第1段の注.

注1) $T: \overline{W}\otimes S(X)\otimes S(Y) \longrightarrow \overline{W}\otimes S(Y)\otimes S(X)$

$\omega\otimes c\otimes d \longmapsto (-1)^{|c||d|}\, T\omega\otimes d\otimes c$ は チェイン写像である.

$$\partial_\square(\omega_p\otimes c_q\otimes d_r) = \partial_p\omega_p\otimes c_q\otimes d_r + (-1)^p\omega_p\otimes\partial c_q\otimes d_r + (-1)^{p+q}\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\square-1}\partial_\square(\omega_p\otimes c_q\otimes d_r) &= \partial_{\square-1}(\partial_p\omega_p\otimes c_q\otimes d_r)\\
&\quad + (-1)^p\,\partial_{\square-1}(\omega_p\otimes\partial c_q\otimes d_r)\\
&\quad + (-1)^{p+q}\,\partial_{\square-1}(\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r)\\
&= \partial_{p-1}\partial_p\omega_p\otimes c_q\otimes d_r + (-1)^{(p-1)}\partial_p\omega_p\otimes\partial_q c_q\otimes d_r + (-1)^{p-1+q}\partial\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r\\
&\quad + (-1)^p\partial\omega_p\otimes\partial c_q\otimes d_r + (-1)^{2p}\omega_p\otimes\partial\partial c_q\otimes d_r + (-1)^{p+p+q-1}\omega_p\otimes\partial c_q\otimes\partial d_r\\
&\quad + (-1)^{p+q}\partial\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r + (-1)^{p+q+p}\omega_p\otimes\partial c_q\otimes\partial d_r + (-1)^{p+q+p+q}\omega_p\otimes c_q\otimes\partial\partial d_r\\
&= (-1)^{p-1}\partial_p\omega_p\otimes\partial_q c_q\otimes d_r + (-1)^{p+q-1}\partial\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r\\
&\quad + (-1)^p\partial\omega_p\otimes\partial c_q\otimes d_r + (-1)^{2p+q-1}\omega_p\otimes\partial c_q\otimes\partial d_r\\
&\quad + (-1)^{p+q}\partial\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r + (-1)^{2p+q}\omega_p\otimes\partial c_q\otimes\partial d_r\\
&= 0.
\end{aligned}$$

故に $\overline{W}\otimes S(X)\otimes S(Y)$ は チェイン複体

$$\begin{aligned}
\partial_\square T(\omega_p\otimes c_q\otimes d_r) &= \partial\left((-1)^{qr}T\omega_p\otimes d_r\otimes c_q\right)\\
&= (-1)^{qr}\partial T\omega_p\otimes d_r\otimes c_q + (-1)^{qr}(-1)^p T\omega_p\otimes\partial d_r\otimes c_q + (-1)^{qr}(-1)^{p+r}T\omega_p\otimes d_r\otimes\partial c_q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\partial(\omega_p\otimes c_q\otimes d_r) &= T\left(\partial\omega_p\otimes c_q\otimes d_r + (-1)^p\omega_p\otimes\partial c_q\otimes d_r + (-1)^{p+q}\omega_p\otimes c_q\otimes\partial d_r\right)\\
&= (-1)^{qr}\partial T\omega_p\otimes d_r\otimes c_q + (-1)^{p+(q-1)r}T\omega_p\otimes d_r\otimes\partial c_q + (-1)^{p+q+qr-q}T\omega_p\otimes\partial d_r\otimes c_q\\
&= (-1)^{qr}\partial T\omega_p\otimes d_r\otimes c_q + (-1)^{p+qr}T\omega_p\otimes\partial d_r\otimes c_q + (-1)^{qr+p+r}T\omega_p\otimes d_r\otimes\partial c_q\\
&= \partial T(\omega_p\otimes c_q\otimes d_r)
\end{aligned}$$

故に. $T\circ\partial = \partial\circ T$.　　Tは チェイン写像

注2) $\nabla_\square(T\cdot\rho_\lambda) \simeq T\cdot\nabla_\square(\rho_\lambda)$ を示す.

