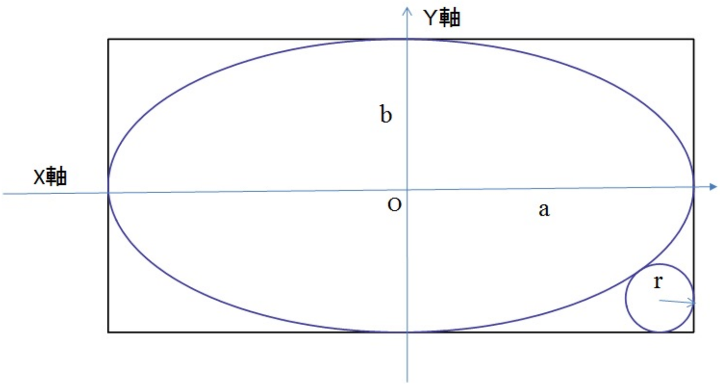
９２「江戸時代の数学者が考えていた問題－４」

ネット上で見つけた問題。これも前問と同様にかなりの難問である。

算額の問題再び

長方形に内接する楕円の片隅にある円を求める（下図）、そんな問題が有名な深川英俊の本にあった。算額の一つにある問題だ。楕円と円と長方形はそれぞれ接していることはもちろんだ。そうした場合における円の半径 r を求めるのだ。



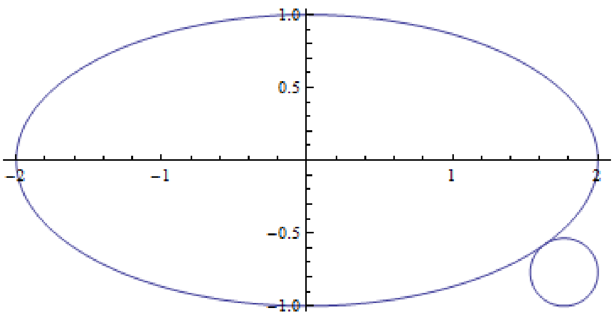
解はこうなるようだ。

$$a+b+\sqrt{a\,b}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a+b}$$

基本対称式でできているシンプルな式が美しい。

『日本の数学と算額』(1998)の６５ページの式とかたちは違うけれど同値である。

a=2、b=1 の場合の作図結果を示す。



では、円のかわりに同じ偏心率の楕円を内接させることはできるであろうか？

上記の円に比べてどちらが充填率が大きいだろうか？長方形に対する面積比を充填率といっている。円の方がまさる感じもするが計算で確かめてみたい。

実を言うと前問「９１　江戸時代の数学者が考えていた問題－３」より、この問題の方が見つけたのが早く、先に挑戦した。しかし、あまりにも難しく歯が立たず一旦諦めたという経緯がある。

ところが、前問を解いていく過程で、楕円を $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ と媒介変数表示することによって解くことができたので、この問題も同様の方法で解けるのではないかと考えた。

