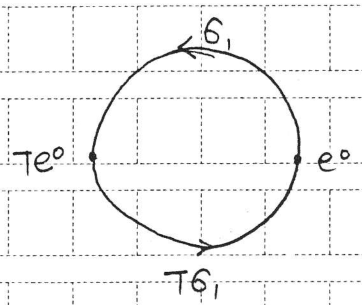
ii) $\partial_q(\omega_q) = (T + (-1)^q)\,\omega_{q-1}$

ここで T は π の生成元

この module は、S^∞ の antipodal map に対応した、regular な CW 分割による chain complex である。

$$S^1 \subset S^2 \subset S^3 \cdots \subset S^\infty$$



簡単な計算により $H_q(W) = 0 \quad q \neq 0$

$H_q(W) \cong \mathbb{Z}$

S^∞ は antipodal map, X^2 は switching map により π space となる。

Def 2 S^∞の antipodal map (対心写像)

$S^k \subset S^\infty \ (k \geq 0)$ に対して、antipodal map F_T を以下に定義する。

$F_T : S^k \to S^k$ を $F_T(x) = -x$ と define.

この写像は cont.

Def 3. switching map, S.

$$\begin{array}{cccc} S & X^2 & \longrightarrow & X^2 \\ & \cup & & \cup \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

Def 4. Π space.

群Πの作用が与えられた位相空間をΠ space という。

Def 5 対角作用 (diagonal action) F_T

X, Y が Π space の時、積空間 $X \times Y$ への Π の作用が $F_T(x, y) = (Tx, Ty)$ $(T \in \Pi, x \in X, y \in Y)$ で定義される。

Def 6. 固有 (proper) な連続写像 $f: X \to Y$

Y の任意の compact subset C に対して $f^{-1}(C)$ が compact の時、f を固有 (proper) であるという。

Def 7. 群Πが位相空間Xへ固有に作用する。

各点 $x \in X$ に対し開近傍 V_x が存在して、単

位元と異なる各 $T \in \Pi$ に対し、

$U_x \cap T(U_x) = \phi$ が成り立つ

Def 8. 自由(free)な作用.

$^\exists x \in X$ に対して $Tx = x$ ならば T は単位元.

Lemma 1. Π の X への作用が固有ならば、射影 $\pi ; X \to X/\Pi$ は被覆射影である.

ここで、被覆射影とは

$\tilde{X}$, X を位相空間とし $\pi ; \tilde{X} \to X$ を連続写像とする。$^\forall x \in X$ に対し、x の開近傍 U と $\tilde{X}$ の互いに交わらない開集合族 $\{\tilde{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して、

i) $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\lambda$

ii) $\pi|\tilde{U}_\lambda : \tilde{U}_\lambda \approx U$ (同相)

chain complex C において、chain map $T : C \to C$ で $T \circ T = id$ を満たす1つが与えられたとき、C は Π chain complex となる。従って、X が Π space ならば、$T : X \to X$ から定まる chain 写像 $T_\# : S(X) \to S(X)$ を合わせ

参考

H3. 11. 26

定理　$f \in \mathrm{Hom}(A, C)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C')$ に対して $f \otimes g \in \mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes C')$ が定義できる

証明)

$\Sigma a_i \otimes b_i \in A \otimes B$ に対して もう一つの表現 $\Sigma a_j' \otimes b_j' \in A \otimes B$, $\Sigma a_i \otimes b_i = \Sigma a_j' \otimes b_j'$ が存在したとする. この時, $\Sigma a_i \otimes b_i - \Sigma a_j' \otimes b_j' = 0$ であるから, $\Sigma a_i \times b_i - \Sigma a_j' \times b_j'$ は $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)$, $(x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)$, $(rx, y) - r(x, y)$, $(x, ry) - r(x, y)$ で生成される部分加群の元である.

$$f \times g((x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y))$$

$$= (f(x_1 + x_2), g(y)) - (f(x_1), g(y)) - (f(x_2), g(y))$$

$$= (f(x_1) + f(x_2), g(y)) - (f(x_1), g(y)) - (f(x_2), g(y))$$

同様にして上記部分加群の元であることがわかる.

故に $\Sigma f(a_i) \otimes g(b_i) = \Sigma f(a_j') \otimes g(b_j')$

よって well-defined な写像である.

定理　位相空間の順序対 (X, Y) のおのおのに対し、チェイン写像

$$\nabla : S(S^\infty \times X \times Y) \to W \otimes S(X) \otimes S(Y)$$
$$\nabla' : W \otimes S(X) \otimes S(Y) \to S(S^\infty \times X \times Y)$$

を定義し、次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすようにできる。

(i)　∇, ∇' はともに連続写像に関して自然的，すなわち $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ が連続写像ならば図式

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty \times X \times Y) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "(id \times f \times g)_\#"] & W \otimes S(X) \otimes S(Y) \arrow[r, "\nabla'"] \arrow[d, "id \otimes f_\# \otimes g_\#"] & S(S^\infty \times X \times Y) \arrow[d, "(id \times f \times g)_\#"] \\
S(S^\infty \times X' \times Y') \arrow[r, "\nabla"] & W \otimes S(X') \otimes S(Y') \arrow[r, "\nabla'"] & S(S^\infty \times X' \times Y')
\end{tikzcd}$$

