（第5段）

コチェイン写像 $\varphi_0, \varphi_1 : C \to C'$ がコチェインホモトピーならば、同様に

$$\varphi_0^* = \varphi_1^* : H^*(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(\overline{W}, C^{(2)})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(\overline{W}, C'^{(2)}))$$

が成り立つ。

ここで $\tilde{\Psi}$ を以下の写像の合成であるとする。

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} : \overline{\mathrm{Hom}}(\overline{W}, C^{(2)}) &\xrightarrow{\tilde{\Phi}^{(2)}_{\#}} \mathrm{Hom}(\overline{W}, \overline{\mathrm{Hom}}(I, C')^{(2)}) \\ &\xrightarrow{\pi_2} \mathrm{Hom}(I^{(2)} \otimes \overline{W}, C'^{(2)}) \\ &\xrightarrow{(\theta \otimes id)^{\#}} \mathrm{Hom}(I \otimes \overline{W}, C'^{(2)}) \\ &\xrightarrow{\pi_4} \mathrm{Hom}(I, \mathrm{Hom}(\overline{W}, C'^{(2)}))\end{aligned}$$

第4の写像 $\pi_4 : \mathrm{Hom}_R(I \otimes \overline{W}, C'^{(2)}) \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}}_R(I, \overline{\mathrm{Hom}}(\overline{W}, C'^{(2)}))$ は標準的な同型写像である。

実際、

$$\begin{tikzcd} I \times \overline{W} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & C'^{(2)} \\ I \otimes \overline{W} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$I \otimes_R \overline{W} \cong (I \otimes w_i) \oplus (I \otimes Tw_i)$$

$g \in \mathrm{Hom}_R(I \otimes \overline{W}, C'^{(2)})$ は、双線型写像である。
$g$ に対して一意的に $g' : I \times \overline{W} \longrightarrow C'^{(2)}$ 双線型写像が定まる。

$g'' \in \overline{\mathrm{Hom}}_R(I, \overline{\mathrm{Hom}}(\overline{W}, C'^{(2)}))$ を $g''(e)(w) = g'(e, w)$ で定義する。

逆に $\pi_4'$ として

$$\pi_4' : \mathrm{Hom}_R(I, \overline{\mathrm{Hom}}(\overline{W}, C'^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I \otimes \overline{W}, C'^{(2)}) \quad \text{とする。}$$

$$\mathrel{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}}$$
$$g''$$

$g''(e)(w)$ は双一次形式である。

(i) $g''(e+e')(w) = g''(e)(w) + g''(e')(w)$

$g''(e)(w+w') = g''(e)(w) + g''(e)(w')$ 故

(ii) $g''(re)(w) = r\,g''(e)(w)$

$= g''(e)(rw)$ 故

一意的に $g \circ i = g'$ を満たす $g$ が存在する。

以上のことにより、$\pi_4 : \mathrm{Hom}(I\otimes\overline{W}, C'^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, \mathrm{Hom}(\overline{W}, C'^{(2)}))$ は同型対応である。

第2の写像 $f_2$ は次の写像の合成である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)}) &\xrightarrow{\ L\ } \mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \\
&\xrightarrow{\ \cong\ } \mathrm{Hom}(\overline{W}\otimes I^{(2)}, C'^{(2)}) \\
&\xrightarrow{\ S^{\#}\ } \mathrm{Hom}(I^{(2)}\otimes\overline{W}, C'^{(2)})
\end{aligned}$$

ここに、$S^{\#}$ は $S : \overline{W}\otimes I^{(2)} \xrightarrow{\ \cong\ } I^{(2)}\otimes\overline{W}$ : switching chain map から定まる双対である。

$g \in \mathrm{Hom}(\overline{W}\otimes I^{(2)}, C'^{(2)})$ に対して

$S^{\#}(g) = g\circ S \in \mathrm{Hom}(I^{(2)}\otimes\overline{W}, C'^{(2)})$ である。

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}\otimes I^{(2)} \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] & C'^{(2)} \\
I^{(2)}\otimes\overline{W} \arrow[u, shift right, "S"'] \arrow[ur, "g\circ S"']
\end{tikzcd}$$

$S$ の逆写像 $S^{-1}$ が存在するから これは同型対応である。

次に $L$ は、以下の写像である。

$$L : \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})$$

$$\longmapsto L(f\otimes g)(x\otimes y) = (-1)^{h\cdot q} f(x)\otimes g(y)$$

$f \in \mathrm{Hom}(I_p, C^{h})$
$g \in \mathrm{Hom}(I_q, C'^{k})$

$L$ がコチェインマップであることを示す。

$L : \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(I^{(\cdot)}, C'^{(\cdot)})$ は cochain map である.

