一般の交換鎖写像（Switching chain map）の場合において証明する.

$$(X_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i)}{X_i} \otimes \underset{i+1)}{X_{i+1}} \cdots \otimes X_p) \xrightarrow{S_{i,i+1}} (X_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i)}{X_{i+1}} \otimes \underset{i+1)}{X_i} \cdots \otimes X_p)$$

$$S_{i,i+1} : x_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i)}{x_i} \otimes \underset{i+1)}{x_{i+1}} \cdots \otimes x_p \longmapsto (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} x_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i)}{x_{i+1}} \otimes \underset{i+1)}{x_i} \cdots \otimes x_p$$

これは交換写像である. $\partial \circ S_{i,i+1} = S_{i,i+1} \circ \partial$

$$\partial \circ S_{i,i+1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \cdots \otimes x_p)$$

$$= \partial ( (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} x_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i)}{x_{i+1}} \otimes \underset{i+1)}{x_i} \cdots \otimes x_p) = \partial ( (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \otimes x_{\sigma(i,i+1)})$$ と表記する.

$\sigma(i,j)$ は $i$番目と $i+1$番目の置換

$$= \sum_l (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{\mathrm{length}\,\sigma(i,i+1)<l} |x_{\sigma(i,i+1)}|} x_1 \otimes \cdots \otimes \partial x_l \cdots \otimes x_{i+1} \otimes x_i \cdots \otimes x_p$$

$$S_{i,i+1} \circ \partial (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \cdots \otimes x_p)$$

$$= S_{i,i+1} \left( \sum_l (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} x_1 \otimes \cdots \otimes \partial x_l \cdots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \cdots \otimes x_p \right)$$

$$= \sum_l (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \times (-1)^{(|x_i| - \delta_{i,l})(|x_{i+1}| - \delta_{i+1,l})} x_1 \otimes \cdots \otimes \partial x_l \cdots \otimes x_{i+1} \otimes x_i \cdots \otimes x_p$$

$l < i$ の時

$$(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{\mathrm{length}\,\sigma(i,i+1)<l} |x_{\sigma(i,i+1)}|} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|}$$

$$(-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \times (-1)^{(|x_i| - \delta_{i,l})(|x_{i+1}| - \delta_{i+1,l})} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \quad ) =$$

$l = i$ の時

$$(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{\mathrm{length}\,\sigma(i,i+1)<l} |x_{\sigma(i,i+1)}|} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<i} |x_k|}$$

こちらは $l = i+1$ $$(-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \times (-1)^{(|x_i| - \delta_{i,l})(|x_{i+1}| - \delta_{i+1,l})} = (-1)^{\sum_{k<i+1} |x_k|} \times (-1)^{|x_i|(|x_{i+1}|-1)} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<i} |x_k|}$$

$l = i+1$ の時

$$(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{\mathrm{length}\,\sigma(i,i+1)<i+1} |x_{\sigma(i,i+1)}|} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{(\sum_{k<i+2} |x_k|) + |x_i|} \quad ) =$$

こちらは $l = i$ $$(-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \times (-1)^{(|x_i| - \delta_{i,l})(|x_{i+1}| - \delta_{i+1,l})} = (-1)^{(|x_i|-1)|x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<i} |x_k|} \times (-1)$$

$l > i+1$ の時

$$(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{\text{length } \sigma(i,i+1) < l} |x_{\sigma(i,i+1)}|} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|}$$

$$(-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \times (-1)^{(|x_i| - \delta_{i,l})(|x_{i+1}| - \delta_{i+1,l})} = (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \times (-1)^{\sum_{k<l} |x_k|} \quad ) =$$

よって $\partial \circ S_{i,i+1} = S_{i,i+1} \circ \partial$ が成り立つ.

合成 $S_{i,i+1} \circ S_{j,j+1}$ に対しても

$$\partial \circ S_{i,i+1} \circ S_{j,j+1} = S_{i,i+1} \circ \partial \circ S_{j,j+1}$$

$$= S_{i,i+1} \circ S_{j,j+1} \circ \partial \quad \text{より},$$

故に合成も chain map である.

