値計算であっても、このくらい複雑な式になると正しい結果を得るまでには大変である。

この値を  $\pi$  で割ると 0.25 となり  $\theta = \frac{\pi}{4}$  であることがわかる。

この結果を  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  に入れると、

$$x = 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

この場合 図2 のようになり、この問題なら5分で解けることを考えると、円に対して楕円の問題がいかに難しくなるかがわかるだろう。(2020.07.29)

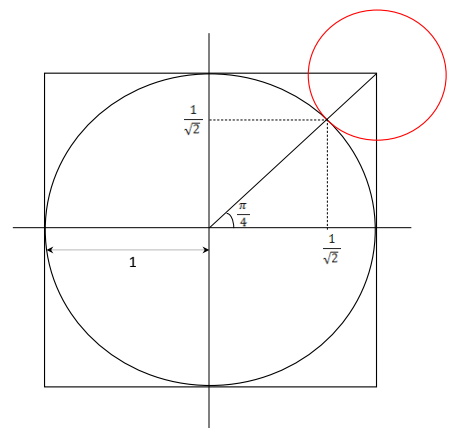


図2