実際 $f \in \mathrm{Hom}(I_p, C'^h)$, $g \in \mathrm{Hom}(I_q, C'^k)$ に対して.

$$
\begin{aligned}
& L(\delta(f \otimes g)) \\
&= L(\delta f \otimes g + (-1)^{|f|} f \otimes \delta g) \\
&= L(f \circ \partial \otimes g + (-1)^p \delta \circ f \otimes g + (-1)^{|f|} f \otimes g \circ \partial + (-1)^{|f|+q} f \otimes \delta \circ g) \\
&= (-1)^{h \cdot q} f \circ \partial \otimes g + (-1)^{p+(h+1)q} \delta \circ f \otimes g + (-1)^{|f|+h(q+1)} f \otimes g \circ \partial + (-1)^{|f|+q+h \cdot q} f \otimes \delta \circ g \\
&= (-1)^{h \cdot q} f \circ \partial \otimes g + (-1)^{p+(h+1)q} \delta \circ f \otimes g + (-1)^{p+h \cdot q} f \otimes g \circ \partial + (-1)^{p+q+h+h \cdot q} f \otimes \delta \circ g
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\delta \circ L(f \otimes g) &= L(f \otimes g) \circ \partial + (-1)^{p+q} \delta' \circ L(f \otimes g) \\
&= L(f \otimes g)(\partial \otimes id) + (-1)^p L(f \otimes g)(id \otimes \partial) + (-1)^{p+q} (\delta \otimes id) \circ L(f \otimes g) \\
&\qquad + (-1)^{p+q} \times (-1)^h (id \otimes \delta) L(f \otimes g) \\
&= (-1)^{h \cdot q} f \circ \partial \otimes g + (-1)^{h \cdot q + p} f \otimes g \circ \partial + (-1)^{p+q+hq} \delta \circ f \otimes g \\
&\qquad + (-1)^{p+q+h+h \cdot q} f \otimes \delta \circ g
\end{aligned}
$$

故に $L(\delta(f \otimes g)) = \delta \circ L(f \otimes g)$ であり. cochain map である.

(参考1)

コチェイン複体 $C, C'$ に対して $\delta : (C \otimes C')_n \longrightarrow (C \otimes C')_{n+1}$ は次で定義される.

$$
\begin{aligned}
&\delta_1 \quad C_* \longrightarrow C_{*+1} \\
&\delta_2 \quad C'_* \longrightarrow C'_{*+1} \\
&\quad a \otimes b \in C^p \otimes C^q \quad (p+q=n)
\end{aligned}
$$

$$
\delta = \delta_1 \otimes id + (-1)^p id \otimes \delta_2
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \circ \delta &= \delta(\delta_1 \otimes id + (-1)^p id \otimes \delta_2) \\
&= (\delta_1 \otimes id) \circ (\delta_1 \otimes id) + (-1)^p (\delta_1 \otimes id)(id \otimes \delta_2) + (-1)^{p+1} (id \otimes \delta_2)(\delta_1 \otimes id) \\
&\qquad + (-1)^p \times (-1)^p (id \otimes \delta_2) \circ (id \otimes \delta_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

36-2
H4 1 11

(参考2)

コチェイン複体 C. C′に対して. $\delta : (C\otimes C')_n \longrightarrow (C\otimes C')_{n+1}$ は.

$\delta_1 \quad C_* \longrightarrow C_{*+1}$
$\delta_2 \quad C'_* \longrightarrow C'_{*+1}$.

$a\otimes b \in C^p \otimes C^q \qquad p+q=n$ に対して

$\delta = \delta_1 \otimes id + (-1)^p\, id \otimes \delta_2$ で定義される。

$$\delta\circ\delta = \delta(\delta_1\otimes id + (-1)^p id\otimes\delta_2)$$
$$= (\delta_1\otimes id)\circ(\delta_1\otimes id) + (-1)^p(\delta_1\otimes id)(id\otimes\delta_2) + (-1)^{p+1}(id\otimes\delta_2)(\delta_1\otimes id) + (-1)^{p+p}(id\otimes\delta_2)\circ(id\otimes\delta_2)$$
$$= 0$$

$$\delta(T(a\otimes b)) = \delta((-1)^{p\cdot q}\, b\otimes a)$$
$$= (-1)^{p\cdot q}\,\delta_q b\otimes a + (-1)^{p\cdot q+q}\, b\otimes\delta_p a$$
$$= T(\delta_p a\otimes b + (-1)^p a\otimes\delta_q b)$$
$$= T(\delta(a\otimes b))$$

故に $\delta((r_1+r_2T)(a\otimes b)) = (r_1+r_2T)\,\delta(a\otimes b)$ を満たす.