また，第3段の Switching Chain Map. Sは Πチェインマップである．

$$
\begin{aligned}
& S\left((r_1+r_2T)\cdot(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2)\right) \\
&= S\left(r_1\cdot(\tilde{e}_1\otimes\tilde{e}_2\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) + r_2\cdot\left((-1)^{|\tilde{e}_1|\cdot|\tilde{e}_2|+|c_1|\cdot|c_2|}\tilde{e}_2\otimes\tilde{e}_1\otimes Tw\otimes c_2\otimes c_1\right)\right) \\
&= (-1)^{|w||\tilde{e}_2|+|w||\tilde{e}_1|+|c_1||\tilde{e}_2|} r_1\cdot w\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2 \\
&\quad + (-1)^{|\tilde{e}_1|\cdot|\tilde{e}_2|+|c_1|\cdot|c_2|}\times(-1)^{|w||\tilde{e}_1|+|w||\tilde{e}_2|+|c_2||\tilde{e}_1|} r_2\cdot Tw\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1 \\
&= r_1\cdot S(w\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2) \\
&\quad + r_2\cdot T(w\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2)\times(-1)^{|\tilde{e}_2|\cdot|c_1|+|w|\cdot|\tilde{e}_1|+|w|\cdot|\tilde{e}_2|} \\
&= r_1\cdot S(w\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2) \\
&\quad +(r_2\cdot T)\cdot S(w\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2) \\
&= (r_1+r_2T)\cdot S(w\otimes\tilde{e}_1\otimes c_1\otimes\tilde{e}_2\otimes c_2)
\end{aligned}
$$

以上より Sは Πチェインマップである．

$\psi = (id\otimes\Phi^{(2)})\circ S\circ(\theta\otimes id^{(2)})$ と定義する．

$\psi$は Πチェインマップである

実際．

$$
\begin{aligned}
& \theta\otimes id^{(2)}\left((r_1+r_2T)\cdot(\tilde{e}_1\otimes w\otimes c_1\otimes c_2)\right) \\
&= \theta\otimes id^{(2)}\left(r_1\cdot\tilde{e}_1\otimes w\otimes c_1\otimes c_2 + (-1)^{|c_1|\cdot|c_2|} r_2\cdot\tilde{e}_1\otimes Tw\otimes c_2\otimes c_1\right) \\
&= \theta(r_1\cdot\tilde{e}_1\otimes w)\otimes c_1\otimes c_2 + (-1)^{|c_1|\cdot|c_2|}\theta(r_2\cdot\tilde{e}_1\otimes Tw)\otimes c_2\otimes c_1 \\
&= r_1\cdot\theta(\tilde{e}_1\otimes w)\otimes c_1\otimes c_2 + (-1)^{|c_1|\cdot|c_2|}\theta(r_2T\cdot(\tilde{e}_1\otimes w))\otimes c_2\otimes c_1 \\
&= r_1\cdot\theta(\tilde{e}_1\otimes w)\otimes c_1\otimes c_2 + (-1)^{|c_1|\cdot|c_2|}(r_2T\cdot\theta(\tilde{e}_1\otimes w))\otimes c_2\otimes c_1 \\
&= r_1\cdot\theta(\tilde{e}_1\otimes w)\otimes c_1\otimes c_2 + r_2T\cdot(\theta(\tilde{e}_1\otimes w)\otimes c_1\otimes c_2) \\
&= (r_1+r_2T)\cdot\theta(\tilde{e}_1\otimes w)\otimes c_1\otimes c_2 \\
&= (r_1+r_2T)\cdot\theta\otimes id^{(2)}(\tilde{e}_1\otimes w\otimes c_1\otimes c_2)
\end{aligned}
$$

故に $\theta\otimes id^{(2)}$は Πチェインマップである．

$id\otimes$全$^{(2)}$ も $\Gamma$I チェインマップである.

