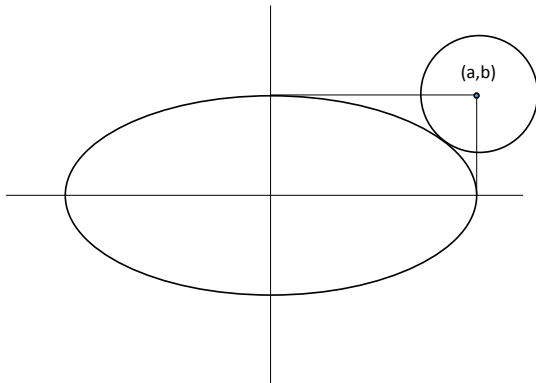
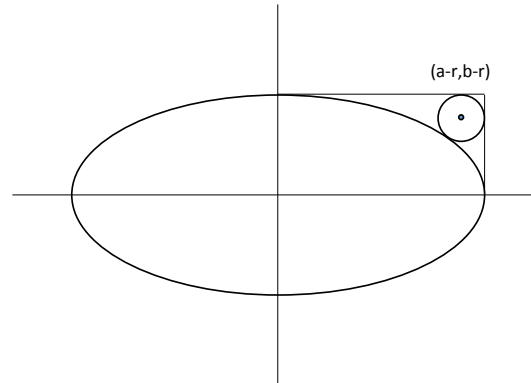


9.7 「ある点から楕円への最小距離」

「博想録 9.1, 9.2」は楕円に接する円の半径を求めるもので、平面上の決められた 1 点から、楕円への最小距離を求める問題だった。それに対しこの問題は、平面上の任意の点から楕円への最小距離を求める問題である。いわば一般解を求める問題であり、かなりの難問といえる。もし、9.1, 9.2 より先にこの問題に挑戦していたとしたら、全く歯が立たなかったかも知れない。



「9.1」



「9.2」

この問題を図に描くと図 1 のようになる。

任意の点の座標を (p, q) とする。

楕円の媒介変数表示は、 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ と表され、これを点 (p, q) を中心とする半径 r の円の方程式 $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ に代入すると、

$$(a \cos \theta - p)^2 + (b \sin \theta - q)^2 = r^2$$

座標 (p, q) を中心とする円の点のうち、最も近い点が楕円との接点であるから、その距離 r を θ の関数として表すと次のようになる。

$$f(\theta) = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - 2(ap \cos \theta + bq \sin \theta) + p^2 + q^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

① の最小値を求めることにより、楕円と円の最小距離が求められる。

① を θ で微分して 0 と置くと、

$$f'(\theta) = -(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta + ap \sin \theta - bq \cos \theta = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

ここで $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおくと、 $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せるので、②に代入して t の関数に変換する。

$$-(a^2 - b^2) \frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} + ap \frac{2t}{1+t^2} - bq \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0 \quad \text{これを整理して、}$$

$$bqt^4 + 2(a^2 + ap - b^2)t^3 - 2(a^2 - ap - b^2)t - bq = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

この式は「博想録 9.1」で導いた、 $b^2 t^4 + 2(2a^2 - b^2)t^3 + 2b^2 t - b^2 = 0$ に対応するものである。

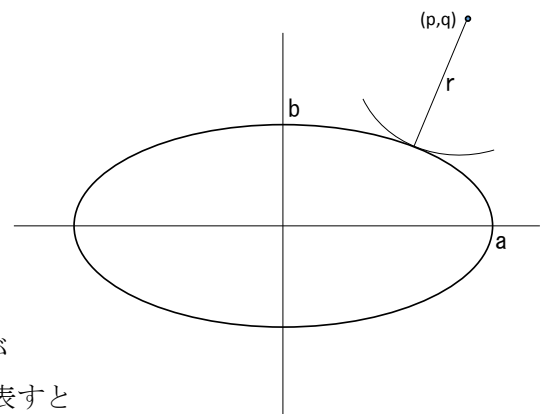


図 1

平面上の任意の点としたことにより、当然式は複雑になっている。

Wolfram Alpha を用いてこの方程式を解くと、次のような式が導かれる。これは 4 次方程式の根の公式に基づく解である。

$\theta =$

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{-a^2 - pa + b^2}{2bq} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a^2 - pa + b^2)^2}{b^2 q^2} + \frac{4\sqrt{2}[(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2]}{bq \sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2) + \sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2)]^2 - 4[12\{(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2\}]^3}}}} \right] + \frac{\sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2) + \sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2)]^2 - 4[12\{(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2\}]^3}}]}{3\sqrt{2}bq} \right] + \dots \quad (4)$$