故に δは準同型である.

（参考2）

Rが環, M, M′が共にR加群, N, N′が共にR加群である時, 次の写像は well-definedである.

$f \in Hom_R(M, M')$, $g \in Hom_R(N, N')$ に対して $M\otimes N$ から $M'\otimes N'$ の中への写像 $f\otimes g$ を $(f\otimes g)(\sum m_i\otimes n_i) = \sum f(m_i)\otimes g(n_i)$ によって定めることができ, $f\otimes g \in Hom_R(M\otimes N, M'\otimes N')$

この $f\otimes g$ を $f$ と $g$ とのテンサー積という.

proof)

$\sum m_i\otimes n_i$ に対してもう一つの表現 $\sum m_j'\otimes n_j'$ が存在したとする. ここで $\sum m_i\otimes n_i - \sum m_j'\otimes n_j' = 0$ であり, $\sum(m_i, n_i) - \sum(m_j', n_j')$ が $(x_1+x_2, y_1)-(x_1, y_1)-(x_2, y_1)$, $(x_1, y_1+y_2)-(x_1, y_1)-(x_1, y_2)$, $(rx_1, y_1)-r(x_1, y_1)$, $\cancel{(x_1, ry_1)-r(x_1, y_1)}$ $(x_1, ry_1)-r(x_1, y_1)$ で生成される部分加群Hの元である. この時, $\sum(f(m_i), g(n_i)) - \sum(f(m_j'), g(n_j'))$ は $(f(x_1+x_2), g(y_1))-(f(x_1), g(y_1))-(f(x_2), g(y_1)) = (f(x_1)+f(x_2), g(y_1))-(f(x_1), g(y_1))-(f(x_2), g(y_1))$, $(f(x_1), g(y_1+y_2))-(f(x_1), g(y_1))-(f(x_1), g(y_2)) = (f(x_1), g(y_1)+g(y_2))-(f(x_1), g(y_1))-(f(x_1), g(y_2))$, $(f(rx_1), g(y_1))-r(f(x_1), g(y_1)) = (r.f(x_1), g(y_1))-r(f(x_1), g(y_1))$, $(f(x_1), g(ry_1))-r(f(x_1), g(y_1)) = (f(x_1), r.g(y_1))-r(f(x_1), g(y_1))$ で生成される $M'\otimes N'$ の部分加群 $H'$ の元である。

よって $\sum(f(m_i), g(n_i)) - \sum(f(m_j'), g(n_j')) \in H'$, 従って $\sum f(m_i)\otimes g(n_i) - \sum f(m_j')\otimes g(n_j') = 0$.

故に $(f\otimes g)(\sum m_i\otimes n_i) = (f\otimes g)(\sum m_j'\otimes n_j')$ が成立する.

別解）

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d, "i"] & M'\times N' \arrow[d, "i"] \\
M\otimes N \arrow[r] & M'\otimes N'
\end{tikzcd}$$

$i$ は自然双線形写像

(i) $f\times g(x_1+x_2, y_1) = (f(x_1+x_2), g(y_1))$
$= (f(x_1)+f(x_2), g(y_1))$
$= (f(x_1), g(y_1)) + (f(x_2), g(y_1))$

(ii) $f\times g(x_1, y_1+y_2) = (f(x_1), g(y_1+y_2)) = (f(x_1), g(y_1)+g(y_2)) = (f(x_1), g(y_1)) + (f(x_1), g(y_2))$

(iii) $f\times g(rx_1, y_1) = (f(rx_1), g(y_1) = (r.f(x_1), g(y_1)) = r(f(x_1), g(y_1))$

(iv) $f\times g(x_1, ry_1) = (f(x_1), g(ry_1)) = (f(x_1), r.g(y_1)) = r(f(x_1), g(y_1))$

参考 2 続き)

よって $f \times g : M \times N \longrightarrow M' \times N'$ は双線形写像.
$i : M' \times N' \longrightarrow M' \otimes N'$ は自然双線形写像

$i \circ f \times g$ は双線形写像であり, 従って一意的に $f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$ が定まる.

q.e.d

$P : \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W \otimes I^{(2)}, C'^{(2)})$ は自然な同型対応である.

$$\begin{array}{ccl} W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ w & \longmapsto & u(w)(e_1 \otimes e_2) \in C'^{(2)} \end{array}$$

$$W \times I^{(2)} \xrightarrow[u]{} C'^{(2)}.$$

$u$は双線形写像である.