$$id\otimes 全^{(2)} : W\otimes(I\otimes C)^{(2)} \longrightarrow W\otimes C^{(2)}$$

$$\begin{aligned} & id\otimes 全^{(2)}\big((r_1+r_2T)(w\otimes a_1\otimes c_1\otimes a_2\otimes c_2)\big) \\ &= id\otimes 全^{(2)}\big(r_1(w\otimes a_1\otimes c_1\otimes a_2\otimes c_2) + r_2\times(-1)^{(|a_1|+|c_1|)(|a_2|+|c_2|)}Tw\otimes a_2\otimes c_2\otimes a_1\otimes c_1\big) \\ &= r_1\cdot w\otimes 全(a_1\otimes c_1)\otimes 全(a_2\otimes c_2) + r_2\cdot(-1)^{(|a_1|+|c_1|)(|a_2|+|c_2|)}Tw\otimes 全(a_2\otimes c_2)\otimes 全(a_1\otimes c_1) \\ &= r_1\cdot w\otimes 全(a_1\otimes c_1)\otimes 全(a_2\otimes c_2) + r_2\cdot T\big(w\otimes 全(a_1\otimes c_1)\otimes 全(a_2\otimes c_2)\big) \\ &= (r_1+r_2T)\cdot w\otimes 全(a_1\otimes c_1)\otimes 全(a_2\otimes c_2) \end{aligned}$$

故に $id\otimes$全$^{(2)}$ は $\Gamma$I チェインマップである.

以上のことから $\Psi = (id\otimes 全^{(2)})\circ S\circ(\Theta\otimes id^{(2)})$ は $\Gamma$I チェインマップである.
第1段のことと合わせて考えると $\Psi(e_0\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) : I\otimes W\otimes C^{(2)} \longrightarrow W\otimes C^{(2)}$
と $\Psi(e_0'\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) : I\otimes W\otimes C^{(2)} \longrightarrow W\otimes C^{(2)}$ は チェインホモトープであり.
$\Psi(e_1\otimes w\otimes c_1\otimes c_2)$ は チェインホモトピー である.

具体的には、
$$\begin{aligned} \Psi(e_0\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) &= (id\otimes 全^{(2)})\circ S\circ(\Theta\otimes id^{(2)})(e_0\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) \\ &= (id\otimes 全^{(2)})\circ S(e_0\otimes e_0\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) \\ &= id\otimes 全^{(2)}(w\otimes e_0\otimes c_1\otimes e_0\otimes c_2) \\ &= w\otimes 全(e_0\otimes c_1)\otimes 全(e_0\otimes c_2) \\ &= w\otimes \varphi_0(c_1)\otimes\varphi_0(c_2) = id\otimes\varphi_0^{(2)}(w\otimes c_1\otimes c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(e_0\otimes Tw\otimes c_1\otimes c_2) &= (id\otimes 全^{(2)})\circ S\circ(\Theta\otimes id^{(2)})(e_0\otimes Tw\otimes c_1\otimes c_2) \\ &= (id\otimes 全^{(2)})\circ S(e_0\otimes e_0\otimes Tw\otimes c_1\otimes c_2) \\ &= (id\otimes 全^{(2)})(Tw\otimes e_0\otimes c_1\otimes e_0\otimes c_2) \\ &= Tw\otimes 全(e_0\otimes c_1)\otimes 全(e_0\otimes c_2) \\ &= Tw\otimes\varphi_0(c_1)\otimes\varphi_0(c_2) \\ &= id\otimes\varphi_0^{(2)}(Tw\otimes c_1\otimes c_2) \end{aligned}$$

同様に $\Psi(e_0'\otimes w\otimes c_1\otimes c_2) = id\otimes\varphi_1^{(2)}(w\otimes c_1\otimes c_2)$ である.
また, 第1段のことと考え合わせると $id\otimes\varphi_0^{(2)}$ と $id\otimes\varphi_1^{(2)}$ および $\Psi(e_1\otimes w\otimes c_1\otimes c_2)$ は $\Gamma$I チェインマップ,
$\Gamma$I チェインホモトピー である.