$$\begin{array}{c} S(S^\infty\times\Delta^\square\times\Delta^\square)_\square \\ \downarrow \nabla^\square \\ (\overline{W}\otimes S(X)\otimes S(Y))_\square \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\square\nabla_\square(T\cdot\rho_\lambda) - \partial_\square T\cdot\nabla_\square(\rho_\lambda)\\
&= \nabla_{\square-1}\partial_\square(T\cdot\rho_\lambda) - T\nabla_{\square-1}\partial_\square(\rho_\lambda)\\
&= \nabla_{\square-1}T\cdot\partial_\square(\rho_\lambda) - T\nabla_{\square-1}\partial_\square(\rho_\lambda)
\end{aligned}$$

$\nabla_{\square-1}T = T\nabla_{\square-1}$ が $\square-1$ について成り立つ.

$$= T\nabla_{\square-1}\partial_\square(\rho_\lambda) - T\nabla_{\square-1}\partial_\square(\rho_\lambda) = 0.$$

故に $\nabla_\square(T\cdot\rho_\lambda) \simeq T\cdot\nabla_\square(\rho_\lambda)$　　$S_\square(S^\infty)$ の Base $\{\rho_\lambda\}_\square$ に対して Z_2 が作用する.

故に最初から $\nabla_\square(T\cdot\rho_\lambda) = T\cdot\nabla_\square(\rho_\lambda)$ としてよい.　　$\{\rho_\lambda^+\} \cup \{T\rho_\lambda^+\} = \{\rho_\lambda\}$

Def 2　$R\Pi$ chain complex C, $R\Pi$ cochain complex C' に対し,
$R\Pi$ cochain complex $\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C')$ が次で定義される.

i)　$$(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C'))^{n} = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C^q)$$

ii)　$u \in \mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C^q)$ に対し, $u \circ \partial \in \mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_{p+1}, C^q)$ および
$\delta \circ u \in \mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C^{q+1})$ を考慮し.

$$\delta : (\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C'))^{n} \longrightarrow (\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C'))^{n+1}$$ を

$$\delta(u) = u \circ \partial + (-1)^{p} \delta \circ u$$ で定義する。

この δ は バウンダリ作用素である.
実際, $u \in \mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C^q)$ に対し

$$\begin{aligned}
\delta \circ \delta(u) &= \delta(u \circ \partial + (-1)^{p} \delta \circ u) \\
&= \delta(u \circ \partial) + (-1)^{p} \delta(\delta \circ u) \\
&= u \circ \partial \circ \partial + (-1)^{p+1} \delta \circ u \circ \partial + (-1)^{p} \delta \circ u \circ \partial + (-1)^{p+p} \delta \circ \delta \circ u \\
&= 0
\end{aligned}$$

故に $\delta^2 = 0$ である.

また,

$$\begin{aligned}
&\delta \circ ((r_1 + r_2 T) \cdot u)(x) \qquad u \in \mathrm{Hom}_{R\Pi}(C_p, C^q) \quad x \in C_{p+1} \\
&= (\delta \circ u)((r_1 + r_2 T)(x)) \qquad (\text{定義より}) \\
&= u \circ \partial((r_1 + r_2 T)x) + (-1)^{p} \delta \circ u((r_1 + r_2 T)x)
\end{aligned}$$

∂, δ, u は $R\Pi$ 準同型より

$$\begin{aligned}
&= (r_1 + r_2 T) \cdot u \circ \partial(x) + (-1)^{p} (r_1 + r_2 T) \cdot \delta \circ u(x) \\
&= (r_1 + r_2 T) \cdot \delta(u)(x)
\end{aligned}$$

故に δ は $R\Pi$ 準同型である.

以上より $R\Pi$ cochain complex $\mathrm{Hom}_{R\Pi}(C, C')$ が定義された.

補題1.

(i) チェイン写像 $\varphi_0 . \varphi_1 : C \to C'$ がチェインホモトープならば,

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi} C^{(2)}) \to H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi} C'^{(2)})$$

ここに φ_{i*} は $id\otimes\varphi_i^{(2)}$ から定まる準同型.