(i) $u(w+w')(e_1 \otimes e_2) = u(w)(e_1 \otimes e_2) + u(w')(e_1 \otimes e_2)$

(ii) $u(w)(e_1 \otimes e_2 + e_1' \otimes e_2') = u(w)(e_1 \otimes e_2) + u(w)(e_1' \otimes e_2')$

(iii) $u(r \cdot w)(e_1 \otimes e_2) = r \cdot u(w)(e_1 \otimes e_2)$

(iv) $u(w)(r \cdot e_1 \otimes e_2) = r \cdot u(w)(e_1 \otimes e_2)$ より.

よって
$$\begin{tikzcd} W \times I^{(2)} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C'^{(2)} \\ W \otimes I^{(2)} \arrow[ur, "u_\#"'] & \end{tikzcd}$$

$u_\#$が一意的に存在する. 逆に $u_\#$ R準同型が存在すれば.

(i) $u_\#((w_1+w_2) \otimes e_1 \otimes e_2) = u_\#(w_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + w_2 \otimes e_1 \otimes e_2)$
$= u_\#(w_1 \otimes e_1 \otimes e_2) + u_\#(w_2 \otimes e_1 \otimes e_2)$

(ii) $u_\#(w \otimes (e_1 \otimes e_2 + e_1' \otimes e_2'))$
$= u_\#(w \otimes e_1 \otimes e_2 + w \otimes e_1' \otimes e_2')$
$= u_\#(w \otimes e_1 \otimes e_2) + u_\#(w \otimes e_1' \otimes e_2')$

(iii) $u_\#(r \cdot w \otimes e_1 \otimes e_2) = u_\#(w \otimes r \cdot e_1 \otimes e_2)$
$= r \cdot u_\#(w \otimes e_1 \otimes e_2)$

$u$ : 双線型写像になる.

よって $P$は同型対応である.

$P: \mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varpi \otimes I^{(2)}, C'^{(2)})$ は自然な同型対応である。

実際、

$\mathrm{Biliner}(\varpi \times I^{(2)}, C'^{(2)}) \cong \mathrm{Hom}(\varpi \otimes I^{(2)}, C'^{(2)})$

また、

$\mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \cong \mathrm{Biliner}(\varpi \times I^{(2)}, C'^{(2)})$ である。

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \\ u & \longmapsto & u^{\#}(\omega \times (e_1 \otimes e_2)) = u(\omega)(e_1 \otimes e_2) \end{array}$$

$u^{\#}$ は Biliner（双線型写像）である。

$u^{\#}((\omega + \omega') \times (e_1 \otimes e_2)) = u(\omega + \omega')(e_1 \otimes e_2) = u(\omega)(e_1 \otimes e_2) + u(\omega')(e_1 \otimes e_2) = u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2) + u^{\#}(\omega' \times e_1 \otimes e_2)$

$u^{\#}(\omega \times (e_1 \otimes e_2 + e_1' \otimes e_2')) = u(\omega)(e_1 \otimes e_2 + e_1' \otimes e_2') = u(\omega)(e_1 \otimes e_2) + u(\omega)(e_1' \otimes e_2')$

$= u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2) + u^{\#}(\omega \times e_1' \otimes e_2')$

$$\begin{aligned} u^{\#}(r \cdot \omega \times e_1 \otimes e_2) &= u(r\omega)(e_1 \otimes e_2) \\ &= u(\omega)(r e_1 \otimes e_2) = u^{\#}(\omega \times r(e_1 \otimes e_2)) \\ &= r(u(\omega)(e_1 \otimes e_2)) \\ &= r \cdot u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2) \end{aligned}$$

以上より $u^{\#}$ は双線型写像である。

$\mathrm{Biliner}(\varpi \times I^{(2)}, C'^{(2)}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)}))$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \\ u^{\#} & \longmapsto & u(\omega)(e_1 \otimes e_2) = u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2) \end{array}$$

