1

青春の完結

～中岡稔先生のSteenrodの同型定理をめぐって～

会員番号　7777　所属　NEC広島　　氏名　泉　宏明

私は大学4回生の時、Homologyに取り憑かれた事があった。既に18年前のことである。それは、中岡稔先生の著書「不動点定理とその周辺」の130頁～139頁にかけて証明されている、任意の可換体上におけるSteenrodの同型定理である。しかし、凡人の私にとって見れば、簡単なはずの定理が、非常に難しく感じられた。また、先生の証明は特に係数項の決定において、誤りがあるように思われる。この解決を21才の10月頃から始めて、22才の3月(誕生日頃)に一応完成させた。しかし、後になってみれば、証明は非常に雑なものであった。大学を卒業しても、尚、心に残っていた。この証明を数年前、以前よりは正確だろうというレベルまで引き上げたものを作り上げた。それはA4で100頁にも及んだ。そこで、係数項の決定も一つの仕事ではないかと思い、このたび報告することとしたのである。証明を書き終えて感じたことは、やはり、Homologyは、幾ら完璧に証明したと思っても、過誤があるということである。

準備1)

R:可換体　$\Pi:Z_2$　$R\Pi:\Pi$のR上の群環

Wは次の(i)、(ii)で定義される自由$R\Pi$チェイン複体とする。

(i)　$q<0$ならば$W_q=0$で、$q\geqq 0$ならばW_qはただ一つの元w_qで生成される自由$R\Pi$加群。

(ii)　$\partial(w_q)=(T+(-1)^q)w_{q-1}$　ここで、TはΠの生成元

容易に$H_q(W)=0\ (q\neq 0)$　$H_0(W)$　は　Rと同型　が示される。

今、任意の位相空間Xに対して、$S(S^\infty\times X^2)$及び$W\otimes S(X)^{(2)}$　を考える。S^∞は対心写像により、X^2は交換作用によりΠ空間となるから、$S^\infty\times X$はこれらの対角作用によりΠ空間となる。この作用は明らかに固有であるから、$S(S^\infty\times X^2)$は自由$R\Pi$チェイン複体である。また、Wは自由$R\Pi$チェイン複体で、$S(X)^{(2)}$は$R\Pi$チェイン複体であるから、$W\otimes S(X)^{(2)}$も自由$R\Pi$チェイン複体である。

定理1　位相空間の順序対(X, Y)の各々に対し、チェイン写像

$$\nabla\ :S(S^\infty\times X\times Y)\to W\otimes S(X)\otimes S(Y)$$

$$\nabla':W\otimes S(X)\otimes S(Y)\to S(S^\infty\times X\times Y)$$　を定義し次の(i),(ii),(iii)を満たすようにできる。

(i) ∇, ∇'はともに連続写像に関して自然である。すなわち、$f:X\to X'$, $g:Y\to Y'$が連続写像ならば図式

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty\times X\times Y) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "(id\times f\times g)_\#"] \arrow[dr, phantom, "\nabla"] & W\otimes S(X)\otimes S(Y) \arrow[r, "\nabla'"] \arrow[d, "id\otimes f_\#\otimes g_\#"] \arrow[dr, phantom, "\nabla'"] & S(S^\infty\times X\times Y) \arrow[d, "(id\times f\times g)_\#"] \\
S(S^\infty\times X'\times Y') \arrow[r] & W\otimes S(X')\otimes S(Y') \arrow[r] & S(S^\infty\times X'\times Y')
\end{tikzcd}$$

は可換である。

(ii)　図式

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty\times X\times Y) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "T_\#"] \arrow[dr, phantom, "\nabla"] & W\otimes S(X)\otimes S(Y) \arrow[r, "\nabla'"] \arrow[d, "T"] \arrow[dr, phantom, "\nabla'"] & S(S^\infty\times X\times Y) \arrow[d, "T_\#"] \\
S(S^\infty\times Y\times X) \arrow[r] & W\otimes S(Y)\otimes S(X) \arrow[r] & S(S^\infty\times Y\times X)
\end{tikzcd}$$