(ii) コチェイン写像 $\varphi_0, \varphi_1 : C \to C'$ がコチェインホモトープならば, 同様に

$$\varphi_0^* = \varphi_1^* : H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)})) \to H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C'^{(2)}))$$

(iii) (i)の仮定の下に, 同様に

$$\varphi_0^* = \varphi_1^* : H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C'^{(2)}, R))) \to H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C^{(2)}, R))) .$$

証明)

(第1段) chain complex I を次で定義する.

a) I_0 は2元 e_0, e_0' で生成されるR加群.
I_1 は唯一つの元 e_1 で生成されるR加群
$I_q = 0 \quad (q \neq 0, 1)$

b) $\partial(e_1) = e_0' - e_0$

この時, 明らかに $H_0(I) \cong R$ $H_q(I) = 0$ $(q \neq 0)$ である.

C から C' への chain homotopy は $I\otimes C$ から C' への chain map と自然に対応する.
その対応は次の如くである. φ_0 から φ_1 への chain homotopy $\Phi ; C \to C'$ に対し
$\tilde\Phi$ $I\otimes C \to C'$ を $\tilde\Phi(e_0\otimes c) = \varphi_0(c)$, $\tilde\Phi(e_0'\otimes c) = \varphi_1(c)$, $\tilde\Phi(e_1\otimes c) = \Phi(c)$ により定義する

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \tilde\Phi_n(e_1\otimes c) = \partial_n\circ\Phi_n(c) &= \varphi_1(c) - \varphi_0(c) - \Phi_{n-1}\circ\partial_n(c) \\
&= \tilde\Phi_{n-1}(e_0'\otimes c) - \tilde\Phi_{n-1}(e_0\otimes c) - \tilde\Phi_{n-1}(e_1\otimes\partial_n(c)) \\
&= \tilde\Phi_{n-1}\circ\partial_n(e_1\otimes c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_n\circ\tilde\Phi_n(e_0\otimes c) = \partial_n\circ\varphi_0(c) &= \varphi_0\circ\partial_n(c) \\
&= \tilde\Phi_{n-1}(e_0\otimes\partial_n(c)) \\
&= \tilde\Phi_{n-1}\,\partial_n(e_0\otimes c)
\end{aligned}$$

同様に $\partial_n\circ\tilde\Phi_n(e_0'\otimes c) = \tilde\Phi_{n-1}\circ\partial_n(e_0'\otimes c)$

故に $\tilde\Phi$ はチェインマップである.

$\tilde{\Phi}$ が chain map ならば 以下の (i), (ii), (iii) が成り立つ

(i) $\tilde{\Phi}(e_0 \otimes C)$ は chain map である。

(ii) $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes C)$ は chain map である。

(iii) $\tilde{\Phi}(e_1 \otimes C)$ は $\tilde{\Phi}(e_0 \otimes C)$ と $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes C)$ を結ぶ chain homotopy である。

(i) の証明. $\partial_n \circ \tilde{\Phi}_n(e_0 \otimes c) = \tilde{\Phi}_{n-1} \circ \partial_n(e_0 \otimes c) = \tilde{\Phi}_{n-1}(e_0 \otimes \partial_n(c))$

(ii) の証明 $\partial_n \circ \tilde{\Phi}_n(e_0' \otimes c) = \tilde{\Phi}_{n-1} \circ \partial_n(e_0' \otimes c) = \tilde{\Phi}_{n-1}(e_0' \otimes \partial_n(c))$

(iii) の証明. $\partial_{n+1} \circ \tilde{\Phi}_{n+1}(e_1 \otimes c) = \tilde{\Phi}_n \circ \partial_{n+1}(e_1 \otimes c) = \tilde{\Phi}_n(e_0' \otimes c - e_0 \otimes c - e_1 \otimes \partial c)$

故に $\partial_{n+1} \circ \tilde{\Phi}_{n+1}(e_1 \otimes c) + \tilde{\Phi}_n(e_1 \otimes \partial_n(c)) = \tilde{\Phi}_n(e_0' \otimes c) - \tilde{\Phi}_n(e_0 \otimes c)$

よって. C から C' への chain homotopy は $I \otimes C$ から C' への chain map と自然に対応する

さらに, C が Λチェイン複体, C' が Λチェイン複体で φ_0, φ_1, Φ が Λチェインマップ および Λチェインホモトピー ならば $\tilde{\Phi}$ は Λチェインマップである。

実際

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}((r_1 + r_2T)\cdot(e_0 \otimes c)) &= \tilde{\Phi}(r_1(e_0 \otimes c) + r_2T(e_0 \otimes c)) \\
&= \tilde{\Phi}(e_0 \otimes r_1c + e_0 \otimes r_2Tc) \\
&= \varphi_0(r_1c) + \varphi_0(r_2Tc)
\end{aligned}$$