$u$ は R準同型である。

$$\begin{aligned} u(\omega)(e_1 \otimes e_2 + e_1' \otimes e_2') &= u^{\#}(\omega \times (e_1 \otimes e_2 + e_1' \otimes e_2')) \\ &= u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2) + u^{\#}(\omega \times e_1' \otimes e_2') \\ &= u(\omega)(e_1 \otimes e_2) + u(\omega)(e_1' \otimes e_2') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\omega)(r \cdot e_1 \otimes e_2) &= u^{\#}(\omega \times r\, e_1 \otimes e_2) \\ &= r(u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2)) \\ &= r \cdot (u(\omega)(e_1 \otimes e_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\omega + \omega')(e_1 \otimes e_2) &= u^{\#}((\omega + \omega') \times e_1 \otimes e_2) \\ &= u^{\#}(\omega \times e_1 \otimes e_2) + u^{\#}(\omega' \times e_1 \otimes e_2) \\ &= u(\omega)(e_1 \otimes e_2) + u(\omega')(e_1 \otimes e_2) \end{aligned}$$

$P: \mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varpi\otimes I^{(2)}, C^{(2)})$ は自然な同型対応である.

$\mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)})) \ni u$ に対して $g \in \mathrm{Hom}(\varpi\otimes I^{(2)}, C^{(2)})$ を

$[u(w)](e_1\otimes e_2) = c_1\otimes c_2$ とする時,

$g(w\otimes e_1\otimes e_2) = c_1\otimes c_2$ と定義する.

(i) $g$ は well-defined である. つまり $\Sigma w\otimes(e_1\otimes e_2)$ の表現の仕方によらない.

$\Sigma w_i\otimes e_i$ に対してもう一つの表現 $\Sigma w_j'\otimes e_j'$ が存在したとする. ここで $\Sigma w_i\otimes e_i - \Sigma w_j'\otimes e_j' = 0$ であり. $\Sigma(w_i, e_i) - \Sigma(w_j', e_j')$ が $(x_1+x_2, y_1)-(x_1, y_1)-(x_2, y_1)$, $(x_1, y_1+y_2)-(x_1, y_1)-(x_1, y_2)$, $r(x_1, y_1)-(rx_1, y_1)$, $r(x_1, y_1)-(x_1, ry_1)$ で生成される部分加群 $H$ の元である.

この時,

$$[u(x_1+x_2)](y_1) - [u(x_1)](y_1) - [u(x_2)](y_1)$$
$$= [u(x_1)](y_1) + [u(x_2)](y_1) - [u(x_1)](y_1) - [u(x_2)](y_1)$$
$$= 0.$$

$$[u(x_1)](y_1+y_2) - [u(x_1)](y_1) - [u(x_2)](y_2)$$
$$= [u(x_1)](y_1) + [u(x_1)](y_2) - [u(x_1)](y_1) - [u(x_1)](y_2)$$
$$= 0.$$

$$r([u(x_1)](y_1)) - [u(rx_1)](y_1)$$
$$= r([u(x_1)](y_1)) - [r(u(x_1))](y_1)$$
$$= r([u(x_1)](y_1)) - r([u(x_1)](y_1))$$
$$= 0.$$

$$r([u(x_1)](y_1)) - [u(x_1)](ry_1)$$
$$= r([u(x_1)](y_1)) - r([u(x_1)](y_1))$$
$$= 0.$$

故に well-defined である.

(ii) $g$ は $R$ 準同型である.

加法性は (i) より明らかである.

$$g(rw\otimes e_1\otimes e_2) = [u(r\cdot w)](e_1\otimes e_2) = [r\cdot u(w)](e_1\otimes e_2) = [u(w)](r\cdot e_1\otimes e_2)$$
$$= r([u(w)](e_1\otimes e_2)) = r\cdot g(w\otimes e_1\otimes e_2)$$

同様に $g(w\otimes(e_1\otimes e_2)\cdot r) = r\cdot g(w\otimes e_1\otimes e_2)$

以上の (i), (ii) より $P$ は同型対応である.

$$u(r\cdot w)(e_1 \otimes e_2) = u^{\#}(r\cdot w \times e_1 \otimes e_2)$$
$$= u^{\#}(w \times r\cdot e_1 \otimes e_2) \qquad \text{注意する所}$$
$$= (r\cdot u^{\#})(w \times e_1 \otimes e_2)$$

以上より Pは自然な同型である.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/