前問と違うところは、解がわかっていることである。前ページのシンプルで美しい式を何とか導きたい。

図１に示すように、原点を楕円の中心に取り、円を楕円の右上に配置して計算を進める。

楕円の方程式は、$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ……………… ①

円の方程式は、$[x-(a-r)]^2 + [y-(b-r)]^2 = r^2$ ……………… ②

接線の方程式は、$\dfrac{x-(a-r)}{y-(b-r)} = \dfrac{b^2x}{a^2y}$ ……………… ③

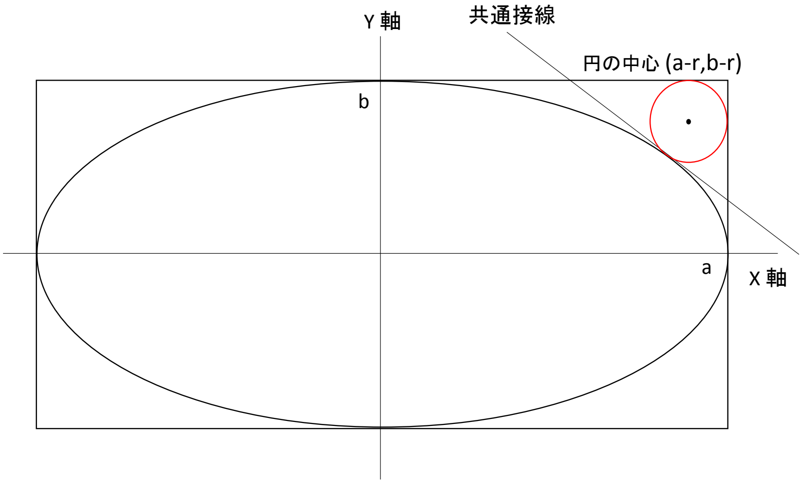


図１

と表される。③式は、円の接線と楕円の接線の勾配が一致するという条件により導かれる。

前問と違うのは、円の方程式が $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ から、$[x-(a-r)]^2 + [y-(b-r)]^2 = r^2$ となっているところである。$a \to a-r,\ b \to b-r$ となっているだけで、数段難しくなる。

楕円の方程式を $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ と媒介変数表示して②に入れると、

$[a\cos\theta - (a-r)]^2 + [b\sin\theta - (b-r)]^2 = r^2$ これを展開して整理すると、

$(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta - a(a-r)\sin\theta + b(b-r)\cos\theta = r^2$ ……………… ④

前問では上式④の左辺に r が含まれていなかったが、今回は含まれているところが難しくなっている要因である。④の左辺から r を消去するため、②式から r を取り出すと、

$$r = -\sqrt{2}\sqrt{ab - ay - bx + xy} + (a+b) - (x+y)$$

を得る。同様に③式から r を取り出すと、

$$r = \frac{(a^2-b^2)xy - a^3y + b^3x}{b^2x - a^2y}$$

　これらの式を等しいと置いて、

$$-\sqrt{2}\sqrt{ab-ay-bx+xy}+(a+b)-(x+y)=\frac{(a^2-b^2)xy-a^3y+b^3x}{b^2x-a^2y}$$

上式に $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ を入れて整理すると次式となる。

$$-\sqrt{2ab}\sqrt{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}+(a+b)-(a\cos\theta+b\sin\theta)=\frac{(a^2-b^2)\cos\theta\sin\theta-(a^2\sin\theta-b^2\cos\theta)}{b\cos\theta-a\sin\theta}$$

　⑤の両辺に$(b\cos\theta-a\sin\theta)$を掛け整理すると、　　　　　　　　　　　　………………… ⑤

$$\sqrt{2}\sqrt{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}(b\cos\theta-a\sin\theta)=\sqrt{ab}(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta-1)$$

　上式の両辺を二乗してさらに計算すると、式は驚くほどシンプルになり次のようになった。

$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta=ab \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

　問題は難しいが、答えはシンプルになりそうだ。（ただし途中の計算はかなり面倒）

倍角の公式より、$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$, $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$ これを⑥に入れて、

$$a^2\frac{1-\cos2\theta}{2}+b^2\frac{1+\cos2\theta}{2}=ab,\quad -(a^2-b^2)\cos2\theta=2ab-a^2-b^2=-(a-b)^2$$

従って $\cos2\theta=\dfrac{a-b}{a+b}$, $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}=\dfrac{1+\frac{a-b}{a+b}}{2}=\dfrac{a}{a+b}$, $\sin^2\theta=\dfrac{1-\frac{a-b}{a+b}}{2}=\dfrac{b}{a+b}$ となる。

よって、$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$, $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$ を得る。この $\sin\theta$, $\cos\theta$ を⑤の右辺に入れると、

$$r=\frac{(a^2-b^2)\cos\theta\sin\theta-(a^2\sin\theta-b^2\cos\theta)}{b\cos\theta-a\sin\theta}=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{\frac{a}{a+b}}\sqrt{\frac{b}{a+b}}-\left(a^2\sqrt{\frac{b}{a+b}}-b^2\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)}{b\sqrt{\frac{a}{a+b}}-a\sqrt{\frac{b}{a+b}}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{ab}-\sqrt{a+b}\left(a^2\sqrt{b}-b^2\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a+b}\left(b\sqrt{a}-a\sqrt{b}\right)}$$ 分母分子に$\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)$を掛けて、

$$=\frac{\left[(a^2-b^2)\sqrt{ab}-\sqrt{a+b}\left(a^2\sqrt{b}-b^2\sqrt{a}\right)\right]\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a+b}\left(b\sqrt{a}-a\sqrt{b}\right)\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{ab(a-b)\sqrt{a+b}\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-ab(a-b)\sqrt{a+b}\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{-ab(a-b)\sqrt{a+b}}$$