さらに次のことが成り立つ. $id\underset{R\Pi}{\otimes}\varphi_0^{(2)} : W\underset{R\Pi}{\otimes}C^{(2)} \longrightarrow W\underset{R\Pi}{\otimes}C'^{(2)}$, $id\underset{R\Pi}{\otimes}\varphi^{(2)} : W\underset{R\Pi}{\otimes}C^{(2)} \longrightarrow W\underset{R\Pi}{\otimes}C'^{(2)}$ が定義でき
$id\underset{R\Pi}{\otimes}\varphi_0^{(2)}$ と $id\underset{R\Pi}{\otimes}\varphi^{(2)}$ はチェインホモトープである.

$\psi|_{e_0} = id\otimes\varphi_0^{(2)}$

$$\begin{tikzcd}
W\otimes C^{(2)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"] & W\otimes C'^{(2)} \arrow[r, hook, "i"] & W\underset{R\Pi}{\otimes} C'^{(2)} \\
W\otimes_{R\Pi} C^{(2)} \arrow[urr, dashed, "id\underset{R\Pi}{\otimes}\varphi_0^{(2)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

実際, $i\circ\psi$ は $W\otimes C^{(2)}$ から $W\underset{R\Pi}{\otimes}C'^{(2)}$ への $R\Pi$ の意味で双線形写像である

(i),

$$\begin{aligned}
i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}((\omega_1+\omega_2)\otimes c_1\otimes c_2) &= i((\omega_1+\omega_2)\otimes\varphi_0(c_1)\otimes\varphi_0(c_2)) \\
&= (\omega_1+\omega_2)\otimes_{R\Pi}\varphi_0(c_1)\otimes\varphi_0(c_2) \\
&= \omega_1\otimes_{R\Pi}\varphi_0(c_1)\otimes\varphi_0(c_2) + \omega_2\otimes_{R\Pi}\varphi_0(c_1)\otimes\varphi_0(c_2) \\
&= i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega_1\otimes c_1\otimes c_2) + i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega_2\otimes c_1\otimes c_2)
\end{aligned}$$

(ii),

$$\begin{aligned}
i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega\otimes(c_1\otimes c_2+c_1'\otimes c_2')) &= i(\omega\otimes\varphi_0(c_1)\otimes\varphi(c_2)+\omega\otimes\varphi_0(c_1')\otimes\varphi(c_2')) \\
&= \omega\otimes_{R\Pi}\varphi_0(c_1)\otimes\varphi(c_2) + \omega\otimes_{R\Pi}\varphi_0(c_1')\otimes\varphi(c_2') \\
&= i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega\otimes c_1\otimes c_2) + i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega\otimes c_1'\otimes c_2')
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
& i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(((r_1+r_2T)\cdot\omega)\otimes c_1\otimes c_2) \\
&= i((r_1+r_2T)\cdot\omega\otimes\varphi(c_1)\otimes\varphi(c_2)) \\
&= (r_1+r_2T)\cdot\omega\otimes_{R\Pi}\varphi(c_1)\otimes\varphi(c_2) \\
&= (r_1+r_2T)(\omega\otimes_{R\Pi}\varphi(c_1)\otimes\varphi(c_2)) \quad \text{---- } (1) \\
&= \omega\otimes_{R\Pi}(r_1+r_2T)(\varphi(c_1)\otimes\varphi(c_2)) \\
&= \omega\otimes_{R\Pi}\{r_1(\varphi(c_1)\otimes\varphi(c_2)) + r_2\cdot(-1)^{|c_1||c_2|}\varphi(c_2)\otimes\varphi(c_1)\} \\
&= i\{(\omega\otimes r_1\cdot\varphi(c_1)\otimes\varphi(c_2)) + \omega\otimes r_2\cdot\varphi((-1)^{|c_1||c_2|}c_2)\otimes\varphi(c_1)\} \\
&= i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega\otimes r_1c_1\otimes c_2 + \omega\otimes r_2T(c_1\otimes c_2)) \\
&= i\circ id\otimes\varphi_0^{(2)}(\omega\otimes(r_1+r_2T)(c_1\otimes c_2)) \quad \text{---- } (2)
\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) のことから $i \circ id \otimes \varphi_0^{(2)}$ は双線形写像であり 故に $id \otimes_{R\pi} \varphi_0^{(2)} : \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} \longrightarrow \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)}$ が自然に定義できる.