φ_0 は Λチェインマップゆえ

$$\begin{aligned}
&= (r_1 + r_2T)\cdot \varphi_0(c) \\
&= (r_1 + r_2T)\cdot \tilde{\Phi}(e_0 \otimes c)
\end{aligned}$$

同様に, $\tilde{\Phi}((r_1 + r_2T)(e_0' \otimes c)) = (r_1 + r_2T)\cdot \tilde{\Phi}(e_0' \otimes c)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}((r_1 + r_2T)\cdot(e_1 \otimes c)) &= \tilde{\Phi}(r_1\cdot(e_1 \otimes c) + r_2T(e_1 \otimes c)) \\
&= \tilde{\Phi}(e_1 \otimes r_1c + e_1 \otimes r_2Tc) \\
&= \Phi(r_1c + r_2Tc) \\
&= \Phi((r_1 + r_2T)\cdot c) \\
&= (r_1 + r_2T)\cdot \Phi(c) \\
&= (r_1 + r_2T)\cdot \tilde{\Phi}(e_1 \otimes c)
\end{aligned}$$

故に $\tilde{\Phi}$ は Λチェインマップである。

また、$\tilde{\Phi}$がΛ[T]チェインマップならば、$\tilde{\Phi}(e_0 \otimes c)$ および $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes c)$ はΛ[T]チェインマップであり、
$\tilde{\Phi}(e_1 \otimes c)$ は $\tilde{\Phi}(e_0 \otimes c)$ と $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes c)$ を結ぶΛ[T]チェインホモトピーである。

実際、

(i) $\tilde{\Phi}(e_0 \otimes (r_1 + r_2 T) \cdot c) = \tilde{\Phi}((r_1 + r_2 T) \cdot (e_0 \otimes c))$
$= (r_1 + r_2 T) \cdot \tilde{\Phi}(e_0 \otimes c)$.

(ii) 同様に $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes (r_1 + r_2 T) \cdot c) = (r_1 + r_2 T) \cdot \tilde{\Phi}(e_0' \otimes c)$

(iii) 同様に $\tilde{\Phi}(e_1 \otimes (r_1 + r_2 T) \cdot c) = (r_1 + r_2 T) \cdot \tilde{\Phi}(e_1 \otimes c)$

故に $\tilde{\Phi}(e_0 \otimes c)$, $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes c)$ は $C \to C'$ の chain map とみるときΛ[T]チェインマップであり、
$\tilde{\Phi}(e_1 \otimes c)$ は $\tilde{\Phi}(e_0 \otimes c)$ と $\tilde{\Phi}(e_0' \otimes c)$ を結ぶΛ[T]チェインホモトピーである。

以上より、Iを trivial な作用によりΛ[T]が作用している複体とみなす時、Λ[T]チェイン複体 C からΛ[T]チェイン複体 C' へのΛ[T]チェインマップ φ_0, φ_1 および φ_0 と φ_1 を結ぶΛ[T]チェインホモトピー $\tilde{\Phi}$ と、$I \otimes C$ から C' へのΛ[T]チェインマップは自然に対応する。

（第2段）

Iをtrivialな作用により、$I^{(2)}=I\otimes I$を交換チェインマップによりΠが作用しているとみなす時、

$R\Pi$チェインマップ　$\Theta : I\otimes W \to I^{(2)}\otimes W$で

$$\Theta(e_0\otimes w) = e_0\otimes e_0\otimes w$$
$$\Theta(e_0'\otimes w) = e_0'\otimes e_0'\otimes w$$

を満たすものが存在する

$n=0$の時、

$$\Theta_0(e_0\otimes w_0) = e_0\otimes e_0\otimes w_0$$
$$\Theta_0(e_0'\otimes w_0) = e_0'\otimes e_0'\otimes w_0$$