分母分子を $-ab(a-b)\sqrt{a+b}$ で割ると、

$$=\frac{\cancel{ab(a-b)\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\cancel{ab(a-b)\sqrt{a+b}}\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{-\cancel{ab(a-b)\sqrt{a+b}}}=a+b+\sqrt{ab}-\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

$$r=a+b+\sqrt{ab}-\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

　この r を求める計算はかなり苦労したが、何とか正しい r の式を導くことができた。

　問題の後半について、

「円のかわりに同じ偏心率の楕円を内接させることはできるであろうか？」

これは簡単、内接させる楕円の長径を a', 短径を b' とすると、同じ偏心率ということは、

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'}$ ということなので、図２のように、もとの楕円と内接楕円の中心、及び２つの楕円の接点Ｑは直線ＯＰ上に並ぶ。このことが分かればあとは簡単にできる。

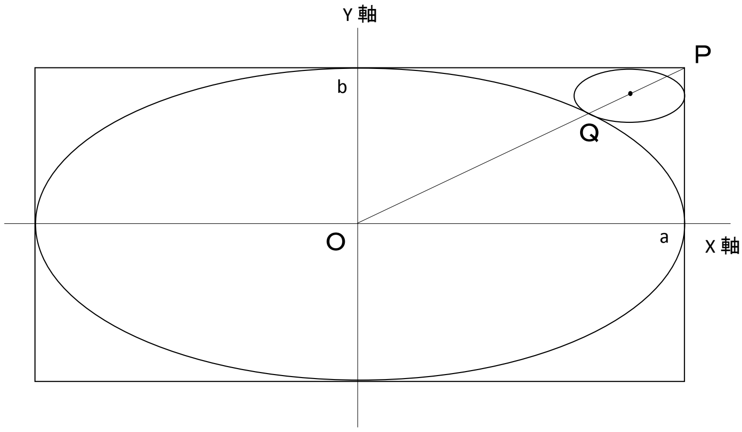


図２

　直線ＯＰの式は、

$y = \dfrac{b}{a}x$，これを楕円の方程式①

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に入れると、

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{\left(\frac{b}{a}x\right)^2}{b^2} = 1$，$2\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ より、

$x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，同様に $y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ 、これが点Ｑの座標である。ＯＰ－ＯＱ $= \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$ 、よって長径 $a' = \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}\right)\left(\dfrac{a}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}a$

短径 $b' = \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}\right)\left(\dfrac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}b$

　以上より、もとの楕円及び内接楕円の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると、

$$S_1 = \pi ab, \quad S_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}a\right)\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}b\right) = \pi ab\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

　楕円に外接する長方形の面積を S とすると、$S = 2a \cdot 2b = 4ab$ だから、
外接長方形に対する２つの楕円の充填率は、

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{\pi ab + \pi ab\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{4ab} = \frac{\pi}{4}\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] = 0.9004 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

不思議なことに a，b が消えてしまった。
ということは、楕円の場合の充填率はその形に無関係に決まるということで、この事実は興味深い。

　最後の問い「**円に比べてどちらが充填率が大きいだろうか？長方形に対する面積比を充填率といっている。円の方がまさる感じもするが計算で確かめてみたい。**」

　楕円の離心率を e とすると、$b = a\sqrt{1 - e^2}$ と表される。これを⑦ $r = a + b + \sqrt{ab} - \sqrt{a + b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$ に入れると、r は a，e で表され、

$$r = a + b + \sqrt{ab} - \sqrt{a + b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a + a\sqrt{1 - e^2} + \sqrt{a \cdot a\sqrt{1 - e^2}} - \sqrt{a + a\sqrt{1 - e^2}}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a\sqrt{1 - e^2}}\right)$$