同様に $i \circ id \otimes \varphi_1^{(2)}$ は双線形写像であり 故に $id \otimes_{R\pi} \varphi_1^{(2)} : \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} \longrightarrow \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)}$ が自然に定義できる.

次に $id \otimes_{R\pi} \varphi_0^{(2)}$ と $id \otimes_{R\pi} \varphi_1^{(2)}$ を結ぶ鎖ホモトピーが存在することを示す.

$\Psi|_{e_1}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} \otimes C^{(2)} \arrow[r, "\Psi|_{e_1}"] \arrow[d, "i"] & \overline{W} \otimes C^{(2)} \arrow[r, hook, "i"] & \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} \\
\overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

ここで $\Psi|_{e_1} \quad \overline{W} \otimes C^{(2)} \longrightarrow \overline{W} \otimes C^{(2)}$ は.

$$\begin{aligned}
i \circ \Psi|_{e_1} (T\omega \otimes a_1 \otimes a_2) &= i \circ \Psi|_{e_1} (T(\omega \otimes T(a_1 \otimes a_2))) \\
&= i \circ T \cdot \Psi|_{e_1} (\omega \otimes T(a_1 \otimes a_2)) \\
&= i \circ \Psi|_{e_1} (\omega \otimes T(a_1 \otimes a_2))
\end{aligned}$$

$\overline{W} \otimes C^{(2)} \cong C^{(2)} \oplus T \cdot C^{(2)}$ 直和

$\overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} \cong C^{(2)}$

$$\begin{aligned}
u : C^{(2)} &\longrightarrow \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} \quad \text{は同型対応である.} \\
\rotatebox{90}{$\in$} \quad & \qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$} \\
a_1 \otimes a_2 &\longmapsto \omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v : \overline{W} \otimes_{R\pi} C^{(2)} &\longrightarrow C^{(2)} \\
\rotatebox{90}{$\in$} \qquad & \\
\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2 &\longmapsto a_1 \otimes a_2 \\
T\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2 &\longmapsto T(a_1 \otimes a_2)
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
\omega \otimes_{R\pi} T(a_1 \otimes a_2) &\rightarrow T(a_1 \otimes a_2) \\
T\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2 &\rightarrow T(a_1 \otimes a_2)
\end{aligned}\right) =$$

$$\begin{aligned}
v \circ u (a_1 \otimes a_2) &= v(\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2) = a_1 \otimes a_2 \\
u \circ v (\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2) &= u(a_1 \otimes a_2) = \omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2 \\
u \circ v (T\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2) &= u(T(a_1 \otimes a_2)) = \omega \otimes_{R\pi} T(a_1 \otimes a_2) = T\omega \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2
\end{aligned}$$

故に $u$ は同型対応である.

$$\begin{tikzcd}
\psi'|_{e_1} \quad W\otimes C^{(1)} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & W\otimes C^{(1)} \arrow[r, hook, "u"] & W\otimes_{R\pi} C^{(1)} \\
W\otimes_{R\pi} C^{(1)} \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