と定義するならば、

$$\partial\circ\Theta(e_0\otimes w) = \partial(e_0\otimes e_0\otimes w) = e_0\otimes e_0\otimes\partial w = \Theta(e_0\otimes\partial w) = \Theta\circ\partial(e_0\otimes w)$$
$$\partial\circ\Theta(e_0'\otimes w) = \partial(e_0'\otimes e_0'\otimes w) = e_0'\otimes e_0'\otimes\partial w = \Theta(e_0'\otimes\partial w) = \Theta\circ\partial(e_0'\otimes w)$$
$$\Theta\circ T(e_0\otimes w) = \Theta(e_0\otimes Tw) = e_0\otimes e_0\otimes Tw = T(e_0\otimes e_0\otimes w) = T\circ\Theta(e_0\otimes w)$$
$$\Theta\circ T(e_0'\otimes w) = \Theta(e_0'\otimes Tw) = e_0'\otimes e_0'\otimes Tw = T(e_0'\otimes e_0'\otimes w) = T\circ\Theta(e_0'\otimes w)$$

が任意のwについて成り立つから、

$r=0$に対して、

(i) $\partial_r\circ\Theta_r = \Theta_{r-1}\circ\partial_r$

(ii) $\Theta_r\circ T = T\circ\Theta_r$

(iii) $\Theta_r(e_0\otimes w_r) = e_0\otimes e_0\otimes w_r$, $\Theta_r(e_0'\otimes w_r) = e_0'\otimes e_0'\otimes w_r$

が成り立つ。

よって帰納法により、各$r<n$に対し準同型$\Theta_r : I\otimes W \to I^{(2)}\otimes W$が定義され上の条件(i), (ii), (iii)が成り立ったと仮定する。

この時、

$\Theta_{n-1}\circ\partial_n(e_1\otimes w_{n-1}) = \partial_n\circ\Theta_n(e_1\otimes w_{n-1})$ を満たす $\Theta_n(e_1\otimes w_{n-1})\in(I^{(2)}\otimes W)_n$ が存在する。

なぜなら、$n=1$の時は、

$$\Theta_0\circ\partial_1(e_1\otimes w_0) = \Theta_0(e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes w_0)$$
$$= e_0'\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0\otimes w_0$$

であるから、

$\Theta_1(e_1\otimes w_0) = e_1\otimes e_0'\otimes w_0 + e_0\otimes e_1\otimes w_0$　と定義すれば

$$\partial_1\circ\Theta_1(e_1\otimes w_0) = \partial_1(e_1\otimes e_0'\otimes w_0 + e_0\otimes e_1\otimes w_0)$$
$$= e_0'\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0'\otimes w_0 + e_0\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0\otimes w_0$$
$$= e_0'\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0\otimes w_0$$
$$= \Theta_0\circ\partial_1(e_1\otimes w_0)$$

故に $r=0$ に対して,

(i) $\partial_r \circ \theta_r = \theta_{r-1} \circ \partial_r$

(ii) θ_r は $R[T]$ 準同型である.

(iii) $\theta_r(e\otimes w) = e\otimes e\otimes w \qquad (e \in I_0)$

が成立つ.

よって帰納法により 各 $r<n$ に対し $R[T]$ 準同型 $\theta_r : I\otimes W \to I^{(2)}\otimes W$ が定義され 上の条件 (i), (ii), (iii) が成り立ったと仮定する.

この時,

$\theta_{n-1}\circ\partial_n(e_n\otimes w_{n-1}) = \partial_n\circ\theta_n(e_n\otimes w_{n-1})$ を満たす $\theta_n(e_n\otimes w_{n-1}) \in (I^{(2)}\otimes W)_n$

が存在する.

なぜなら, $n=1$ の時は

$$\begin{aligned}\theta_0\circ\partial_1(e_1\otimes w_0) &= \theta_0(e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes w_0)\\ &= e_0'\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0\otimes w_0\end{aligned}$$

であるから,

$\theta_1(e_1\otimes w_0) = e_1\otimes e_0'\otimes w_0 + e_0\otimes e_1\otimes w_0$ と定義すれば,

$$\begin{aligned}\partial_1\circ\theta_1(e_1\otimes w_0) &= \partial_1(e_1\otimes e_0'\otimes w_0 + e_0\otimes e_1\otimes w_0)\\ &= e_0'\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0'\otimes w_0 + e_0\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0\otimes w_0\\ &= e_0'\otimes e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes e_0\otimes w_0\\ &= \theta_0(e_0'\otimes w_0 - e_0\otimes w_0)\\ &= \theta_0\circ\partial_1(e_1\otimes w_0)\end{aligned}$$

よって.