$= a\left[1 + \sqrt{1 - e^2} + \sqrt{\sqrt{1 - e^2}} - \sqrt{1 + \sqrt{1 - e^2}}\left(1 + \sqrt{\sqrt{1 - e^2}}\right)\right]$ となる。

内接円の面積を S_3 とすると、

$$S_3=\pi a^2\left[1+\sqrt{1-e^2}+\sqrt{\sqrt{1-e^2}}-\sqrt{1+\sqrt{1-e^2}}\left(1+\sqrt{\sqrt{1-e^2}}\right)\right]^2$$

よって充填率は、

$$\frac{S_1+S_3}{S}=\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}+\pi a^2\left[1+\sqrt{1-e^2}+\sqrt{\sqrt{1-e^2}}-\sqrt{1+\sqrt{1-e^2}}\left(1+\sqrt{\sqrt{1-e^2}}\right)\right]^2}{4a^2\sqrt{1-e^2}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{1-e^2}+\pi\left[1+\sqrt{1-e^2}+\sqrt{\sqrt{1-e^2}}-\sqrt{1+\sqrt{1-e^2}}\left(1+\sqrt{\sqrt{1-e^2}}\right)\right]^2}{4\sqrt{1-e^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

これで充填率が離心率 e のみで表された。上式はこれ以上簡単にすることが難しいので、⑨を e の関数としてグラフを描いてみる。$0<e<1$ なので、グラフは図３のとおりとなる。

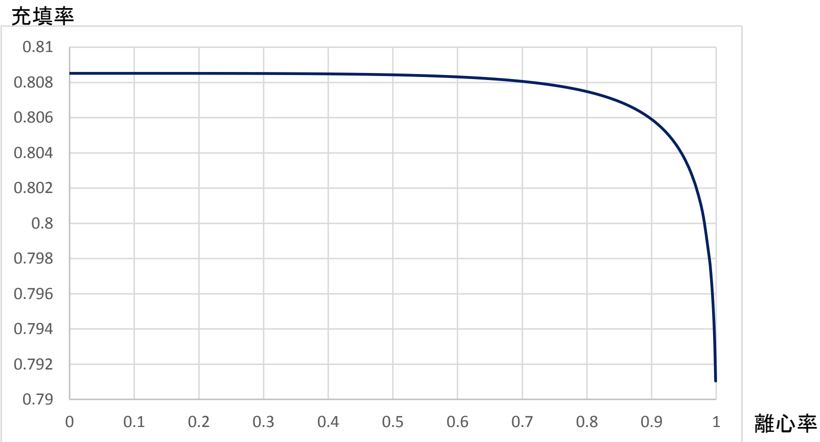


図３

離心率が０に近いほど充填率が大きく、１に近づくほど小さくなる。楕円と円の組み合わせの場合は、楕円が円に近くなればなるほど充填率が大きいことを示し、離心率が大きな、つまり扁平な楕円になるほど充填率が小さくなることを示している。

正方形に対する円と内接円の合計面積の充填率は、

$$\frac{\pi r^2+\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 r^2}{4r^2}=\frac{\pi+\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2}{4}=\frac{3.234}{4}=0.809$$ となり、図３の最大値に一致する。

一方、長方形に対する楕円と楕円の合計面積の充填率は⑧で計算したように、離心率に関係なく一定値 0.9004 であるから、楕円と円の場合に対し、楕円と楕円の方が充填率は大きいことになる。

最初にこの問題に挑戦した時は突破口が見つからなかったが、前問で楕円を媒介変数で表し、円の中心と楕円上の点の距離の最小値を求めることにより解けたことから、この問題を解くことができた。

前問では、楕円と円の接点の座標は複雑な式となり簡単に表すことができず、最終的には数値計算によらざるを得なかった。しかし、この問題は接点の座標は驚くほど簡単な式で表され、その結果内接円の半径は非常にシンプル、そして不思議と均整の取れた式になることがわかり感動ものだった。

（２０２０．０８．０３）