$W\otimes_{R\pi}C^{(1)}$ は $W\otimes C^{(1)} \ni w\otimes a_1\otimes a_2$ の元において $w\otimes a_1\otimes a_2$ と $Tw\otimes T(a_1\otimes a_2)$ を同一視した同値関係による商空間である。

$$\begin{array}{ccc}
w\otimes_{R\pi} a_i\otimes a_j \ (i<j) & w\otimes_{R\pi} a_i\otimes a_i & w\otimes_{R\pi} a_j\otimes a_i \ (i<j) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
Tw\otimes_{R\pi} a_j\otimes a_i & Tw\otimes_{R\pi} a_i\otimes a_i & Tw\otimes_{R\pi} a_i\otimes a_j
\end{array}$$

$w, a_j, a_i$ は Base

$$\begin{tikzcd}
W\otimes C^{(1)} \arrow[r, "\psi'|e_1"] \arrow[d] & W\otimes C^{(1)} \arrow[r, hook, "u"] & W\otimes_{R\pi} C^{(1)} \\
W\otimes_{R\pi} C^{(1)} = W\otimes C^{(1)}/\sim \arrow[urr, dashed, "\psi'|e_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$= W\otimes C^{(1)}/\{1,T\}$$

$\psi'|e_1$ は準同型写像である。

$W\otimes_{R\pi}C^{(1)} \ni w\otimes_{R\pi}a_1\otimes a_2,\ w'\otimes_{R\pi}a_1'\otimes a_2'$

実際

$$\begin{aligned}
&\psi'|e_1([w\otimes_{R\pi}a_1\otimes a_2] + [w'\otimes_{R\pi}a_1'\otimes a_2'])\\
&= \psi'|e_1(Tw\otimes T(a_1\otimes a_2) + w'\otimes a_1'\otimes a_2')\\
&= \psi'|e_1(Tw\otimes T(a_1\otimes a_2)) + \psi'|e_1(w'\otimes a_1'\otimes a_2')\\
&= \psi'|e_1([w\otimes_{R\pi}a_1\otimes a_2]) + \psi'|e_1([w'\otimes_{R\pi}a_1'\otimes a_2'])
\end{aligned}$$

さらに、$\partial_\square\circ\Phi_\square + \Phi_{\square-1}\circ\partial_\square = id\otimes\varphi_1^{(1)} - id\otimes\varphi_0^{(1)}$ の対応である
$\partial_\square\circ\psi'_\square|e_1 + \psi'_{\square-1}|e_1\circ\partial_\square = id\otimes_{R\pi}\varphi_1^{(1)} - id\otimes_{R\pi}\varphi_0^{(1)}$ が成立する。

ここで、次のことを注意しておく。$\psi'|e_1 : W\otimes_{R\pi}C^{(1)} \longrightarrow W\otimes_{R\pi}C^{(1)}$ は $R\pi$準同型ではなく、$R$準同型である。

$$\partial_n : (W \otimes_{R\pi} C^{(2)})_n \longrightarrow (W \otimes_{R\pi} C^{(2)})_{n-1}$$

$$\partial_n (w \otimes_{R\pi} a_1 \otimes a_2) = \partial_n(w) \otimes a_1 \otimes a_2 + (-1)^{|w|} w \otimes \partial(a_1 \otimes a_2)$$

$$\begin{aligned} \partial((r_1 + r_2 T) \cdot w) &= \partial(r_1 \cdot w + r_2 T w) \\ &= r_1 \cdot (T + (-1)^{i} w_{i-1}) + r_2 T \cdot (T + (-1)^{i} w_{i-1}) \\ &= r_1 \partial(w_i) + r_2 T \cdot \partial(w_i) \\ &= (r_1 + r_2 T) \cdot \partial(w_i) \end{aligned}$$