ページに納めるために縮小したが、これでは全く見えないので分解して分かりやすくすると次のようになる。

$$A = \frac{-a^2 - ap + b^2}{bq}, \quad B = \frac{-a^2 + ap + b^2}{bq}$$

$$C = \sqrt[3]{[-432abpq(a^2 - b^2) + \sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2)]^2 - 4[12\{(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2\}]^3}]}$$

$D = (a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2$ とおくと、

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[\frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot D}{bq \cdot C} + \frac{C}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot bq}} + \frac{1}{2} \sqrt{2A^2 - \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot D}{bq \cdot C} - \frac{C}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot bq} - \frac{2A^3 - 4B}{\sqrt{A^2 + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot D}{bq \cdot C} + \frac{C}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot bq}}} \right] \dots \quad (5)$$

これから θ を求めれば、 $r = \sqrt{(a \cos \theta - p)^2 + (b \sin \theta - q)^2}$ により最小距離が計算できる。それでも⑤がとて複雑な式なので、一般解としての r を示すことは非常に難しい。

⑤ が正しいかどうか確認するため、「9 1」と同様に数値を入れて計算する。

$a = 1, b = \frac{1}{2}, p = 1, q = \frac{1}{2}$ として「9 1」と全く同じ結果が導かれれば⑤が正しいといえる。

$$A = \frac{-a^2 - ap + b^2}{bq} = \frac{-1^2 - 1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -7$$

$$B = \frac{-a^2 + ap + b^2}{bq} = \frac{-1^2 + 1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$$C = \sqrt[3]{[-432abpq(a^2 - b^2) + \sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2)]^2 - 4[12\{(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2\}]^3}]}$$

$$= \sqrt[3]{\left[-432 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \sqrt{\left[-432 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]^2 - 4 \left[12 \left\{ \left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 - 1^2 \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} \right]^3 \right]} \right]}$$

$$= 1.728966$$

$$D = (a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2 = \left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 - 1^2 \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -0.5$$

以上を⑤に代入して θ を計算すると、

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[\begin{aligned} & \frac{-7}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot (-0.5)}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1.728966)} + \frac{1.728966}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}} \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (-7)^2 - \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot (-0.5)}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1.728966)} - \frac{1.728966}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{2 \cdot (-7)^3 - 4 \cdot 1}{\sqrt{(-7)^2 + \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot (-0.5)}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1.728966)} + \frac{1.728966}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}}} \end{aligned} \right]$$

$\theta = 2 \tan^{-1}(-3.5 - 3.354101 + 7.156450) = 2 \tan^{-1}(0.302348)$ となり、

$\theta = 0.58722(\text{rad}) (= 16.8^\circ)$ 以上から「91」と同様の結果が導かれたので、⑤が正しいことが確認できた。

⑤式と「91」⑫式とを比べてみると、次の表のとおりとなる。

	「91」	本稿
A	$\frac{b^2 - 2a^2}{b^2}$	$\frac{-a^2 - ap + b^2}{bq}$
B	1	$\frac{-a^2 + ap + b^2}{bq}$
C	$2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \sqrt{-9a^4 b^2 + 9a^2 b^4 + \sqrt{3} \sqrt{27a^8 b^4 - 46a^6 b^6 + 27a^4 b^8}}$	$\sqrt[3]{[-432abpq(a^2 - b^2) + \sqrt{[-432abpq(a^2 - b^2)]^2 - 4[12\{(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2\}^3]}]}$
D	$-2a^2 b^2$	$(a^2 - b^2)^2 - a^2 p^2 - b^2 q^2$

$ap \rightarrow a^2$, $bq \rightarrow b^2$ と置きかえると一致することがわかる。

これで、「91」の一般解が求めることができた。

⑤において $a = p$, $b = q$ とおけば、「91」は比較的簡単に解けるが、「92」については困難である。それは、点の座標が $(a - r, b - r)$ のように未知数 r を含んだ形で与えられているため、

「92」は特殊な問題であるといえる。見た目は似ているが、この問題はある点から楕円までの最小距離を求めるといふのは異なり、「長辺 a , 短辺 b の長方形に内接する楕円の四隅の一郭にピッタリ収まる円の半径を求めよ」という問題であるためだ。

「92」の解が $r = a + b + \sqrt{ab} - \sqrt{a + b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ のように、⑤とは似ても似つかない形で表されていることから、全く異質の問題であるということが分かる。 (2020. 09. 06)