は可換である。

ここに, $T:S^\infty\times X\times Y\to S^\infty\times Y\times X$は$T(z, x, y)=(T(z), y, x)$で

$T:W\otimes S(X)\otimes S(Y)\to W\otimes S(Y)\otimes S(X)$は$T(w\otimes c\otimes d)=(-1)^{|c||d|}Tw\otimes d\otimes c$

(iii)　$\nabla\circ\nabla'\cong id$、$\nabla'\circ\nabla\cong id$で、これらを与えるチェインホモトピー$\Phi:S(S^\infty\times X\times Y)\to S(S^\infty\times X\times Y)$、$\Phi':W\otimes S(X)\otimes S(Y)\to W\otimes S(X)\otimes S(Y)$として、連続写像に対して自然で、かつ$T_\#$　, Tと可換なものが取れる。

準備2)　$R\Pi$チェイン複体Cと$R\Pi$コチェイン複体C'に対して、$R\Pi$コチェイン複体 $\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C')$が次の(i),(ii)で定義される。

(i)　$(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C'))^n=\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C'^q)$

(ii)　$u\in\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C'^q)$に対し、$u\circ\partial\in\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_{p+1}, C'^q)$, $\delta\circ u\in\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C'^{q+1})$を考え、

$\delta:(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C'))^n\to(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C'))^{n+1}$を$\delta(u)=u\circ\partial+(-1)^p\delta\circ u$によって定義する。

補題1)　(i)チェイン写像ϕ_0, $\phi_1:C\to C'$がチェインホモトープならば,

$\phi_{0*}=\phi_{1*}$　$H_*(W\otimes_{R\Pi}C^{(2)})\to H_*(W\otimes_{R\Pi}C'^{(2)})$　ここにϕ_{i*}は$id\otimes\phi_i^{(2)}$から定まる準同型。

(ii)コチェイン写像ϕ_0, $\phi_1: C\to C'$がコチェインホモトープならば、同様に、

$$\phi_{0*}=\phi_{1*}: H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ C^{(2)}))\to H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ C'^{(2)}))$$

(iii)　(i)の仮定の下に、同様に

$$\phi_0^*=\phi_1^*: H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ \mathrm{Hom}(C'^{(2)},\ R)))\to H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ \mathrm{Hom}(C^{(2)},\ R)))$$

定理2)(i)Cをチェイン複体とし、Cのサイクルの作る部分複体をZで表し、Cのホモロジー群Hを$\partial=0$としてチェイン複体と見なす。$\xi: Z\to C$は包含写像、$\eta: Z\to H$は射影とし、$1\otimes\xi^{(2)}$, $1\otimes\eta^{(2)}$から定まる次の準同型を考える。

$H_*(W\otimes_{R\pi}H^{(2)}) \xleftarrow{\eta_*} H_*(W\otimes_{R\pi}Z^{(2)}) \xrightarrow{\xi_*} H_*(W\otimes_{R\pi}C^{(2)})$この時$\xi_*\circ\eta_*^{-1}$は同型である。

(ii)Cをコチェイン複体とし、Cのコサイクルの作る部分複体をZで表し、Cのコホモロジー群Hを$\delta=0$としてコチェイン複体と見なす。(i)と同様な準同型

$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^{(2)}))\xleftarrow{\eta_*}H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ Z^{(2)}))\xrightarrow{\xi_*}H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ C^{(2)}))$を考えるとき$\xi_*\circ\eta_*^{-1}$は同型である。