は可換である。

(ii)　図式

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty \times X \times Y) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "T_\#"] & W \otimes S(X) \otimes S(Y) \arrow[r, "\nabla'"] \arrow[d, "T"] & S(S^\infty \times X \times Y) \arrow[d, "T_\#"] \\
S(S^\infty \times Y \times X) \arrow[r, "\nabla"] & W \otimes S(Y) \otimes S(X) \arrow[r, "\nabla'"] & S(S^\infty \times Y \times X)
\end{tikzcd}$$

は可換である。ここに $T : S^\infty \times X \times Y \to S^\infty \times Y \times X$ は $T(z, x, y) = (Tz, y, x)$
$(z \in S^\infty, x \in X, y \in Y)$ で　$T : W \otimes S(X) \otimes S(Y) \to W \otimes S(Y) \otimes S(X)$ は
$T(w \otimes c \otimes d) = (-1)^{|c||d|}\, Tw \otimes d \otimes c$　$(w \in W,\ c \in S(X),\ d \in S(Y))$ で与えられるチェイン写像。

(iii)　$\nabla' \circ \nabla \simeq id$　$\nabla \circ \nabla' \simeq id$ で，これらを与えるチェインホモトピー $\Phi : S(S^\infty \times X \times Y) \to S(S^\infty \times X \times Y)$,
$\Phi' : W \otimes S(X) \otimes S(Y) \to W \otimes S(X) \otimes S(Y)$ として，連続写像に関して自然的で，かつ (ii) の $T_\#, T$
と可換なものがとれる。

証明

$S^0 = (x, 0, 0, 0 \cdots) \quad x = \pm 1$ ここで $z_0 = (1, 0, 0 \cdots) \quad Tz_0 = (-1, 0, 0 \cdots)$ とし

$S^1 = (x, y, 0, 0, \cdots) \quad x^2 + y^2 = 1$ これを S^∞ の基点とする．

S^n の上半球 e_n^+ を $n+1$ 座標が >0 なるものと定義する．

$\{e_i^+\} \quad (i = 0, 1, 2, 3 \cdots)$ を単に $e^+ \subset S^\infty$ と表記する．

$S^\infty = e^+ \cup e^- \qquad \psi: S^\infty \to \{0, 1\} \qquad \psi(x) = w_0 \ (\text{if } x \in e^+)$

$\psi(x) = Tw_0 \ (\text{if } x \in e^-)$

（第１段）　∇ の存在を示す

$\nabla_0 : S_0(S^\infty \times X \times Y) \to (W \otimes S(X) \otimes S(Y))_0$ を

$\nabla_0(z, x, y) = w_0 \otimes x \otimes y \qquad (z \in e^+)$

$= Tw_0 \otimes x \otimes y \qquad (z \in e^-)$ で定義する．

この時，次の (i), (ii), (iii) が $r=0$ に対して成り立つ．

(i) $\quad \partial_0 \circ \nabla_0 = \nabla_{-1} \circ \partial_0$

(ii) $\quad \nabla_0 \circ (id \times f \times g)_\# = (id \otimes f_\# \otimes g_\#) \circ \nabla_0$

(iii) $\quad T \circ \nabla_0 = \nabla_0 \circ T_\#$

$T \circ \nabla_0(z, x, y) = T(w_0 \otimes x \otimes y) = Tw_0 \otimes y \otimes x \qquad z \in e^+$

$\nabla_0 \circ T_\#(z, x, y) = \nabla_0(Tz, y, x) = Tw_0 \otimes y \otimes x$

よって帰納法により，各 $r < n$ に対し，準同型 $\nabla_r : S_r(S^\infty \times X \times Y) \to (W \otimes S(X) \otimes S(Y))_r$ が定義され，上の条件 (i), (ii), (iii) が各 $r < n$ に対し成り立ったと仮定する．いま，各 $\lambda \in S_n(S^\infty)$ に対し特異単体 $\rho_\lambda : \Delta^n \to S^\infty \times \Delta^n \times \Delta^n$ を $\rho_\lambda(v) = (\lambda(v), v, v) \quad (v \in \Delta^n)$ で定義する

この時，$\nabla_{n-1} \partial_n(\rho_\lambda) = \partial_n \nabla_n(\rho_\lambda)$ となる $\nabla_n(\rho_\lambda) \in (W \otimes S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n))_n$ が存在する

$\because \quad \partial_{n-1} \nabla_{n-1} \partial_n(\rho_\lambda) = \nabla_{n-2} \partial_{n-1} \partial_n(\rho_\lambda) = 0$ で $H_{n-1}(W \otimes S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n)) = 0 \quad (n > 1)$

$n=1$ の時は，

$\rho_\lambda : \Delta^1 \to S^\infty \times \Delta^1 \times \Delta^1$ を $\rho_\lambda(v) = (\lambda(v), v, v)$