$$\theta_1((r_1+r_2T)\cdot(e_1\otimes w_0)) = (r_1+r_2T)\cdot\theta_1(e_1\otimes w_0)$$

で定義すれば, 上記 (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) の証明

$$\begin{aligned}\partial_1\circ\theta_1((r_1+r_2T)\cdot(e_1\otimes w_0)) &= \partial_1\circ(r_1+r_2T)\cdot\theta_1(e_1\otimes w_0)\\ &= (r_1+r_2T)\cdot\partial_1\circ\theta_1(e_1\otimes w_0)\\ &= (r_1+r_2T)\cdot\theta_0\circ\partial(e_1\otimes w_0)\\ &= \theta_0\circ(r_1+r_2T)\cdot\partial(e_1\otimes w_0)\\ &= \theta_0\circ\partial((r_1+r_2T)\cdot(e_1\otimes w_0))\end{aligned}$$

故に $\partial\circ\theta_1 = \theta_0\circ\partial$ が成り立つ

注).

$J\otimes W$ のバウンダリ準同型 ∂ は A準同型である.

実際,

$$\partial((r_1+r_2T)\cdot(e\otimes w)) = \partial(e\otimes r_1w + e\otimes r_2Tw)$$
$$= \partial e\otimes r_1w + (-1)^{|e|}e\otimes\partial(r_1w) + \partial e\otimes r_2Tw + (-1)^{|e|}e\otimes\partial(r_2Tw)$$
$$= r_1\cdot(\partial e\otimes w + (-1)^{|e|}e\otimes\partial w) + r_2T\cdot(\partial e\otimes w + (-1)^{|e|}e\otimes\partial w)$$
$$= r_1\cdot\partial(e\otimes w) + r_2T\cdot\partial(e\otimes w)$$
$$= (r_1+r_2T)\cdot\partial(e\otimes w)$$ より

また, $J^{(2)}\otimes W$ のバウンダリ準同型 ∂ は A準同型である.

実際,

$$\partial((r_1+r_2T)\cdot(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w)) = \partial(r_1\cdot(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w) + r_2T(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w))$$
$$= \partial(r_1\cdot(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w) + (-1)^{|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|}r_2\cdot(\tilde{e}_2\otimes\tilde{e}_1\otimes Tw))$$
$$= r_1\cdot\partial(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w) + (-1)^{|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|}r_2\cdot\{\partial\tilde{e}_2\otimes\tilde{e}_1\otimes Tw +$$
$$(-1)^{|\tilde{e}_2|}\tilde{e}_2\otimes\partial\tilde{e}_1\otimes Tw + (-1)^{|\tilde{e}_2|+|\tilde{e}_1|}\tilde{e}_2\otimes\tilde{e}_1\otimes\partial Tw\}$$
$$= r_1\cdot\partial(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w) + r_2\cdot T\{(-1)^{|\tilde{e}_1|}\tilde{e}_1\otimes\partial\tilde{e}_2\otimes w$$
$$+ \partial\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w + (-1)^{|\tilde{e}_1|+|\tilde{e}_2|}\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes\partial w\}$$
$$= r_1\cdot\partial(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w) + r_2\cdot T\,\partial(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w)$$
$$= (r_1+r_2T)\cdot\partial(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w)$$

より.

(ii) は.

$\Theta_1 \circ T(e_1 \otimes w_0) = \Theta_1(e_1 \otimes Tw_0) = T \circ \Theta_1(e_1 \otimes w_0)$ と.

$\Theta_1 \circ T(e_1 \otimes Tw_0) = \Theta_1 \circ T \circ T(e_1 \otimes w_0) = \Theta_1(e_1 \otimes w_0)$

$T \circ \Theta_1(e_1 \otimes Tw_0) = T \circ T \circ \Theta_1(e_1 \otimes w_0) = \Theta_1(e_1 \otimes w_0)$:

故に $\Theta_1 \circ T(e_1 \otimes Tw_0) = T \circ \Theta_1(e_1 \otimes Tw_0)$ より

$\Theta_1 \circ T = T \circ \Theta_1$ が 成り立つ.

(iii) は 構成の方法より.