準備3)$W^{(2)}=W\otimes W$を$T(w\otimes w')=Tw\otimes Tw'$によりチェイン複体と見なし、RΠチェイン写像$\lambda: W\to W^{(2)}$を次のように定義しよう。

$$\lambda(w_i)=\sum_{j=0}^{[i/2]}(w_{2j}\otimes w_{i-2j}\ +\ w_{2j+1}\otimes Tw_{i-2j-1})$$

今、$u\in\mathrm{Hom}(W_p,\ (H^*(X)^{(2)})^q)$, $v\in\mathrm{Hom}(W_{p'},\ (H^*(X)^{(2)})^{q'})$に対し、$u\cup v\in\mathrm{Hom}(W,\ H^*(X)^{(2)})$は合成

$W\xrightarrow{\lambda} W\otimes W\xrightarrow{h} H^*(X)^{(2)}\otimes H^*(X)^{(2)}\xrightarrow{\nu} H^*(X)^{(2)}$であると定義する。

ここに$h(w_i\otimes w_j)=(-1)^{q|w_j|}u(w_i)\otimes v(w_j)$、$\nu$は$\nu(\alpha\otimes\alpha'\otimes\beta\otimes\beta')=(-1)^{|\alpha'||\beta|}(\alpha\cup\beta)\otimes(\alpha'\cup\beta')$で与えられる準同型。u, $v\in\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)})$ならば$u\cup v\in\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)})$であり、$\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)})$において

　$\delta(u\cup v)=\delta u\cup v+(-1)^{|u|}u\cup\delta v$の成り立つことが容易に見られるから、$u\cup v$により$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)}))$におけるカップ積が定義される。

$v\in\mathrm{Hom}(W_p,\ (H^*(X)^{(2)})^q)$と$c\in W_{p'}\otimes(H_*(X)^{(2)})_{q'}$が与えられた時、$\lambda\otimes\mathrm{id}\quad W\otimes H_*(X)^{(2)}\to W^{(2)}\otimes H_*(X)^{(2)}$に対し$(\lambda\otimes\mathrm{id})(c)=\sum_i r_i(c_i\otimes c_i'\otimes a_i\otimes a_i')$　(c_i, $c_i'\in W$, a_i, $a_i'\in H_*(X)$)とおいて、$v\frown c\in W\otimes H_*(X)^{(2)}$を

$v\frown c=\sum_i(-1)^{p(q'-q)}r_ic_i\otimes\nu(v(c_i')\otimes a_i\otimes a_i')$で定義する。

ここに、$\nu: H^*(X)^{(2)}\otimes\ H_*(X)^{(2)}\to H_*(X)^{(2)}$は

$\nu(\alpha\otimes\alpha'\otimes a\otimes a')=(-1)^{|\alpha|(|a'|-|\alpha'|)}(\alpha\frown a)\otimes(\alpha'\frown a')$で与えられる準同型。

$v\in\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)})$ならば$v\frown Tc=T(v\frown c)$であり、

$\partial(v\frown c)=(-1)^{|c|-|v|}\delta v\frown c+v\frown\partial c$

の成り立つことが容易に見られるから、$v\frown c$により$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)}))$の元と$H_*(W\otimes_{R\pi}H_*(X)^{(2)})$の元のキャップ積が$H_*(W\otimes_{R\pi}H_*(X)^{(2)})$の元として定義される。

　次の定理を Steenrod の同型定理という。

定理3(i)　各位相空間Xに対し同型

$$\kappa: H_*(S^\infty\times_\pi X^2)\ \cong\ H_*(W\otimes_{R\pi}H_*(X)^{(2)})$$

を定め、それらが連続写像に関して自然的であるようにできる。

(ii)各位相空間Xに対し準同型

$$\kappa: H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W,\ H^*(X)^{(2)}))\ \to\ H^*(S^\infty\times_\pi X^2)$$

を定め、それらが連続写像に関して自然的で、各$H_q(X)$が有限生成であるXに対してはκは同型であるようにできる。

(iii)さらに(i), (ii)のκはカップ積及びキャップ積を保つようにできる。