$[\nabla_0 \partial_1(\rho_\lambda)] = [\nabla_0(\lambda(\varepsilon^0), \varepsilon^0, \varepsilon^0) - \nabla_0(\lambda(\varepsilon^1), \varepsilon^1, \varepsilon^1)]$

$= [\psi(\lambda(\varepsilon^0)) \otimes \varepsilon^0 \otimes \varepsilon^0 - \psi(\lambda(\varepsilon^1)) \otimes \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1]$

$= [\psi(\lambda(\varepsilon^1)) \otimes \varepsilon^0 \otimes \varepsilon^0 - \psi(\lambda(\varepsilon^1)) \otimes \varepsilon^0 \otimes \varepsilon^0] \qquad (w_0 \simeq Tw_0 \text{ より})$

$H_0(W \otimes S(\Delta^1) \otimes S(\Delta^1))$ の中で $= 0 \qquad (\varepsilon^0 \simeq \varepsilon^1 \text{ より})$

ところで，$S^\infty \times X \times Y$ の各特異単体は (λ, σ, τ) の形に一意的に表わせる．

ここに，λ, σ, τ はそれぞれ S^∞, X, Y の特異単体　従って準同型 $\nabla_n : S_n(S^\infty \times X \times Y) \to (W \otimes S(X) \otimes S(Y)$

を，

$\nabla_n(\lambda, \sigma, \tau) = (id \otimes \sigma_\# \otimes \tau_\#) \nabla_n(\rho_\lambda)$

で定義する．

この時,

(i) $\partial_{\square} \circ \nabla_{\square} = \nabla_{\square-1} \circ \partial_{\square}$.

$\because\quad \partial_{\square}\circ\nabla_{\square}(\lambda, \sigma, \tau) = \partial_{\square}(id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#})\nabla_{\square}(\rho_{\lambda})$

$= (id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#})\partial_{\square}\nabla_{\square}(\rho_{\lambda})$

$= (id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#})\nabla_{\square-1}\partial_{\square}(\rho_{\lambda})$ 　　ρ_{λ}の定義より.

$= \nabla_{\square-1}(id\times\sigma\times\tau)_{\#}\partial_{\square}(\rho_{\lambda})$

$= \nabla_{\square-1}\partial_{\square}(id\times\sigma\times\tau)(\rho_{\lambda})$

$= \nabla_{\square-1}\partial_{\square}(\lambda, \sigma, \tau)$

(ii) $\nabla_{\square}\circ(id\times f\times g)_{\#} = (id\otimes f_{\#}\otimes g_{\#})\circ\nabla_{\square}$.

$\because\quad \nabla_{\square}\circ(id\times f\times g)_{\#}(\lambda, \sigma, \tau)$

$= \nabla_{\square}(\lambda, f\circ\sigma, g\circ\tau)$

$= (id\otimes(f\circ\sigma)_{\#}\otimes(g\circ\tau)_{\#})\nabla_{\square}(\rho_{\lambda})$

$= (id\otimes f_{\#}\otimes g_{\#})(id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#})\nabla_{\square}(\rho_{\lambda})$

$= (id\otimes f_{\#}\otimes g_{\#})\nabla_{\square}(\lambda, \sigma, \tau)$

(iii) $T\circ\nabla_{\square} = \nabla_{\square}\circ T_{\#}$

$\because\quad T\circ\nabla_{\square}(\lambda, \sigma, \tau) = T\circ(id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#})\nabla_{\square}(\rho_{\lambda})$

$\nabla_{\square}\circ T_{\#}(\lambda, \sigma, \tau) = \nabla_{\square}\circ(T\lambda, \tau, \sigma)$

$= \nabla_{\square}\circ(id\times\tau\times\sigma)_{\#}(T\rho_{\lambda})$

$= (id\otimes\tau_{\#}\otimes\sigma_{\#})\nabla_{\square}(T\rho_{\lambda})$

$= (id\otimes\tau_{\#}\otimes\sigma_{\#})T\cdot\nabla_{\square}(\rho_{\lambda})$

ここで　$T\circ(id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#}) = (id\otimes\tau_{\#}\otimes\sigma_{\#})T$.　に注意すれば

$T\circ\nabla_{\square} = \nabla_{\square}\circ T_{\#}$ が成り立つ.

$T\circ(id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#})(a\otimes b\otimes c)$ 　　$a\otimes b\otimes c \in (W\otimes S(X)\otimes S(Y))$

$= T(a\otimes\sigma(b)\otimes\tau(c))$

$= (-1)^{|b||c|}Ta\otimes\tau(c)\otimes\sigma(b)$

$= (id\otimes\tau_{\#}\otimes\sigma_{\#})((-1)^{|b||c|}Ta\otimes c\otimes b)$

$= (id\otimes\tau_{\#}\otimes\sigma_{\#})\circ T(a\otimes b\otimes c)$

より.

$T\circ(id\otimes\sigma_{\#}\otimes\tau_{\#}) = (id\otimes\tau_{\#}\otimes\sigma_{\#})\circ T$.

(i), (ii), (iii) が成り立つ.　これで求める ∇ の存在が示された.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/