$n > 1$ の時は $H_{n-1}(I^{(2)} \otimes W) = 0$ と.

$$\partial_{n-1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial_n(e_1 \otimes w_{n-1})$$
$$= \Theta_{n-1} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n(e_1 \otimes w_{n-1})$$
$$= 0$$

より

$\Theta_{n-1} \circ \partial_n(e_1 \otimes w_{n-1}) = \partial_n \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1})$ なる.

$\Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \in (I^{(2)} \otimes W)_n$ が存在する.

ここで,

$$\Theta_n(e_1 \otimes Tw_{n-1}) = T \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1})$$

と定義する.

この時, (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) は.

$$\Theta_{n-1} \circ \partial_n(e_1 \otimes w_{n-1}) = \partial_n \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \text{ と.}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{n-1} \circ \partial_n(e_1 \otimes Tw_{n-1}) &= \Theta_{n-1} \circ \partial_n \circ T(e_1 \otimes w_{n-1}) \\
&= \Theta_{n-1} \circ T \circ \partial_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \\
&= T \circ \Theta_{n-1} \circ \partial_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \\
&= T \circ \partial_n \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \\
&= \partial_n \circ T \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \\
&= \partial_n \circ \Theta_n(e_1 \otimes Tw_{n-1})
\end{aligned}$$

より.

(ii) は. $\Theta_n \circ T(e_1 \otimes w_{n-1}) = \Theta_n(e_1 \otimes Tw_{n-1}) = T \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1})$ と

$$\begin{aligned}
\Theta_n \circ T(e_1 \otimes Tw_{n-1}) = \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1}) &= T \circ T \circ \Theta_n(e_1 \otimes w_{n-1}) \\
&= T \circ \Theta_n(e_1 \otimes Tw_{n-1})
\end{aligned}$$

より.

(iii) は. 構成の方法より

（第3段）　仮定の φ_0 と φ_1 の間のチェインホモトピーを Φ として次の合成を考える.

$$I\otimes \overline{W}\otimes C^{(2)} \xrightarrow{\theta\otimes id^{(2)}} I^{(2)}\otimes \overline{W}\otimes C^{(2)} \underset{\cong}{\xrightarrow{S}} \overline{W}\otimes (I\otimes C)^{(2)} \xrightarrow{id\otimes \Phi^{(2)}} \overline{W}\otimes C^{(2)}$$

ここで、Sは switching chain map.

$$\begin{tikzcd}
S:\ I^{(2)}\otimes \overline{W}\otimes C^{(2)} \arrow[r] & \overline{W}\otimes (I\otimes C)^{(2)} \\
\tilde{e}_1\otimes \tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "T"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (-1)^{|w|(|\tilde{e}_1|+|\tilde{e}_2|)+|\tilde{e}_2||c_1|}\, w\otimes \tilde{e}_1\otimes c_1\otimes \tilde{e}_2\otimes c_2 \arrow[d, dashed, "T"] \\
(-1)^{|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|+|c_1||c_2|}\, \tilde{e}_2\otimes \tilde{e}_1\otimes Tw\otimes c_2\otimes c_1 \arrow[r, mapsto] & (-1)^{|w|(|\tilde{e}_1|+|\tilde{e}_2|)+|\tilde{e}_1||c_2|+|c_1||c_2|+|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|}\, Tw\otimes \tilde{e}_2\otimes c_2\otimes \tilde{e}_1\otimes c_1
\end{tikzcd}$$

$I^{(2)}\otimes \overline{W}\otimes C^{(2)}$ は. $T\in\Pi$ が以下のように作用する $R\Pi$ チェイン複体とみなされる.

$$T(\tilde{e}_1\otimes \tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) = (-1)^{|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|+|c_1||c_2|}\, \tilde{e}_2\otimes \tilde{e}_1\otimes Tw\otimes c_2\otimes c_1$$

実際 $T^2 = id$ である.

$$\begin{aligned}
T\circ T(\tilde{e}_1\otimes \tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) &= T\left((-1)^{|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|+|c_1||c_2|}\, \tilde{e}_2\otimes \tilde{e}_1\otimes Tw\otimes c_2\otimes c_1\right) \\
&= (-1)^{|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|+|c_1||c_2|+|\tilde{e}_1||\tilde{e}_2|+|c_1||c_2|}\, \tilde{e}_1\otimes \tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2 \\
&= \tilde{e}_1\otimes \tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2
\end{aligned}$$

故に $T^2 = id$ である.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/