故に $\partial : W \longrightarrow W$ は R$\pi$準同型である

$$\begin{aligned} \partial((r_1 + r_2 T) \cdot (a_1 \otimes a_2)) &= \partial \cdot (r_1 \cdot a_1 \otimes a_2 + (-1)^{|a_1||a_2|} r_2 \cdot a_2 \otimes a_1) \\ &= r_1 \partial(a_1 \otimes a_2) + (-1)^{|a_1||a_2|} r_2 \, \partial(a_2 \otimes a_1)) \\ &= r_1 \partial(a_1 \otimes a_2) + (-1)^{|a_1||a_2|} r_2 \, (\partial a_2 \otimes a_1 + (-1)^{|a_2|} a_2 \otimes \partial a_1) \\ &= r_1 \partial(a_1 \otimes a_2) + r_2 T \cdot ((-1)^{|a_1|} a_1 \otimes \partial a_2 + \partial a_1 \otimes a_2) \\ &= r_1 \partial(a_1 \otimes a_2) + r_2 T \, \partial(a_1 \otimes a_2) \\ &= (r_1 + r_2 T) \cdot \partial(a_1 \otimes a_2) \end{aligned}$$

故に $\partial : C^{(2)} \longrightarrow C^{(2)}$ は R$\pi$準同型である.

$$\partial_n : (W \otimes_{R\pi} C^{(2)})_n \longrightarrow (W \otimes_{R\pi} C^{(2)})_{n-1}$$

$$\partial(T(w \otimes_{R\pi} c_1 \otimes c_2)) = \partial(w \otimes_{R\pi} c_1 \otimes c_2)$$

$$\parallel$$

$$\partial(Tw \otimes_{R\pi} T(c_1 \otimes c_2))$$

以上より, $\partial_n \circ \Psi_n|_{e_1} + \Psi_{n-1}|_{e_1} \circ \partial_n = id \otimes_{R\pi} \varphi_1^{(2)} - id \otimes_{R\pi} \varphi_0^{(2)}$ が成立する.

故に $id \otimes_{R\pi} \varphi_0^{(2)}, id \otimes_{R\pi} \varphi_1^{(2)} : W \otimes_{R\pi} C^{(2)} \longrightarrow W \otimes_{R\pi} C^{(2)}$ はチェインホモトープとなり.

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} \qquad \varphi_{0*} = id \otimes_{R\pi} \varphi_0^{(2)} \qquad \varphi_{1*} = id \otimes_{R\pi} \varphi_1^{(2)}$$

（第4段）

$C, C'$をコチェイン複体とする。$C$から$C'$へのコチェインホモトピーは　$C$から$Hom(I, C')$へのコチェインマップに自然に対応する。実際，$\Phi$を$\varphi_0$と$\varphi_1$の間のコチェインホモトピーとする。

$\widetilde{\Phi} : C \longrightarrow Hom(I, C')$を

$$\widetilde{\Phi}(c)(e_0) = \varphi_0(c)$$
$$\widetilde{\Phi}(c)(e_0') = \varphi_1(c)$$
$$\widetilde{\Phi}(c)(e_1) = \Phi(c)$$

により定義する。

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & {} \\
(\oplus Hom(I, C'))_{n-1} \arrow[r, "\delta"] & (\oplus Hom(I, C'))_n \arrow[r, "\delta"] & (\oplus Hom(I, C'))_{n+1} &
\end{tikzcd}$$

$$(\oplus Hom(I, C'))_n \ni u$$

$$\delta u = u \circ \partial + (-1)^p \delta \circ u$$

$\widetilde{\Phi}$はコチェインマップである。　$C_n \ni c$　に対して。

(i)　$\delta \circ \widetilde{\Phi}(c) = \widetilde{\Phi}(c) \circ \partial + (-1)^p \delta \circ \widetilde{\Phi}(c)$

$e_0$に対して　$= \delta \circ \widetilde{\Phi}(e_0)$

$= \delta \circ \varphi_0(c)$

$= \varphi_0(\delta c)$

$= \widetilde{\Phi}(\delta c)(e_0)$

(ii)　同様に$e_0'$に対して

$$\delta \circ \widetilde{\Phi}(c)(e_0') = \widetilde{\Phi}(\delta c)(e_0')$$

(iii)　$e_1$に対して，

$\widetilde{\Phi}(c) \circ \partial(e_1) + (-1) \cdot \delta \circ \widetilde{\Phi}(c)(e_1)$

$= \widetilde{\Phi}(c)(e_0' - e_0) - \delta \circ \Phi(c)$

$= \varphi_1(c) - \varphi_0(c) - \delta \circ \Phi(c)$

$= \Phi(\delta c)$

（$\delta \circ \Phi(c) + \Phi(\delta c) = \varphi_1(c) - \varphi_0(c)$）より

$= \widetilde{\Phi}(c)(e_1)$

以上より，$\delta \circ \widetilde{\Phi}(c)(e_1) = \widetilde{\Phi}(c)(e_1)$

故に　$\widetilde{\Phi}$はコチェインマップである。

逆に$\tilde{\Xi}$がコチェインマップとする。

$\tilde{\Xi}(c)(e_0)$と$\tilde{\Xi}(c)(e_0')$を結ぶコチェインホモトピーが$\tilde{\Xi}(c)(e_1)$である。

$$\tilde{\Xi}(c)(e_0) \ : \ C_{\square} \longrightarrow \bar{Hom}(I_0, C_{\square}') \oplus \bar{Hom}(I_1, C_{\square-1}')$$

ここで、$\tilde{\Xi}(c)(e_0)$はコチェインマップである。

まず、準同型である。

$$\tilde{\Xi}(c+c')(e_0) = \tilde{\Xi}(c)(e_0) + \tilde{\Xi}(c')(e_0)$$
$$\tilde{\Xi}(r\cdot c)(e_0) = r\cdot\tilde{\Xi}(c)(e_0)$$

次にコチェインマップである。

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}(\delta\circ c)(e_0) &= \delta\circ\tilde{\Xi}(c)(e_0)\\ &= \tilde{\Xi}(c)\circ\partial(e_0) + \delta'\circ\tilde{\Xi}(c)(e_0)\end{aligned}$$

($\delta'$は$C_{\square}'$のコバウンダリ作用素)

$$= \delta'\circ\tilde{\Xi}(c)(e_0)$$

故に$\tilde{\Xi}(c)(e_0)$はコチェインマップである。

同様にして$\tilde{\Xi}(c)(e_0')$はコチェインマップである。

次に$\tilde{\Xi}(c)(e_1)$が$\tilde{\Xi}(c)(e_0)$と$\tilde{\Xi}(c)(e_0')$を結ぶコチェインホモトピーであることを示す。

$$\tilde{\Xi}_{\square}(c)(e_1) \quad C_{\square} \longrightarrow C_{\square-1}'$$

$$\begin{tikzcd} C_{\square-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & C_{\square} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[dl] & C_{\square+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & {} \\ C_{\square-1}' \arrow[r, "\delta"] & C_{\square}' \arrow[r, "\delta"] & C_{\square+1}' \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

まず、準同型である。

$$\tilde{\Xi}(c+c')(e_1) = \tilde{\Xi}(c)(e_1) + \tilde{\Xi}(c')(e_1)$$
$$\tilde{\Xi}(r\cdot c)(e_1) = r\cdot\tilde{\Xi}(c)(e_1)$$

次にコチェインホモトピーであることを証明する。

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}(\delta(c))(e_1) &= \delta\circ\tilde{\Xi}(c)(e_1)\\ &= \tilde{\Xi}(c)\circ\partial(e_1) + \delta'\circ\tilde{\Xi}(c)(e_1)\\ &= \tilde{\Xi}(c)(e_0') - \tilde{\Xi}(c)(e_0) - \delta'\circ\tilde{\Xi}(c)(e_1)\end{aligned}$$

($\delta'$は$C_{\square}'$のコバウンダリ作用素)

故に$\tilde{\Xi}(\delta(c))(e_1) + \delta'\circ\tilde{\Xi}(c)(e_1) = \tilde{\Xi}(c)(e_0') - \tilde{\Xi}(c)(e_0)$が成り立ち、

$\tilde{\Xi}(c)(e_1)$が$\tilde{\Xi}(c)(e_0)$と$\tilde{\Xi}(c)(e_0')$を結ぶコチェインホモトピーである。

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/